韓國海岸·海洋工學會誌
第1卷 第1號, pp.1~7, 1989年 12月

흐름이 存在하는 緩傾斜 海域에서의 波浪變形－理論的 考察
Transformation of Regular Waves on Currents in Water of Slowly Varying Depth—Theoretical Study

蔡璋源*·鄭信澤*·廉器大*·安守漢**
Jang Won Chae*, Shin Taek Joeng*, Ki Dae Yum* and Soo Hahn Ahn**

要　旨：波浪이 緩傾斜海域을 전파해 갈 때 흐름 및 水深變化에 의한 波의 屈折, 廻折 등의 파랑변형현상을 나타낼 수 있는 완경사 파동방정식을 變分原理를 이용하여 유도하였다. 이 식은 雙曲形方程式으로 Kirby(1984)의 式과 같다. 定常狀態의 단순 규칙파에 대한 數値模型을 有限差分法을 이용하여 수립하였으며 이 모형은 開放海域에서 계산의 효율 및 정확도가 타모형에 비해 우수하다. 離岸流와 規則波의 상호작용 현상을 수치모형실험을 통해 상세하게 분석하였다.

Abstract□Theoretical studies have been made to analyze combined refraction diffraction of the wind waves propagating on a large scale current in water of varying depth. The governing equation for monochromatic waves was derived through splitting a mild slope equation into two equations. A numerical model is developed using finite difference scheme which is computationally very efficient for modelling large area. Numerical examples concerning the interactions between waves and rip currents over a gentle slope are presented, in which the current effects on the wave diffraction in the caustic region are closely examined.

1. 緖　　論

우리 經濟의 고도성장과 인구의 증가로 인하여 沿岸域에 대한 효율적이고 종합적인 利用이 절실히 요구되고 있으며 그 활용범위도 점차 확대되고 있다. 波浪은 防波堤 및 護岸 등의 海岸構造物을 설계하는데 필요한 주요 環境要素 중의 하나로 構造物에 가장 큰 動力學的인 영향을 준다. 따라서 이에 대한 많은 硏究가 진행되었다. 그러나 波浪과 흐름의 相互作用에 의한 構造物의 안정성, 선박항행, 浮遊砂移動 등에 미치는 영향은 복잡할 뿐만 아니라 잘 규명되어 있지 않으며 그 연구도 최근에 이르러 활발해지고 있다.

深海에서 발달된 波가 水深과 흐름이 변하는 沿岸域을 傳播해 갈 때 흐름과 相互作用, 屈折, 廻折, 碎波, 에너지減衰, 비선형효과 등에 의해 波高와 波向이 크게 변형된다. 이러한 현상을 종합적으로 다룰 수 있는 모형은 극소수일 뿐만 아니라 계산영역이 좁고 또한 계산시간이 많이 걸린다(예：Abbott 등, 1978).

本 論文에서는 앞에서 언급한 현상들을 복합적으로 나타낼 수 있는 일반적인 雙曲形 波動方程式(hyperbolic wave equation)을 變分原理(variational principle)를 이용하여 유도하였다. 또한 이 식을 이용하여 抛物形 모형(parabolic model)보다 넓은 해역의 파랑변형을 계산하는 데 매우 효과적인 數値모형을 수립하였다.

2. 基本方程式

2.1 雙曲形 方程式

비압축성 비회전류의 運動은 다음과 같이 Laplace式으로 나타낼 수 있다. 방정식의 좌표계 및 변수의 정의는 Fig. 1에 제시되었다.

*韓國科學技術硏究院 海洋硏究所(Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)
**서울大學校 土木工學科(Department of Civil Eng., Seoul National University, Seoul 151-742, Korea)

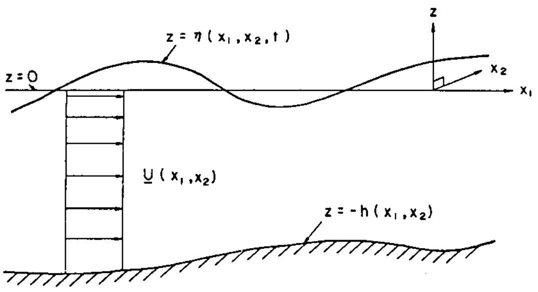

Fig. 1. Definition sketch of fluid domain.

$$\nabla^2\phi=0 \tag{1}$$

단, $u_1=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}$, $u_2=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}$, $w=\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ 이다

自由表面과 海底面을 각각 다음과 같이 정의하면,

$$z=\eta(x_1,x_2,t),\quad z=-h(x_1,x_2) \tag{2}$$

自由表面式 $F(x_1, x_2, z, t)$는 式 (3)으로 표현할 수 있다.

$$F(x_1,x_2,z,t)=\eta(x_1,x_2,t)-z=0 \tag{3}$$

運動學的 自由表面 境界條件(KFSBC) $\dfrac{DF}{Dt}=0$에 式 (3)을 대입하면 式 (4)와 같이 된다.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+u_1\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial\eta}{\partial x_2}-w=0 \text{ on } z=\eta \tag{4}$$

또, 이 式을 속도포텐셜을 이용하여 표시하면

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$$
$$\text{on } z=\eta \tag{5}$$

動力學的 自由表面 境界條件(DFSBC)은 Bernoulli 定理로부터

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+g\eta=C(t) \text{ on } z=\eta \tag{6}$$

로 表示된다. 여기서, $q^2=u_1{}^2+u_2{}^2+w^2$

윗 式들은 비선형항을 포함하고 있으며 이 식을 간략화하기 위해 波高가 파장에 비해 작고, ϵ(파형경사)이 작다고 가정하면, η와 ϕ를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\eta=\epsilon\eta_1+\epsilon^2\eta_2+\cdots$$
$$\phi=U_1x_1+U_2x_2+\epsilon\phi_1+\epsilon^2\phi_2+\cdots \tag{7}$$

式 (7)에서 U_1, U_2는 波浪運動에 작용하는 유속(ambient current)의 水平方向 성분으로 항상 주어지는 대규모 흐름 (large scale current, $O(\varepsilon^{\circ})$)이라 가정한다.

式 (7)을 式 (1), (5)에 대입하면 각각 다음과 같다.

$$\epsilon\nabla^2\phi_1+\epsilon^2\nabla^2\phi_2+\cdots=0 \tag{8}$$

$$\epsilon\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial t}+U_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)$$
$$+\epsilon^2\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial t}+U_1\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}+\cdots\right)+\cdots=0 \tag{9}$$

또, $q^2=U_1^2+U_2^2+\epsilon\left(2U_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1}+2U_2\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right)$

$$+\epsilon^2\left\{\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2+\cdots\right\}+\cdots$$

이므로 式 (6)은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{1}{2}(U_1^2+U_2^2)+\epsilon\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+U_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}+g\eta_1\right.$$
$$\left.+\epsilon^2\left[\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}\right)^2+\cdots\right]+\cdots=C(t)\right. \tag{10}$$

式 (8)-(10)에서 ϵ^2이상 항은 무시하고 $\epsilon\eta_1$을 η, $\epsilon\phi_1$을 ϕ로 다시 정의하면 이 式을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\nabla^2\phi=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+U_1\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial\eta}{\partial x_2}=\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \text{on } z=0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+U_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+g\eta=0 \text{ on } z=0 \tag{13}$$

式 (13)은 式(10)에서 $2(U_1{}^2+U_2{}^2)$과 $C(t)$를 제거한다.

따라서 Booij(1981)의 式은 式 (13)에 비해 $\phi(\nabla\cdot\underline{U})$항을 더 포함하고 있는데, 이는 DFSBC를 적용하여 식을 전개하는 과정에서 오류를 범하여 기인된 것이므로 이 식은 부정확하다. 이는 Kirby (1984)에 의해 지적된 바 있다.

式 (13)과 (12)를 합하면

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+U_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+U_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)$$
$$+g\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \text{ on } z=0 \tag{14}$$

로 표시된다.

波浪運動에 대해 變分原理 (variational principle)를 적용하면 Lagrangian, L은 速度포텐셜 φ를 이용하여 다음과 같이 된다(Luke, 1967; Whitham, 1974).

$$\delta\int_t\int_{\underline{x}} L d\underline{x} dt=0, \quad L=\int_0^h \{\varphi_t+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+gz\}$$

dz, h; 수심

같은 방법으로 波浪-흐름 運動에 대해 變分原理를 적용하면 式 (11)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\iiint_V \delta\phi\nabla^2\phi dV=0$$

Green 定理를 이용하면 윗 式은

$$\iint_S \delta\phi n\cdot\nabla\phi ds-\iiint_V(\nabla\phi)\cdot(\nabla\delta\phi)dV=0 \quad (15)$$

로 표현되며 式 (14)를 式 (15)에 대입하면 式 (16)을 얻는다.

$$\delta\iint L dx_1 dx_2=0 \quad (16)$$

여기서, $L=\frac{1}{2g}(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla\phi)^2|_{z=0}-\frac{1}{2}\int_{-h}^0(\nabla\phi)^2dz$

速度 포텐셜 ϕ를

$$\phi(x_1, x_2, z, t)=f(z)\Phi(x_1, x_2, t) \quad (17)$$

여기서, $f(z)=\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}$, k; 파수

라고 하면 式 (16)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L=\frac{1}{2g}(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla\Phi)^2-\frac{1}{2}\Phi^2\int_{-h}^0(\frac{\partial f}{\partial z})^2dz-$$
$$-\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\int_{-h}^0 f^2dz$$

윗 式에

$$g\int_{-h}^0 f^2dz=CC_g, \quad g\int_{-h}^0(\frac{\partial f}{\partial z})^2dz=\sigma^2-k^2CC_g$$

의 관계式들을 대입하면 式 (18)을 얻는다. 여기서 σ는 상대각주파수, C는 파속, C_g는 군속도이다.

$$L=\frac{1}{2}\{(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+U\cdot\nabla\Phi)^2-CC_g(\nabla\Phi)^2+(\sigma^2-k^2CC_g)\Phi^2\} \quad (18)$$

한편, Lagrangian에 대한 Euler 式은

$\frac{\partial L}{\partial\Phi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\Phi_t}-\nabla\frac{\partial L}{\partial\nabla\Phi}=0$ 이므로

式 (18)을 대입하여 다음의 關係式을 얻는다.

$$(\frac{\partial}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla)(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla\Phi)-\nabla\cdot(CC_g\nabla\Phi)+(\sigma^2-k^2CC_g)\Phi=0 \quad (19)$$

또는,

$$\frac{D^2\Phi}{Dt^2}+(\nabla\cdot\underline{U})\frac{D\Phi}{Dt}-\nabla\cdot(CC_g\nabla\Phi)+(\sigma^2-k^2CC_g)\Phi=0 \quad (20)$$

단, $\frac{D}{Dt}=(\frac{\partial}{\partial t}+U\cdot\nabla)$

式 (19)는 雙曲形(hyperbolic type) 偏微分方程式으로 波浪-흐름 相互作用運動을 나타낸다. 이 식은 Booij(1981), Liu(1983)가 제안한 식과 약간 다르며, 淺海域에서도 적용이 가능하다(Booij, 1981). 이 식을 이용한 수치모형을 開放海域(open sea)에 적용하는 경우 모델영역이 수십 km^2에 해당하므로 계산시간이 많이 걸리고 대용량의 컴퓨터가 필요하다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 본 연구에서는 式 (20)으로부터 楕圓形 파동방정식을 유도한 다음 定常상태의 파랑변형을 매우 효과적으로 계산할 수 있는 數値모형을 개발하였다. 포물형 모형의 격자간격은 $L_o/4$보다 훨씬 작아야 타당한 결과를 얻게 되는데 파가 천해로 진행할수록 파장 L_o가 짧아져 격자간격도 작아져서 결국 많은 계산격자점이 요구된다. 그러나 본 모델의 격자간격은 파장의 크기에 민감하지 않으므로 계산격자점이 적어 타 모형에 비해 계산시간이 적게 걸린다.

2.2 楕圓形 方程式

波浪이 定常狀態인 경우를 고려하면

$$\Phi = \mathrm{Re}\,\{\tilde{\phi}\exp(-i\omega t)\} \tag{21}$$

여기서, $\tilde{\phi}=\tilde{\phi}(x_1, x_2)$, ω ; 절대 각주파수 이므로 式 (21)을 式 (20)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$-i\omega\{2\underline{U}\cdot\nabla\tilde{\phi}+\tilde{\phi}(\nabla\cdot\underline{U})\}+(\underline{U}\cdot\nabla)(\underline{U}\cdot\nabla\tilde{\phi})+(\nabla\cdot\underline{U})(\underline{U}\cdot\nabla\tilde{\phi})-\nabla\cdot(CC_g\nabla\tilde{\phi})+(\sigma^2-\omega^2-k^2CC_g)=0 \tag{22}$$

윗 式은 楕圓形 偏微分方程式으로 $\underline{U}=(0, 0)$인 경우 Berkhoff(1972)의 緩傾斜方程式이 된다. 또 式 (22)에 $\tilde{\phi}=-ig\frac{a}{\sigma}e^{iS}$를 대입하면 실수부와 허수부로부터 다음 식들을 얻는다. 여기서 g는 重力加速度, $a(x_1, x_2)$는 振幅, $S(x_1, x_2)$는 位相(phase)이다.

Transport eq.

$$\nabla\cdot\{\underline{U}\frac{a^2}{\sigma^2}(\omega-\underline{U}\cdot\nabla S)+CC_g\frac{a^2}{\sigma^2}\nabla S\}=0 \tag{23}$$

Eikonal eq.

$$CC_g\frac{a}{\sigma}(\nabla S)^2-(\underline{U}\cdot\nabla S-\omega)^2\frac{a}{\sigma}+(\sigma^2-k^2CC_g)\frac{a}{\sigma}-\nabla\cdot(CC_g\nabla\frac{a}{\sigma})+(\nabla\cdot\underline{U})(\underline{U}\cdot\nabla\frac{a}{\sigma})+\underline{U}\cdot\nabla(\underline{U}\cdot\nabla\frac{a}{\sigma})=0 \tag{24}$$

위의 두 式은 本 硏究의 주요 結果 중의 하나이다. 이는 일반적인 波動方程式이며 다음과 같이 잘 알려진 旣存式들로 쉽게 변환될 수 있다. 즉, 式 (23), (24)에 $U=(0, 0)$을 대입하면, Ebersole (1985)의 式과 같이 된다. 또, $\Phi=-ig\frac{A}{\sigma}e^{i\psi}$를 式 (20)에 대입하면 式 (23), (24)와 유사한 式 (25), (26)를 얻는다. 여기서, $A(x_1, x_2, t)$는 진폭, $\psi(x_1, x_2, t)$는 位相이다.

$$-\nabla\cdot(\frac{A^2}{\sigma^2}CC_g\nabla\psi)+\nabla\cdot\{\underline{U}\frac{A^2}{\sigma^2}(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla\psi)\nabla\cdot(\underline{U}\frac{A}{\sigma})+\frac{A}{\sigma}\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{A}{\sigma}(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla\psi)\}+\frac{A}{\sigma}(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla\psi)\frac{\partial}{\partial t}(\frac{A}{\sigma})=0 \tag{25}$$

$$CC_g\frac{A}{\sigma}(\nabla\psi)^2-(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla\psi)^2\frac{A}{\sigma}+(\sigma^2-k^2CC_g)\frac{A}{\sigma}-\nabla\cdot(CC_g\nabla\frac{A}{\sigma})+(\frac{\partial}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla)\{\frac{\partial}{\partial t}(\frac{A}{\sigma})+\nabla\cdot(\underline{U}\frac{A}{\sigma})\}-\frac{A}{\sigma}\{(\frac{\partial}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla)(\nabla\cdot\underline{U})\}=0 \tag{26}$$

2.3 Wave action 保存式

屈折만을 고려하는 경우(즉, 파향선(wave ray)을 따라 wave action이 보존되는 경우), $\underline{k}=\nabla S$, $\sigma=\omega-\underline{U}\cdot\nabla S$이므로 式 (23)은 다음과 같다.

$$\nabla\cdot\{\frac{a^2}{\sigma}(U+C_g)\}=0 \tag{27}$$

윗 式은 定常狀態에서 wave action에 保存을 나타낸다.

비정상상태의 경우

$\underline{k}=\nabla\psi$, $\omega=-\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}+\underline{U}\cdot\nabla\psi=-\sigma$ 이므로 式 (25)는

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{A^2}{\sigma})+\nabla\cdot\{\frac{A^2}{\sigma}(C_g+\underline{U})\}=0 \tag{28}$$

로 되어 비정상상태는 wave action式이다.

이상과 같이 유도된 式 (23), (24)와 波數의 비회전성 關係式은 定常狀態의 波浪傳播現象을 나타내는 일반적인 파동방정식으로 波의 屈折·廻折 및 흐름과의 상호작용을 포함한다. 이 식은 이미 발표된 蔡·鄭·廉(1988)의 내용을 수정 보완한 것이다.

3. 數値모델 實驗

海岸 및 하구에서는 波가 전파할 때 水深의 변화와 海流, 潮流 또는 海濱流 등에 의해 복합적으로 영향을 받으면서 변형된다. 이 현상은 앞에서 유도된 식을 이용하여 비교적 넓은 海域에 효과적으로 분석 및 예측될 수 있다. 本 硏究에서는 式 (23)과 (24)를 x방향으로 전방차분법, y방향으로 중앙차분법을 이용하여 有限差分化한 다음 각 列에 대해 반복계산을 하고 前進技法(marching method)을 이용하여 coupled solution을 계산하였다. 수치계산 방법에 대한 상세한 내용은 蔡·鄭·廉(1988)에 게재되어 있으므로 여기서는 생략하고 이상적인 경우의 수치모형 실험에 대해 간단히 논의한다.

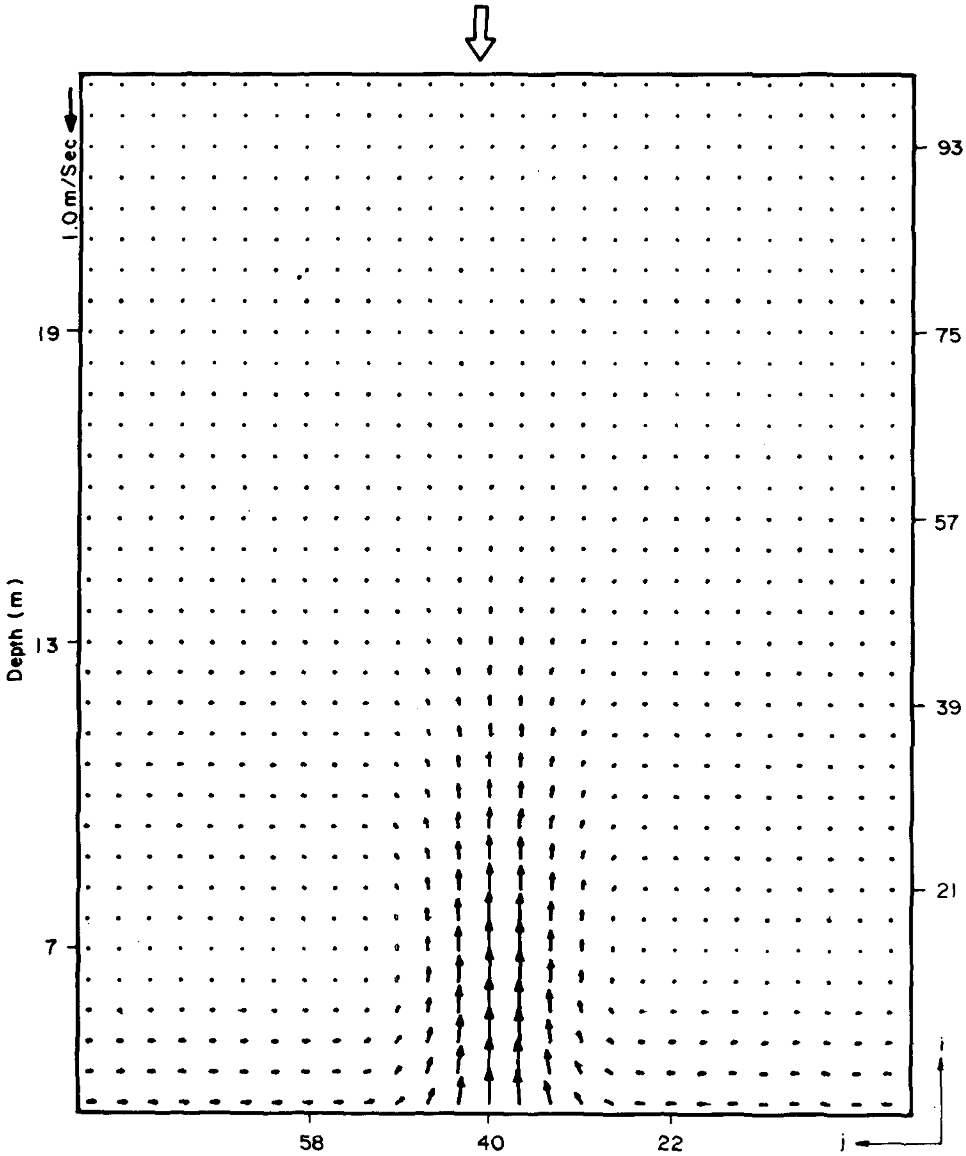

Fig. 2. Pattern of rip current.

數値模型 實驗은 규칙파가 일정하게 경사진(기울기 : 0.05) 해빈을 직각으로 입사하여 진행할 때 離岸流(Fig. 2 참조)에 의해 크게 변형되는 현상을 분석하고 모델의 신빙성을 검토하기 위해 실시되었다. 入射波는 波高 2m, 週期 8초, 계산격자 간격은 $\Delta x=10$m, $\Delta y=5$m로 하여 계산한 결과 중 波高比의 分布를 Fig. 3에 제시하였다. 抛物形 方程式을 이용한 수치계산 결과(Kirby, 1984)를 Fig. 4에 도시하였는데 두 결과가 거의 일치한다. 따라서, 계산 방법은 적합하다고 사료된다.

파의 흐름 및 수심변화에 의한 屈折·廻折現象은 다음과 같이 해석할 수 있다. 流速이 큰 離岸流의 중앙에는 파가 모여서 에너지의 밀도, 즉 波高가 커지고 양 옆은 상대적으로 파고가 작아지나 波高의 평면 분포구배가 커져 A_{yy}/A가 陰이 되어 $|\nabla S|$가 작아진다. 따라서 파장이 커지고(波速이 커져) 이곳의 波가 빨리 진행하여 波峯線이 휘어지는 효과가 나타난다. 즉 波向이 변해서 에너지는 波高가 작

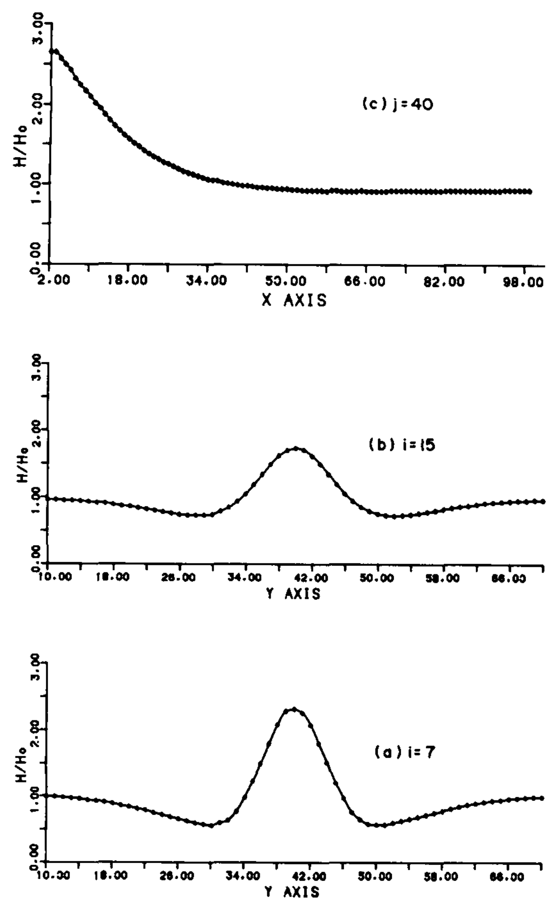

Fig. 3. Amplitude relative to incident wave for waves interacting with rip current (Elliptic model).

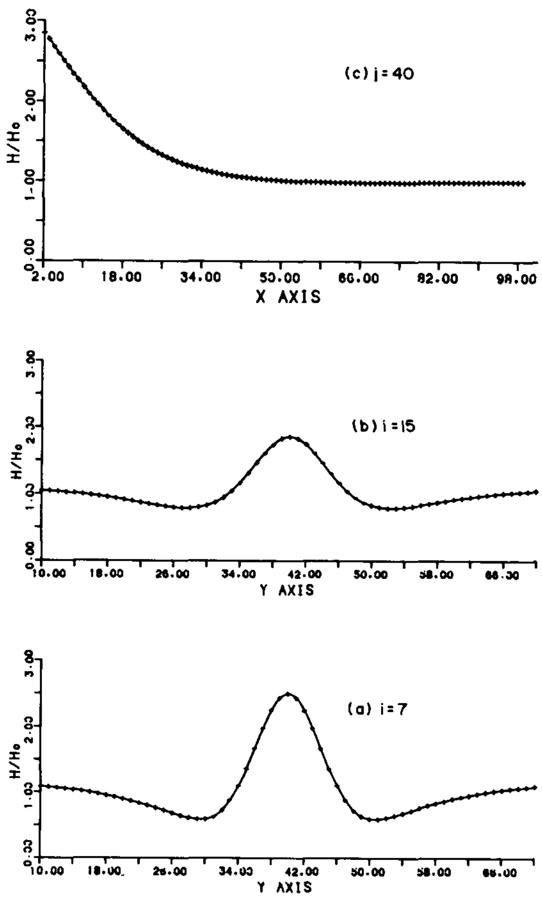

Fig. 4. Amplitude relative to incident wave for waves interacting with rip current (Parabolic model).

은 쪽으로 진행하게 되는데 이를 廻折이라 한다. 파봉선의 파고가 작은 곳에서는 위와 반대의 현상이 나타나 波가 느리게 진행하므로 파고가 큰 곳에서 파고가 작은 곳으로 진행토록 상승작용을 한다. 이상과 같이 波는 Shoal 뿐만 아니라 剪斷흐름(shear current)에 의해서도 굴절 및 회절에 의해 크게 변형됨을 알 수 있다. 그러나 定量的인 分析은 水理模型 實驗 結果 또는 현장관측자료와 비교를 통해 이루어질 수 있을 것이다.

4. 結 論

深海에서 발달된 風波가 수심과 흐름이 변하는 연안역을 전파해 갈 때 廻折 및 屈折에 의한 파랑변형을 나타낼 수 있는 이론식을 變分原理를 이용하여 전개하였다. 이는 雙曲形 方程式으로 Kirby(1984)가 유도한 식과 동일한 형태로 일반적인 파동방정식이며, 이로부터 단순규칙파에 대한 楕圓形 方程式을 유도하였다. 既存 有限要素 및 抛物形 數値모델에 비해 계산상 우월한 수치모형을 수립하고, 이를 이용해서 離岸流에 의한 파의 굴절 회절현상을 분석하였다. 앞으로 이 모형은 파의 비선형효과(쇄파 및 해저마찰에 의한 減衰 등)를 포함하도록 개선되어야 할 것이다.

참고문헌

과학기술처, 1987. 해안구조물 적정설계조건 결정기법의 체계화연구.

채장원, 정신택, 이달수. 1988. 비선형 규칙파의 굴절 및 회절—수치모델, 제 30회 수공학 연구발표 논문집. 18-28.

채장원, 정신택, 염기대. 1988. 흐름과 수심변화에 의한 파의 굴절·회절에 관한 연구, 大韓土木學會 학술발표 논문집. 486-490.

Abbott, M.B., Petersen, H.M. and Skovgaard, O., 1978. Numerical modelling of short waves in shallow water, *J. Hyd. Res.*, **16**: 173-204.

Arthur, R.S., 1950. Refraction of shallow water waves: the combined effect of currents and underwater topography, *Trans. Amer. Geophys. Union.* **31**(4): 549-552.

Booij, N., 1981. Gravity waves on water with non-uniform depth and current, Ph.D. dissertation, Delft Univ. of Technology, the Netherlands.

Chae, J.W. and Song, W.O., 1986. Current-depth refraction of directional wave spectra, 5th Congr. APD of IAHR, Seoul, Korea, **3**: 15-34.

Chu, V.H. and Mei, C.C., 1970. On slowly varying Stokes waves, *J. Fluid Mech.*, **41**(4): 873-887.

Ebersole, B.A., 1985. Refraction-diffraction model for linear water waves, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE,* **111**(6): 939-953.

Jonsson, I.G., Christoffersen, J.B. and Skovgaard, O., 1983. A general computational method for current depth refraction of water waves, *Proc. Int. Conf. on Coastal and Port Eng. in Developing Countries.* Colombo, Sri Lanka.

Kirby, J.T., 1983. Propagation of weakly-nonlinear surface water waves in regions with varying depth and current, Res. Rep. No. CE-83-37, Dept. of Civil Eng., Univ. of Delaware.

Kirby, J.T., 1984. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, *J. of Geophys. Res.*, **89**(C1): 745-747.

Liu, P.L-F., 1983. Wave-current interactions on a slowly varying topography, *J. of Geophys. Res.*, **88**(C7): 4421-4426.

Luke, J.C., 1967. A variational principle for a fluid with a free surface, *J. Fluid Mech.*, **27**: 395-397.

Whitham, G.B., 1967. Non-linear dispersion of water waves, *J. Fluid Mech.*, **27**(2): 399-412.

Whitham, G.B., 1974. Linear and nonlinear waves, Wiley-Interscience, New York, 1974.