

판부재의 탄소성대변형 유한요소 해석문제에서의 수렴기법에 관한 고찰

A Study on the Iterative Solution Procedures for the
Elasto-Plastic Large Deflection Analysis of Plates
by Finite Element Method

| | | | | | |
|--------|----|------|-------|----|------|
| 백 | 점 | 기* | 김 | 창 | 렬*** |
| Jeom | K. | Paik | Chang | Y. | Kim |
| 이 | 정 | 권** | | | |
| Jeoung | G. | Lee | | | |

요 약

본 연구에서는 유한요소법에 의한 판부재의 탄소성대변형 거동해석시의 불평형력에 대한 수렴기법의 효율성에 대해 고찰해 보았다. 대상 수렴기법으로는 단순증분법(SI법), Newton-Raphson(NR)법과 수정 Newton-Raphson(mNR)법을 선정하였다. 이들 결과를 바탕으로, 큰 처짐이 발생하는 판에 대해서는 불평형력에 대한 수렴계산을 수행하여야 하며, 이 경우 mNR 법과 NR법은 같은 정도를 유지하면서도 계산시간은 mNR 법이 NR 법에 비해 약 1/2 정도 절감되며, 큰 초기처짐이 존재하거나 두꺼운 판의 경우에는 불평형력이 상대적으로 크지 않기 때문에 SI법을 사용하는 것이 훨씬 유용하다는 것을 확인하였다.

Abstract

In this study, a usefulness of the iterative solution procedures is reviewed for the elasto-plastic large deflection analysis of imperfect plates by finite element method. Three typical solution techniques such as simple incremental(SI) method, Newton-Raphson(NR) method and modified Newton-Raphson (mNR) method are compared. It is concluded that for thin plates which are given rise to the large deflection, iteration for the convergence of the unbalance force should be performed and in this case mNR method is more useful than NR method since the computing time of the former becomes to be a half of the latter, in which the accuracy of the result remains same. For thick plates or thin plates

* 정회원, 부산대학교 공과대학 조선공학과

** 학생회원, 부산대학교 공과대학 조선공학과 석사과정

*** 부산대학교 공과대학 조선공학과

□ 이 논문에 대한 토론을 1989년 12월 31일까지 본학회에 보내주시면 1990년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

with large initial deflection, however, the use of SI method is quite better since the unbalance force may be negligible.

1. 서언

선박, 해양구조물 및 육상구조물을 구성하는 판부재의 안전성을 평가하고 합리적인 구조설계를 수행하기 위하여는 외하중의 증가와 함께 판부재가 최종강도에 도달하기까지 나타나는 좌굴, 소성변형등의 기하학적 및 재료의 비선형거동을 상세히 파악할 필요가 있다.

이 문제를 해결할 수 있는 방법중에는 유한요소법으로 대표되는 수치해석법이 있으며, 특히 유한요소법이 많이 쓰이고 있다. 비선형 문제에 대한 유한요소 해석기법은 크게 반복법과 증분법이 있는데 현재 비선형 유한요소해석에서는 주로 증분법이 적용되고 있다.

그런데, 비선형 유한요소 해석문제에서의 기본적인 사항은 강성방정식을 어떻게 효율적으로 풀 것인가에 있다. 이 문제에 대하여는 효율적인 1차연립방정식의 해법과 불평형력에 대한 수렴기법의 측면에서 생각해 볼 수 있다. 즉, 일반강성행렬이 가지는 대칭성이나 sparse성 등의 특성을 활용하면 효율적으로 1차 연립방정식의 해를 구할 수 있을 것이며, 또한, 기하학적 비선형성이 강한 문제에 있어서는 내력과 외력의 불평형력을 효율적으로 소거시킬 수 있다면 수렴과정이 단축되고 계산시간을 절약할 수 있을 것이다.

이상의 관점에서 본 연구에서는 2차의 수렴기법에 주목하여 유한요소법에 의한 판부재의 탄소성 대변형 거동 해석시에 불평형력을 소거하기 위한 대표적인 수렴기법의 정도와 계산시간면에서의 효율성에 대하여 정량적으로 비교, 검토하고자 한다.

2. 수치해석 이론의 개요

본 논문에서는 저자등의 정식화한 탄소성 대변형 해석이론¹⁾을 적용하여 판부재의 거동을 해

석하였다.

이 방법에서는 판부재를 4절점 사각형 유한요소로 모델링하고 각 모서리의 두계방향 중심에 절점을 설정하였다. 또한, 요소의 강성행렬은 각 절점에 5개의 자유도를 부여하여 Updated Lagrangian 기법을 적용하여 계산한다. 그리고, 소성화의 진전에 따른 요소의 강성행렬은 소성절점법²⁾을 적용하여 계산하였으며, 해석정도의 향상을 위하여 실제 계산에서는 적절한 하중배율계수를 이용하여 탄성절점을 한개씩 소성화시켰다.

3. 수렴기법의 개요

본 논문에서 대상으로 하고있는 수렴기법은 Fig. 1에 나타내는 바와 같이 단순증분법(SI법), Newton-Raphson법(NR법) 및 수정 Newton-Raphson 법(mNR 법)으로서 이들은 이미 그 이론이 확립되어 있으므로³⁾ 여기서는 개요만을 설명하기로 한다.

(1) 단순증분법(SI 법)

이 방법에서는 단순히 외하중을 증분적으로 증가시켜 불평형력의 발생을 무시한 채 강성방정식을 푼다. 이 경우, n번째 하중증분단계에서의 강성방정식은 다음과 같이 된다.

$$\{\Delta R\}^n = [K]^{n-1} \{\Delta U\}^n \quad (1)$$

여기서, $\{\Delta R\}^n$: n번째 하중증분단계에서의 외하중벡터 증분

$\{\Delta U\}^n$: n번째 하중증분단계에서의 절점변위벡터 증분

$[K]^{n-1}$: n-1번째의 하중증분단계에서 얻어진 해석결과를 바탕으로 작성된 접선 강성행렬

(1)식을 외하중벡터 $\{\Delta R\}^n$ 의 작용하에서 풀면, 절점변위벡터 $\{\Delta U\}^n$ 이 얻어지며, 그 결과,

전체적인 하중 및 변위벡터는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \{R\}^n &= \{R\}^{n-1} + \{\Delta R\}^n \\ \{U\}^n &= \{U\}^{n-1} + \{\Delta U\}^n \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\{R\}^{n-1}$: $n-1$ 번째 하중증분단계까지의 누적 외하중벡터
 $\{U\}^{n-1}$: $n-1$ 번째 하중증분단계까지의 누적 절점변위벡터

그러나, 이 방법에서는 불평형력의 존재를 무시하고 있으므로 높은 정도의 해석결과를 얻기 위하여는 보다 미소한 하중증분량을 작용시킬 필요가 있다.

(2) Newton-Raphson법(NR 법)

이 방법에서는 매 하중증분단계에서 발생한 불평형력을 반복계산에 의해 소거시키되, 반복계산시마다 강성행렬을 새로 계산하여 적용한다. 즉, n 번째 하중증분단계에서의 j 번째 반복계산시의 강성방정식은 다음과 같이 된다.

$$\{\Delta R\}^{n,j} = [K]^{n,j-1} \{\Delta U\}^{n,j} \quad (3)$$

여기서, $\{\Delta R\}^{n,j} = \{R\}^n - \{r\}^{n,j-1}$
 $\{R\}^n$: n 번째 하중증분단계까지의 누적 하중벡터
 $\{r\}^{n,j-1}$: n 번째 하중증분단계에서 $j-1$ 번째 반복계산시까지의 누적 내력 벡터
 $[K]^{n,j-1}$: n 번째 하중증분단계에서 $j-1$ 번째 반복계산 결과로 부터 계산하는 j 번째 반복계산을 위한 접선 강성행렬
 $\{U\}^{n,j} = \{U\}^{n,j-1} + \{\Delta U\}^{n,j}$
 여기서, $\{U\}^{n,j-1}$: n 번째 하중증분단계에서 $j-1$ 번째 반복계산시까지의 누적 절점변위벡터
 $\{\Delta U\}^{n,j}$: n 번째 하중증분단계에서 j 번

째 반복계산시의 절점변위벡터 증분

(3) 수정 Newton-Raphson법(mNR 법)

이 방법에서는 N-R법에서와 같이 매 하중증분단계에서 발생한 불평형력을 반복계산에 의해 소거시키되, 매 반복계산시에 필요한 강성행렬은 첫번째 반복계산시의 것을 그대로 적용한다. 즉, n 번째 하중증분단계에서의 j 번째 반복계산시의 강성방정식은 다음과 같이 된다.

$$\{\Delta R\}^{n,j} = [K]^n \{\Delta U\}^{n,j} \quad (4)$$

여기서, $\{\Delta R\}^{n,j} = \{R\}^n - \{r\}^{n,j-1}$
 $\{R\}^n$: n 번째 하중증분단계까지의 누적 하중벡터
 $\{r\}^{n,j-1}$: n 번째 하중증분단계의 $j-1$ 번째 반복계산까지의 누적 내력벡터
 $[K]^n$: n 번째 하중증분단계에서의 접선 강성행렬
 $\{U\}^{n,j} = \{U\}^{n,j-1} + \{\Delta U\}^{n,j}$

(4) 수렴판정기준

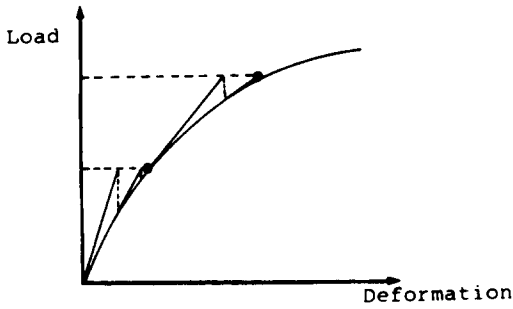
본 연구에서는 수렴판정기준으로서 외하중 작용점에서의 불평형력의 norm이 임의의 기준치를 초과하지 않도록 설정하였다. 즉,

$$\frac{\|R-r\|^{n,j}}{\|\Delta R\|^n} = \frac{\|L\|^{n,j}}{\|\Delta R\|^n} \leq \epsilon \quad (5)$$

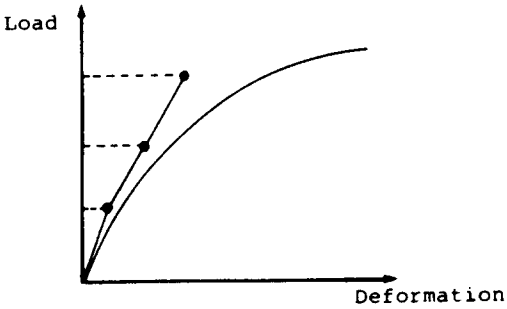
여기서, $\| \Delta R \| ^n$: n 번째 하중증분단계에서의 절점외력벡터 norm

$L^{n,j} = R-r^{n,j}$: n 번째 하중증분 단계에서의 j 번째 반복계산후의 불평형력 norm

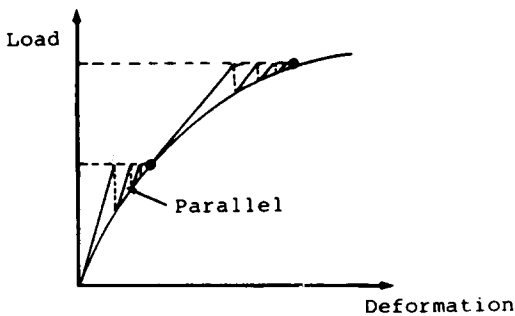
ϵ : 임의의 수렴판정 기준치



(a) Simple Incremental method



(b) Newton-Raphson method



(c) modified Newton-Raphson method

Fig. 1 The scheme of the objective solution technique

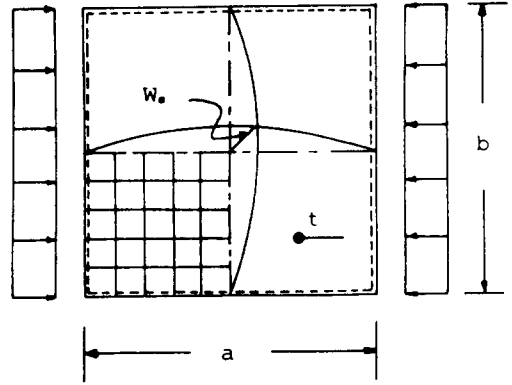


Fig. 2 A simply supported square plate subjected to uniaxial compression and its finite element modellig

4. 수치계산에 및 고찰

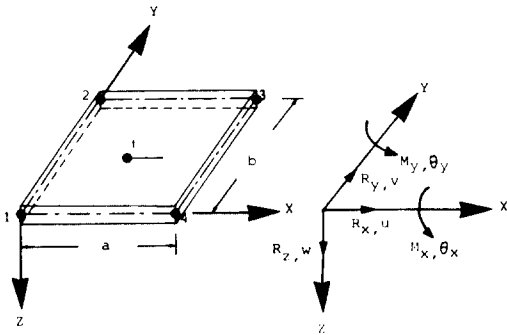
여기서는 2절에서 설명한 해석이론을 바탕으로 계산예를 통하여 각종 수렴기법의 해석정도와 계산시간면에서의 효율성을 검토한다.

본 연구에서는 Fig. 2에 나타내는바와 같이 초기치짐($W_0/t = 0.1$)을 가진 주변단순지지(주변은 변형후에도 직선을 유지)의 정사각형판($a \times b = 500 \times 500\text{mm}$)이 압축력을 받는 경우의 탄소성 대변형 거동을 해석하였다. 유한요소 모델링은 변형거동상의 대칭성을 고려하여 1/4만을 대상으로 하였으며, 요소수는 5×5 를 채용하였다. 또한, 탄소성거동은 소성절점법을 적용하여 해석하게 되므로 판두께방향의 층요소 분할은 행하지 않았고, 절점은 판두께 방향의 중앙위치에 설정하였다. 경계조건은 Fig. 3에 상세히 나타내고 있다.

(1) 얇은 판의 탄소성대변형해석

Fig. 4에는 각각 $b/t\sqrt{\sigma_0/E} = 3.0$ (σ_0 : 항복응력, E : 탄성계수, t : 판두께)의 판에 대한 해석결과를 나타내고 있다.

Fig. 4.a에는 3종류의 수렴기법을 적용하여 해석한 하중-치짐관계를 나타내고 있다. 본 해석에서는 하중증분량을 $\Delta\sigma/\sigma_0 = 0.013$, 수렴판정기준 $\epsilon = 0.022\%$ 를 채용하였다. 이 경우의 판은 판



| | Node Number | Boundary Condition |
|----------------|------------------------------|----------------------------|
| Loaded Edges | 1 | $w=\theta_x=\theta_y=0$ |
| | 2 | $w=\theta_x=0$ |
| | 3 | $w=\theta_y=0$ |
| | 4 | $w=\theta_x=0$ |
| | 5 | $w=\theta_x=0$ |
| | 6 | $w=\theta_x=0, v=0$ |
| Unloaded Edges | 7 | $w=\theta_y=0, v=v_1$ |
| | 13 | $w=\theta_y=0, v=v_1$ |
| | 19 | $w=\theta_y=0, v=v_1$ |
| | 25 | $w=\theta_y=0, v=v_1$ |
| | 31 | $w=\theta_y=0, v=v_1, u=0$ |
| Symmetric Part | 12 | $v=\theta_x=0$ |
| | 18 | $v=\theta_x=0$ |
| | 24 | $v=\theta_x=0$ |
| | 30 | $v=\theta_x=0$ |
| | 32 | $u=\theta_x=0$ |
| | 33 | $u=\theta_y=0$ |
| | 34 | $u=\theta_y=0$ |
| | 35 | $u=\theta_y=0$ |
| 36 | $u=\theta_y=0, v=\theta_x=0$ | |

* suffix denotes the node number

Fig. 3 Node number and boundary condition of finite element

두께가 얇기 때문에 외하중의 증가와 함께 탄성 상태에서 대처짐이 발생하며, 이후에도 외하중의 증가에 대해 더욱 견디다가 소성화의 전전과 함께 면내강성이 급격히 저하하여 최종강도에 도달하였다. Fig. 4. a로부터 NR 법이나 mNR 법

에 의한 해석정도는 거의 비슷하나, SI법에 의한 최종강도 해석결과는 불평형력을 무시하였기 때문에 다른 방법에 비해 최종강도를 약간 과대 평가하고 있다. 그러나, 본 연구에서는 2 절에서 설명한 바와 같이 소성거동은 탄성절점을 매 하중증분단계마다 한개씩 소성화시키는 방법으로 다루었기 때문에 SI법의 적용에도 불구하고 비교적 높은 정도의 해석결과가 얻어졌다고 생각된다. 그러나, 판두께가 얇은 판의 경우는 기하학적 비선형성이 심각하여 큰 불평형력이 생길 가능성이 있으므로 보다 높은 정도의 해석결과를 얻기 위하여는 NR법 또는 mNR법에 의한 반복계산을 수행하여 불평형력을 소거시킬 필요가 있다. 한편, 본 연구에서의 NR법 또는 mNR법에 의한 해석결과는 일반적인 유한요소 해석결과와 비교하여 충분히 높은 정도를 가지고 있다는 것을 확인한 바 있다.

또한, Fig. 4. b에는 3종류의 수렴기법에 대한 반복계산회수를 비교하고 있다. 이 그림으로부터 알 수 있는 바와 같이 mNR법은 NR법에 비해 많은 반복계산회수를 필요로 하며, 특히 대처짐이 발생한 후에 큰 불평형력이 생겼을 때에는 보다 많은 반복계산회수가 필요하다. 그러나, 소성화의 진전과 함께 탄성절점을 매 하중증분단계마다 한개씩 소성화시키기 위해 조절하는 하중배율계수가 작아지면 하중증분량이 매우 미소하므로 NR 법과 mNR법은 비슷한 수준의 반복계산회수를 필요로 한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 4. c에는 3종류의 수렴기법을 적용한 경우의 계산시간을 비교하고 있다. 본 연구에서는 IBM PC/AT 표준형을 사용하여 계산을 수행하였으며, Fig. 4. c로부터 NR법은 mNR법에 비해 약 2배의 계산시간을 필요로 한다는 것을 알 수 있다.

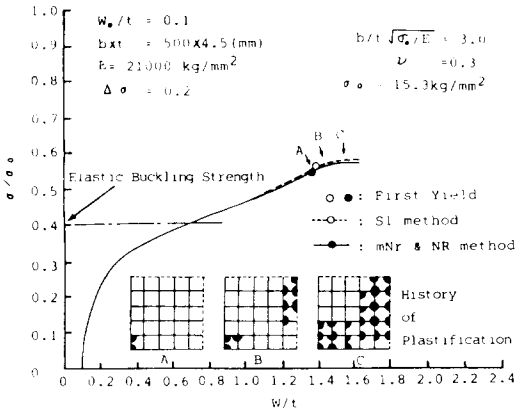


Fig. 4. a The load – central deflection curve of a simply supported square plate subjected to uniaxial compression (unloaded edges remain straight)

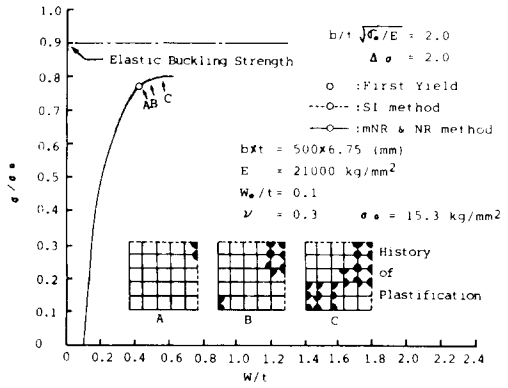


Fig. 5. a The load – central deflection curve of a simply supported square plate subjected to uniaxial compression (unloaded edges remain straight)

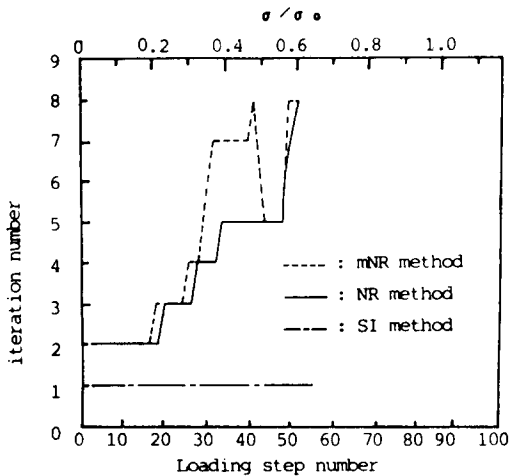


Fig. 4. b Comparison of the iteration number at each loading step

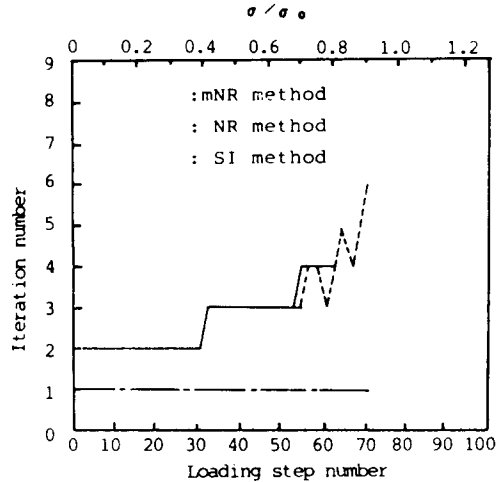


Fig. 5. b Comparison of the iteration number at each loading step

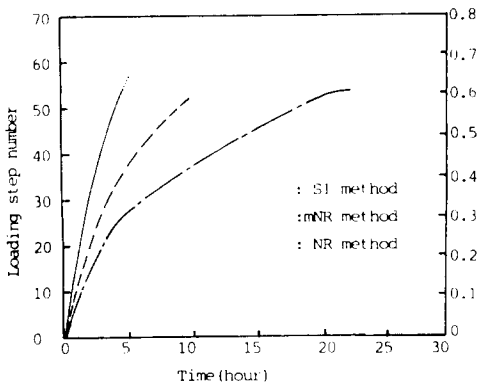


Fig. 4. c Comparison of the computing time by IBM PC / AT computer

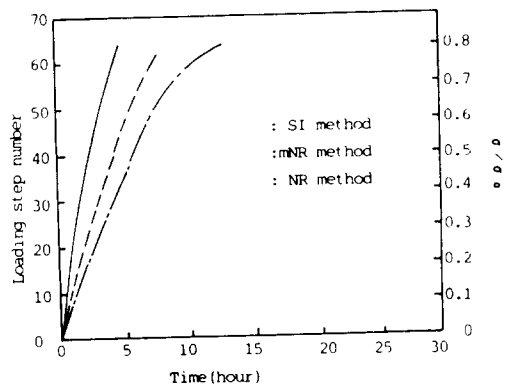


Fig. 5. c Comparison of the computing time by IBM PC / AT Computer

(2) 두꺼운 판의 탄소성대변형 해석

다음으로, Fig. 5.a에는 두꺼운 판($b/t \sqrt{\sigma_o/E} \sqrt{\sigma_o/E} = 2.0$)의 경우에 대한 하중-처짐관계를 나타내고 있다. 본 해석에서도 하중증분량은 $\Delta \sigma/\sigma_o = 0.013$, 수렴판정기준 $\epsilon = 0.022\%$ 를 채용하였다. 이 경우의 판은 판두께가 두껍기 때문에 완전탄성 범위내에서는 대처짐이 생기지 않고 불평형력도 미소하므로, 불평형력을 무시하여 계산한 SI법의 결과는 NR법이나 mNR법에 의한 결과와 거의 일치하고 있다. 또한, Fig.5.b 및 Fig. 5.c에는 각각 반복계산회수 및 계산시간을 비교하고 있다. 이들 결과는 전반적으로 Fig.4.b 및 Fig.4.c에 나타난 결과와 동일하다는 것을 알 수 있으며, 특히 본 해석에서와 같이 두꺼운 판의 경우는 하중의 증가와 함께 최종강도에 도달하기까지 급격한 처짐변형이 일어나지 않고 불평형력도 거의 무시할 수 있으므로 SI법을 적용하는 것이 훨씬 효율적이라고 생각된다.

(3) 수렴판정기준치의 영향

다음으로, 수렴판정 기준치가 해석결과 및 계산 효율성에 미치는 영향을 파악하기 위하여 mNR법을 적용하는 경우에 ϵ 을 변화시켜 해석한 최종강도 결과 및 최종강도에 도달하기까지 소요된 계산시간을 Table. 1에 비교하고 있다. 본 해석에서는 기하학적 비선형성이 강한 얇은 판(Fig. 4의 예)을 대상으로 하였으며, 하중증분량은 $\Delta \sigma/\sigma_o = 0.013$ 을 채용하였다. Table. 1로부터 알 수 있는 바와 같이 본 해석에서 대상으로 하고있는 얇은 판의 경우에도 수렴판정기준 $\epsilon = 10\%$ 정도 까지는 최종강도에 거의 영향을 미치지

않으며, 계산시간은 $\epsilon = 0.022\%$ 인 경우에 비해 $\epsilon = 10\%$ 의 경우가 약 60% 정도이므로 실제계산에서는 $\epsilon = 10\%$ 정도를 채용하는 것이 합리적이라 생각된다.

5. 결론

본 연구에서는 탄소성대변형 유한요소 해석과정에서 발생하는 불평형력의 소거를 위하여 적용되고 있는 대표적인 3종류의 수렴기법에 대한 효율성을 비교·검토하였다. 이들 결과로부터 판두께가 얇은 판의 경우는 최종강도에 도달하기 전에 대처짐이 발생하고 매 하중증분단계마다 큰 불평형력이 발생하게 되므로 높은 정도의 해석결과를 얻기 위하여는 불평형력의 소거를 위한 반복계산을 수행하여야 하며, 이때에는 NR법에 비해 mNR법이 계산시간면에서 훨씬 유리하다는 것을 확인하였다. 또한, 큰 초기처짐이 존재하거나 판두께가 두꺼운 판의 경우는 최종강도에 도달하기 전에 대처짐이 발생하지 않으며 불평형력도 미소하여 거의 무시할 수 있기 때문에 SI법을 적용하는 것이 효율적이라 생각된다. 한편, 본 연구에서 설정한 수렴판정 기준치는 일반적인 판의 탄소성대변형 해석문제에서는 약 10% 정도의 크기를 채용하면 충분한 정도의 해석결과를 얻을 수 있다고 생각된다.

참 고 문 헌

1. J. K. Paik, and C. Y. Kim, A Simplified Finite Element Method for the Ultimate Strength Analysis of Plates with Initial Imperfections, J. of the Society of Naval Architects of Korea, Vol. 26, No. 1, 1989.
2. Y. Ueda, and T. Yado, The Plastic Node Method : A New Method of Plastic Analysis, J. of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineers, Vol. 34, No. 1-3, 1982.
3. K. J. Bathe, and A. P. Cimento, Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 22, 1980.

(접수일자 : 1989. 7. 25)

Table. 1 Influence of the convergence tolerance on the ultimate strength and computing time by IBM PC/AT computer

| $\epsilon(\%)$ | σ_u/σ_o | CPU(min) |
|----------------|---------------------|----------|
| 0.022 | 0.5738 | 607 |
| 0.111 | 0.5738 | 522 |
| 1.111 | 0.5742 | 417 |
| 10.0 | 0.5748 | 370 |