

벨로우즈 문제 해석을 위한 수정 에너지 이론

A Study on the Modified Energy Theory for the Bellows Problem

이 완 익,* 김 태 완**
Wan Ik Lee, Tae Wan Kim

ABSTRACT

In this paper, the bellows problem under axial load were investigated. A modified energy theory, which has the improved strain energy and stress description taken from governing equation of general shells of revolution, were proposed. From the analysis, the results obtained from the modified theory were more accurate and in stable state with varying geometric parameter of bellows than those of other theory.

기 호 설 명

<p>a : 벨로우즈(Bellows)의 기본형인 토로이달 셸(Toroidal shell)의 반지름</p> <p>r_1 : 벨로우즈의 외측 토로이달 셸(outer torus)이 시작하는 지름까지의 반지름</p> <p>r_2 : 벨로우즈의 내측 토로이달 셸(inner shell)이 시작되는 점까지의 반지름</p> <p>t : 셸의 두께</p> <p>pl : 원형평판의 길이, $r_1 - r_2$</p> <p>N_ϕ, N_θ : 합응력(stress resultant)</p> <p>M_ϕ, M_θ : 합 모우멘트(moment resultant)</p> <p>$\epsilon_\phi, \epsilon_\theta$: 변형률(strain) 성분</p>	<p>$\kappa_\phi, \kappa_\theta$: 곡률(curvature) 성분</p> <p>u, w, \bar{u}, \bar{w} : 변위(displacement) 성분</p> <p>β : 회전변위</p> <p>ν : 포아송비</p> <p>E : 탄성계수</p> <p>C : 강성계수, $Et/(1-\nu^2)$</p> <p>D : 굽힘강성계수, $12Et^3/(1-\nu^2)$</p> <p>V : 셸 표면의 수직력</p> <p>H : 셸 표면의 수평력</p> <p>Q : 셸 표면의 전단력</p> <p>p : 압력</p> <p>P_V : 압력의 수직성분</p> <p>P_H : 압력의 수평성분</p> <p>π_p : 포텐셜(potential)에너지</p> <p>W_{exp} : 외력에 의한 일(external work)</p> <p>U_m : 막 변형 에너지(membrane strain)</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

* 정회원, 한양대학교 공과대학 기계설계학과

** 정회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

- energy)
- U_b : 굽힘 변형 에너지 (bending strain energy)
- \bar{p} : 무차원화된 압력 (dimensionless pressure), $3(1-\nu^2) a^3 p/E t^3$
- F : 외력 (external force)
- \bar{F} : 무차원화된 외력 (dimensionless force), $F a/4 \pi D$
- μ : 무차원 변수 (dimensionless parameter), $3(1-\nu^2) a^4/r^2 t^2$
- μ^* : 계수 (coefficients), $a^2 t^2/12(1-\nu^2) D^2$
- ν^* : 계수 (coefficients), $\nu \mu^*$

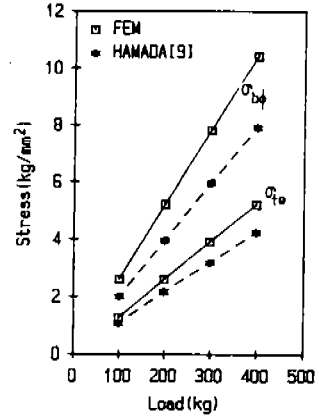


Fig. 2 A validity of Hamada's solution ($\lambda = 0.14$, $a = 30$ mm, $r_1 = 250$ mm)

1. 서 론

발전소, 화학 플랜트, 항공기, 자동차 등에 많이 사용되고 있는 배기, 배관 계통의 변형이나 파손을 방지하기 위하여 신축이음(expansion joint)이 널리 사용되고 있다. 이러한 신축이음중 파형(convolution)을 용접하지 않고, 원통셸(cylindrical shell)을 일체로 성형하여 제작한 Flexible 셸 종류를 벨로우즈(bellows)로 구분한다. 최근 산업이 발달함에 따라 벨로우즈는 신축이음의 용도 뿐만 아니라 제어 계측용 방진, 소음 감소의 용도로 널리 사용되고 있다. 이에 따라 다양한 규격과 용도의 벨로우즈가 제작 사용되고 있으며, 기존의 해석 이론 및 설계식의 적용범위, 신뢰성 검토에 대한 요구가 증가되고 있다. Fig. 1은 상용 벨로우즈의 형상을 표시한 것이다.

벨로우즈 문제는 Fig. 1에 표시한 것과 같이 벨로우즈의 기본 형태인 토로이달 셸의 해석을 기초로 한다. 토로이달 셸은 2개의 곡울을 가진 회전체셸(shells of revolution)의 일종으로서, 엄밀해를 구할 수 없는 것으로

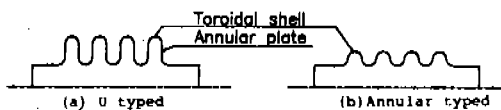


Fig. 1 A configuration of bellows

알려져 있다.¹⁾ 벨로우즈에 대한 해석 이론은 셸의 지배방정식을 급수 전개법이나, 점근법(asymptotic solution)으로 근사하여 토로이달 셸의 해를 구하는 이론과 에너지 이론을 이용하는 방법이 보고되고 있다.

Hamada²⁾, Clark³⁾, Calladine⁴⁾은 토로이달 셸의 지배방정식을 급수 전개법과 점근법을 이용하여 구하고, 벨로우즈에 적용하는 이론을 제시하였다. 이들이 제시한 이론은 비교적 정확한 해를 구할 수 있는 장점은 있으나, Fig. 2에 표시한 것과 같이 벨로우즈에 작용하는 하중과 기하학적 형상이 변화함에 따라 해석의 신뢰성이 떨어지는 문제점이 발생한다. 이러한 현상은 셸의 지배방정식을 근사하는 과정에서 벨로우즈의 기하학적 변수가 해석의 안정상태에 영향을 미치기 때문이다. 이러한 문제점을 개선하기 위해서는 셸의 지배방정식을 직접 처리하지 않는 에너지 이론을 적용하는 것이 유리하다.

1953년, Dahl⁵⁾은 에너지 이론을 이용하여 벨로우즈에 발생하는 변위-하중의 관계를 구하는 이론을 제시하였다. Dahl의 해석이론은 Ω 형 벨로우즈에만 적용할 수 있었으나, 지배방정식을 직접 처리하지 않고 해를 구할 수 있는 기초 이론을 제시하였다. 1960년, Chipman⁶⁾은 Castigliano의 정리를 이용한 간편식으로 벨로우즈에 발생하는 응력과 변형량을 구한 바 있다.

1962년, Laupa⁷⁾는 Dahl의 해석을 기초로 하여 U형 및 원형 벨로우즈의 해를 구하였다. Laupa의 해석이론은 Dahl의 해석이론에 비하여 적용범위가 넓고, 해석의 정확도로 개선되었다. 그러나, 해석과정에서 자오선 방향의 변위 및 응력을 기술할 수 없었기 때문에 이에 대한 영향을 고려하지 못하였고, 원형 평판 부분에 원통셸 이론을 적용하였기 때문에 급수 전개법이나 점근법에 비하여 해석의 실질성과 정확도가 떨어지는 문제점이 나타났다.

일반적으로 벨로우즈의 해석에 에너지 이론을 적용하면, 벨로우즈의 기하학적 변화에 따른 해석결과의 안정상태를 광범하게 유지할 수 있으나, 급수 전개방식에 의한 해석이론에 비하여 정확도와 실질성이 부족한 문제점을 가지고 있다.

본 연구에서는 기존의 급수 전개법 및 점근법, 에너지 이론이 가지고 있는 문제점을 개선하고 다양한 설계 욕구를 수용하기 위하여, 에너지 이론에 셸의 지배방정식을 도입하는 수정 에너지 이론을 제시하였다. 본 연구에서 제안한 수정 이론은, 에너지 이론을 기본 해법으로 하고, 자오선 방향의 응력을 Resissner의 지배방정식을 이용하여 정식화하여 해석의 정확도를 개선하였고, 원형 평판에 대변형 (large deformation) 이론을 적용하여 해석의 실질성을 개선하였다. 또한, 해석결과의 정확도와 안정상태의 범위를 검토하기 위하여 유한요소법을 이용한 수치 해석법을 개발하였으며, 이를 통하여 벨로우즈 해석에 요구되는 제반 특성과 가정사항의 타당성을 입증하였다.

2. 이론해석

2.1 셸의 변형이론

Fig.1에 표시한 것과 같이 벨로우즈는 기본 형상이 토로이달 셸로 구성되어 있으므로, 변형 에너지를 구하기 위하여 셸의 변형 이론을 도입하여야 한다. Fig.3은 셸 표면에 발생하는 변위와 합응력(stress resultants) 및 합모우멘트(moment resultants)를 표시한 것

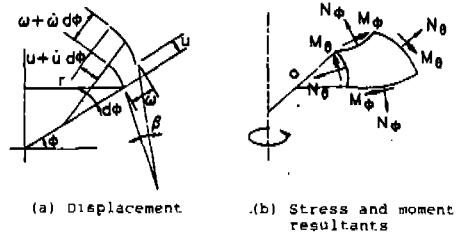


Fig. 3 Displacement & stress resultants occurring on the shell

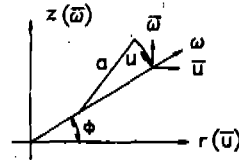


Fig. 4 Transformed displacement

이다. u, w 는 셸의 표면에 대한 접선 및 법선 방향의 변위이고, β 는 변위에 의한 회전 변위이다. Fig.3으로부터 β 는 (1)식으로 표시된다.

$$\beta = \frac{1}{a}(w' - v) \quad (1)$$

(1)식을 이용하여 셸 표면에 발생하는 곡률 반경의 변화량과 합모우멘트는 (2), (3), (4), (5) 식으로 표시된다.

$$\kappa_\phi = \beta' / a \quad (2)$$

$$\kappa_\theta = -\beta \sin \phi / r \quad (3)$$

$$M_\phi = D(\kappa_\phi + \nu \kappa_\theta) \quad (4)$$

$$M_\theta = D(\kappa_\theta + \nu \kappa_\phi) \quad (5)$$

변위 u, w 를 Fig.4와 같은 직교 방향의 변위 성분 \bar{u}, \bar{w} 로 변환시키면 \bar{u}, \bar{w} 는 β 를 이용하여 (6), (7)식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \bar{w} &= a \int_0^\phi \beta \sin \phi \, d\phi \\ &= a y \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= a(\bar{w}_1 - \int_0^{\pi/2} \beta \cos \phi \, d\phi) \\ &= a x \end{aligned} \quad (7)$$

(6), (7)식으로부터 막변형을 $\epsilon_\phi, \epsilon_\theta$ 와 합응력은 (8)~(11)식으로 표시된다.

$$\epsilon_\theta = \frac{\bar{u}}{r} \quad (8)$$

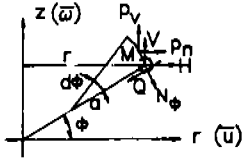


Fig. 5 Equilibrium condition

$$\epsilon_\phi = \bar{w}' \cos \phi / a - \bar{u} \sin \phi / a \quad (9)$$

$$N_\phi = C(\epsilon_\phi + \nu \epsilon_\theta) \quad (10)$$

$$N_\theta = C(\epsilon_\theta + \nu \epsilon_\phi) \quad (11)$$

셸에 발생하는 합응력과 합모우멘트를 \bar{u} , \bar{w} 방향의 합수직력 (resultant vertical force) V , 합수평력 (resultant horizontal force) H 로 표시하면 Fig. 5로부터 평형방정식 (equilibrium equation)은 (12), (13), (14)식으로 표시되며, 자오선 방향의 합응력 (meridional membrane stress resultant)은 (15)식으로 표시된다.¹³⁾

$$(rV)' + a P_V = 0 \quad (12)$$

$$(rH)' - a N_\theta + a r P_H = 0 \quad (13)$$

$$(rM_\phi)' - M_\theta \cos \phi + r a (H \sin \phi - V \cos \phi) = 0 \quad (14)$$

$$N_\phi = -H \sin \phi + V \cos \phi \quad (15)$$

여기서 P_V , P_H 는 셸 표면에 작용하는 수직 방향 및 수평방향의 압력이다.

2.2 변형 에너지 (strain energy)

벨로우즈의 변형상태를 축대칭으로 가정하면 벨로우즈의 기본해석 형상은 Fig. 6과 같이 고려할 수 있다. 셸의 변형 에너지를 구하기 위하여 Fig. 7과 같이 벨로우즈의 외측 토로이달 셸 (outer torus)과 내측 토로이달 셸 (inner torus)의 끝단에 외력 V_1, H_1, M_1 및

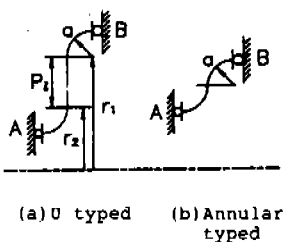


Fig. 6 A simplified model for the analysis

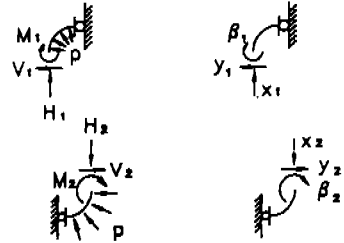


Fig. 7 Edge load and displacement

V_2, H_2, M_2 와 가상 변위 (virtual displacement) β_1, x_1, y_1 및 β_2, x_2, y_2 를 고려하면, 토로이달 셸의 변형 에너지는 (16), (17)식으로 표시된다.

$$dU_b = \frac{1}{2} (M_\phi \kappa_\phi + M_\theta \kappa_\theta) a r d\theta d\phi \quad (16)$$

$$dU_m = \frac{1}{2} (N_\phi \epsilon_\phi + N_\theta \epsilon_\theta) a r d\theta d\phi \quad (17)$$

여기서, U_b 는 굽힘 변형 에너지 (bending strain energy), U_m 는 막변형 에너지 (membrane strain energy)이다. 벨로우즈의 변형상태를 축대칭으로 고려하면, $rd_\theta = 1$ 로 둘 수 있다. 변형 에너지를 구하기 위하여 회전 변위는 (18)식과 같이 삼각 함수의 급수 형태로 가정하면,⁵⁾⁷⁾ Fig. 6 으로부터 β 는 (19)식의 경계조건을 만족하여야 한다. (18), (19)식으로부터 β 는 (20)식으로 표시되며, (21)식의 제한 조건을 만족한다.

$$\beta = C_0 \sin \phi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin (2n\phi) \quad (18)$$

$$\text{at } \phi = \pi/2, \beta = \beta_1, y = y_1 \quad (19)$$

$$\beta = \beta_1 \sin \phi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin (2n\phi) \quad (20)$$

$$\frac{y_1}{2} = \frac{\pi}{8} \beta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \quad (21)$$

(20)식을 (2)~(11)식에 대입하면, 토로이달 셸의 변형 에너지를 구할 수 있다. 그러나, (6), (7)을 (9)식에 대입하면, $\epsilon_\phi = 0$ 의 관계를 얻게 되어 자오선 방향의 변형 에너지를 기술할 수 없으며, 기존의 에너지 이론에서는 이를 생략하였다.⁵⁾⁷⁾ 자오선 방향의 합응력에 의한 변형 에너지를 구하기 위하여, (17)식의 첫번째 항을 (22)식으로 근사하고, (23)식의 경계조건을 이용하여 (12), (13)식에서 V, H 를 구하면, (15)식

으로부터 자오선 방향의 막응력을 구할 수 있으며, 원주 방향의 막응력(circumferential membrane stress) N_θ 는 (24)식으로 수정된다.

$$N_\theta \epsilon_\theta \approx Et(N_\theta^2 - \nu C \epsilon_\theta N_\theta) \quad (22)$$

$$at, \phi = \pi/2, H = H_1, V = V_1 \quad (23)$$

$$N_\theta^m = N_\theta(1 - \nu^2) + \nu N_\phi \quad (24)$$

외력에 의한 일(work)은 (25)식으로 표시되며, 토로이달 셸의 전 포텐셜 에너지(total potential energy)는 (26)식으로 표시된다. (26)식은 계수 C_n 에 대하여 (27)식을 만족하여야 하며, (26)식으로부터 계수-변위 관계는 (28)식으로 표시된다.

$$W_{exp} = -M\beta_1 - aH_1 x_1 - aV_1 y_1 \quad (25)$$

$$\pi_p = U_b + U_m + W_{exp}$$

$$= \frac{D}{2a} \int_0^{\pi/2} \{ (\beta')^2 - 2\nu \frac{a}{r} \beta' \beta \sin \phi +$$

$$\left(\frac{a}{r} \beta \sin \phi \right)^2 + (u^* N_\theta^2 - \nu^* N_\theta N_\phi)$$

$$+ 4\mu x^2 - 8\bar{p}(x \cos \phi + y \sin \phi) d\phi - M_1 \beta_1 - aH_1 x_1 - aV_1 y_1 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial c_n} = 0 \quad (27)$$

$$\{c_n\} = [A]\{\delta_1\} + [R]\{A_1\} \quad (28)$$

여기서, $\{\delta_1\} = \{\beta_1 \ x_1 \ y_1\}^T$, $\{A_1\} = \{pH_1 V_1\}^T$ 이다.

(28)식을 (20)식에 대입하고, 포텐셜 에너지를 β_1, x_1, y_1 에 대하여 미분하고 적분하면, 변위-하중 관계식은 (29)식으로 표시된다.

$$\frac{a^2}{D} \begin{pmatrix} M_1 \\ H_1 + 4D\bar{p}/a^2 \end{pmatrix} = [B_1]\{\delta_1\} + [S_1]\{A_1\} \quad (29)$$

여기서, $\{\delta_1\} = \{\beta_1 \ x_1 \ y_1\}^T$, $\{A_1\} = \{pH_1 V_1\}$ 이다.

이상과 같은 과정을 내측 토로이달 셸에 반복하면, 내측 토로이달 셸의 변위-하중 관계식은 (30)식으로 표시된다.

$$\frac{a^2}{D} \begin{pmatrix} M_2/a \\ H_2 - 4D\bar{p}/a^2 \\ V_2 \end{pmatrix} = [B_2]\{\delta_2\} + [S_2]\{A_2\} \quad (30)$$

여기서, $\{\delta_2\} = \{\beta_2 \ x_2 \ y_2\}^T$, $\{A_2\} = \{pH_2 V_2\}^T$ 이다.

2.3 원형 평판의 대변형 이론 (large deformation of annular plate)

U형 벨로우즈의 외측 토로이달 셸의 내측 토로이달 셸에는 원형 평판이 접속되어 있다. 원형 평판에 대한 선형 이론(linear theory)으로는 자오선 방향의 합응력을 기술할 수 없으므로 대변형(large deformation) 이론을 적용하였다. Fig. 8은 원형 평판에 발생하는 합응력과 합모우멘트를 표시한 것이다. 원형 평판의 반지름 방향(radial direction)의 지배방정식은 (31)식과 같이 표시된다. (31)식에서 고차항을 무시하면 (32)식으로 근사할 수 있고, (32)식의 해는 (33)식으로 표시된다.

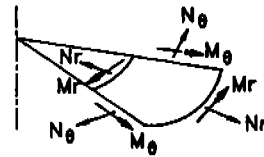


Fig. 8 Stress resultants occurring on the annular plate

$$\frac{d^2 u_p}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{du_p}{dr} + \frac{u_p}{r^2} - \frac{(1-\nu)}{2r} \left(\frac{dw_p}{dr} \right)^2 - \frac{du_p}{dr} \left(\frac{d^2 w_p}{dr^2} \right) \quad (31)$$

$$\approx -\frac{1}{r} \frac{du_p}{dr} + \frac{u_p}{r^2} \quad (32)$$

$$u_p = \frac{A_0}{r} + B_0 r \quad (33)$$

(33)식으로부터 원형 평판에 발생하는 반지름 방향의 합응력은 (34), (35)식으로 표시된다.

$$N_r = C \left(\frac{du_p}{dr} + \nu \frac{u_p}{r} \right) \quad (34)$$

$$N_\theta = C \left(\frac{u_p}{r} + \nu \frac{du_p}{dr} \right) \quad (35)$$

압력이 작용하는 원형 평판의 처짐 방정식의 엄밀해는 (36)식으로 주어지고, 합모우멘트와 전단력은 (37), (38), (39)식으로 표시된다.

$$w_p = e_1 + e_2 r^2 \ln(r) + e_3 \ln(r) + e_4 r^2 + \frac{pr^4}{64D} \quad (36)$$

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w_p}{r \partial r} \right) \quad (37)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w_p}{\partial r^2} \right) \quad (38)$$

$$Q_r = -D \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_p}{\partial r} \right) \right) \right) \quad (39)$$

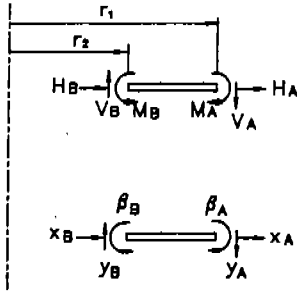


Fig. 9 Edge load and displacement on the annular plate

원형 평판의 해를 Fig. 9에 표시한 외력과 변위로 표시하면, (40)식의 경계조건으로부터 원형 평판의 변위-하중 관계식은 (41)식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} N_r |_{r=r_1} &= H_A & N_r |_{r=r_2} &= H_B \\ M_r |_{r=r_1} &= M_A & M_r |_{r=r_2} &= M_B \\ Q_r |_{r=r_1} &= V_A & Q_r |_{r=r_2} &= V_B \\ w_p' |_{r=r_1} &= \beta_A & w_p' |_{r=r_2} &= \beta_B \\ u_p |_{r=r_1} &= ax_A & u_p |_{r=r_2} &= ax_B \\ w_p |_{r=r_1} &= ay_A & w_p |_{r=r_2} &= ay_B \end{aligned} \quad (40)$$

$$\frac{a^2}{D} \begin{bmatrix} M_A/a \\ H_A \\ V_A \\ M_B/a \\ H_B \\ V_B \end{bmatrix} - [G_f] \{F^*\} = [G] \{\delta_p\} \quad (41)$$

단, [G]행렬은 부록에 수록하였으며, $\{\delta_p\} = \{\beta_A \ x_A \ y_A \ \beta_B \ x_B \ y_B\}^T$, $\{F^*\} = \{\bar{P} \ \bar{F}\}^T$ 이다.

2.4 해 법

2.2절과 2.3절에서 구한 토로이달 셸과 원형 평판의 변위-하중 관계식은 (42)식의 접속

조건(contiunity condition)을 만족해야 하며, 원형 벨로우즈는 (43)식의 접속조건을 만족한다.

(i) U Tyled Bellows

$$\begin{aligned} M_1 &= -M_A & \beta_1 &= \beta_A \\ H_1 &= -H_A & x_1 &= x_A \\ V_1 &= V_A \\ M_2 &= M_B & \beta_2 &= \beta_B \\ H_2 &= M_B & x_2 &= -x_B \\ V_2 &= V_B \end{aligned} \quad (42)$$

(ii) Annular Tyled Bellows

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 & \beta_1 &= \beta_2 \\ H_1 &= H_2 & x_1 &= -x_2 \\ V_1 &= V_2 \end{aligned} \quad (43)$$

(42), (43)식으로부터 U형 및 원형 벨로우즈의 변위-하중 관계식은 (44), (45)식으로 각각 표시된다.

$$[K_u] \{\delta_u\} = \{f_u\} \quad (44)$$

$$[K_a] \{\delta_a\} = \{f_a\} \quad (45)$$

여기서, $\{\delta_u\} = \{\beta_1 \ x_1 \ y_1 \ \beta_2 \ x_2 \ y_2\}^T$, $\{\delta_a\} = \{\beta_1 \ x_1 \ y_1 \ y_2\}^T$ 이며, $[K_a]$, $[K_u]$ 는 각각 원형 벨로우즈(annular typed bellows) 및 U형 벨로우즈의 강성 행렬(stiffness matrix)이다.

2.5 유한 요소법

본 연구에서는 해석의 정확도와 안정상태의 검토, 해석 과정에서 도입한 가정의 타당성을 입증하기 위하여 벨로우즈의 해석에 적합한 유한요소법을 개발하였다. 유한요소법은 해석과정에서 인위적인 가정을 최소화 할 수 있으므로, 이론해석 결과의 안정상태 진단과 벨로우즈의 변형상태를 실제적으로 검토할 수 있는 기준으로서 활용할 수 있다. 본 연구에서는



Fig. 10 An axisymmetric conical element

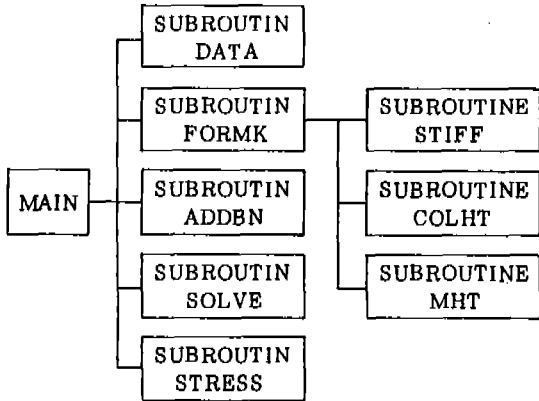


Fig. 11 A brief structure of FEM program

Fig. 10에 표시한 것과 같이 축대칭 요소(ax-symmetric element)를 사용하였으며, 계산과정에서 하나의 파형은 18개의 요소로 분할하였고, 5개의 파형을 가진 벨로우즈를 표준모델로 하였다. Fig. 11은 본 연구에서 개발한 유한요소법의 개략적인 구조를 표시한 것이다.

3. 고찰

벨로우즈의 거동에 가장 중요한 인자는 벨로우즈 파형의 반지름 a 에 대한 회전축으로부터 파형까지의 반지름 r_1 의 비 λ 로 알려져

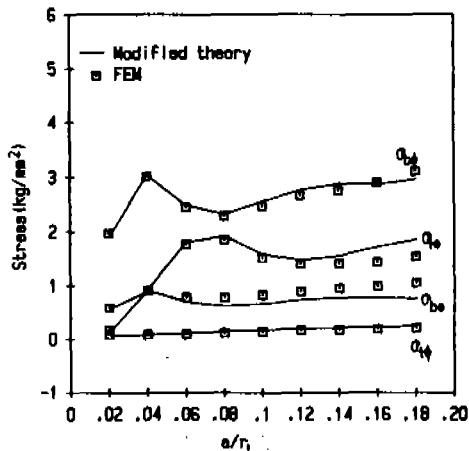


Fig. 12 A variation of max. stresses in annular type bellows with varying a/r_1 . ($r_1 = 200$ mm, $t = 1$ mm, load = 100 kg)

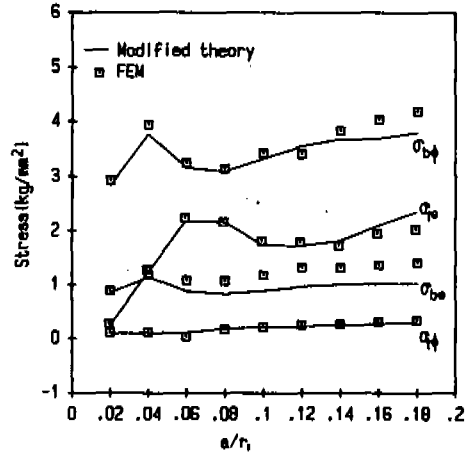


Fig. 13 A variation of max. stresses U type bellows with varying a/r_1 . ($r_1 = 200$ mm, $t = 1$ mm, load = 100 kg, $p_l = 4$ mm)

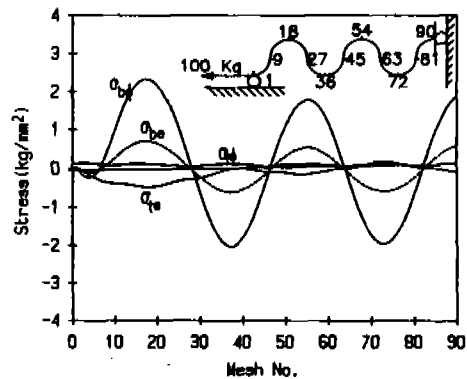


Fig. 14 A Typical stress distribution on the annular type bellows. ($\lambda = 0.04$, load = 100 kg, $t = 1$ mm, $r_1 = 200$ mm)

있다.⁹⁾¹⁰⁾ 본 연구에서는 수정 이론의 정확도, 해석결과의 안정상태 검토 등을 λ 값의 변화를 중심으로 고찰하였다. 실제 계산에서 $E=2100$ kg/mm², $\nu=0.3$ 으로 하였으며, 하중은 축하중(axial load)으로 고려하였다. Table 1은 Hamada의 해석결과⁹⁾와 Fig. 6의 해석모델을 이용한 수정 이론의 해석결과를 표시한 것이며, 유한요소법의 결과는 Fig. 14에 표시한 원형 벨로우즈에서 발생하는 응력값을 표시한 것이다. Table 1에 표시한 것과 같이 세가지 해석방법에 의한 결과가 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 12, Fig. 13은 λ 가 0.04~0.20

Table 1 A typical stress distribution of bellows (annular typed)

stress case angle	Circumferential membrane stress ($\sigma_{t\theta}$)			Meridional membrane stress ($\sigma_{t\phi}$)			Circumferential bending stress ($\sigma_{b\theta}$)			Meridional bending stress ($\sigma_{b\phi}$)		
	F.E.M.	Present	Hamada	F.E.M.	Present	Hamada	F.E.M.	Present	Hamada	F.E.M.	Present	Hamada
	0°	0.021	0.001	-0.004	0.041	0.032	0.013	-0.107	-0.093	-0.10	0.001	0.004
10°	0.046	0.02	0.02	0.06	0.044	0.031	0.089	0.082	0.018	0.632	0.621	0.567
20°	0.129	0.112	0.10	0.075	0.053	0.041	0.266	0.259	0.224	1.183	1.181	1.027
30°	0.258	0.255	0.227	0.085	0.064	0.049	0.42	0.418	0.357	1.641	1.663	1.423
40°	0.413	0.431	0.378	0.09	0.066	0.053	0.547	0.548	0.475	2.005	2.036	1.780
50°	0.576	0.616	0.538	0.089	0.067	0.055	0.647	0.651	0.575	2.276	2.306	2.041
60°	0.726	0.81	0.687	0.084	0.067	0.055	0.719	0.723	0.733	2.465	2.493	2.280
70°	0.848	0.95	0.811	0.076	0.067	0.053	0.767	0.769	0.793	2.587	2.602	2.480
80°	0.926	1.014	0.893	0.067	0.068	0.047	0.794	0.796	0.793	2.645	2.687	2.650
90°	0.956	1.051	0.935	0.066	0.068	0.046	0.799	0.806	0.812	2.661	2.687	2.710

note) $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $t = 1 \text{ mm}$, $a = 10 \text{ mm}$, $r_1 = 250 \text{ mm}$
 Axial load = 100 kg

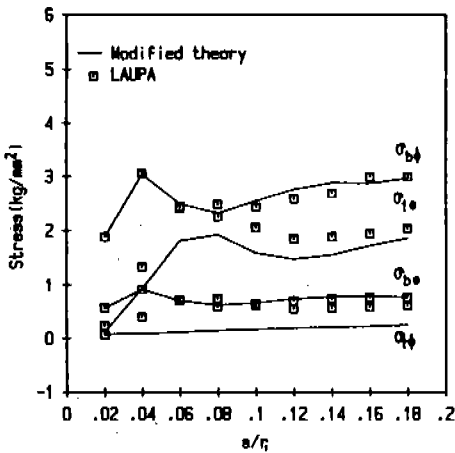


Fig. 15 A comparison between modified theory and Laupa's for the annular typed bellows with varying a/r_1 . ($r_1 = 200 \text{ mm}$, $t = 1 \text{ mm}$, load = 100 kg)

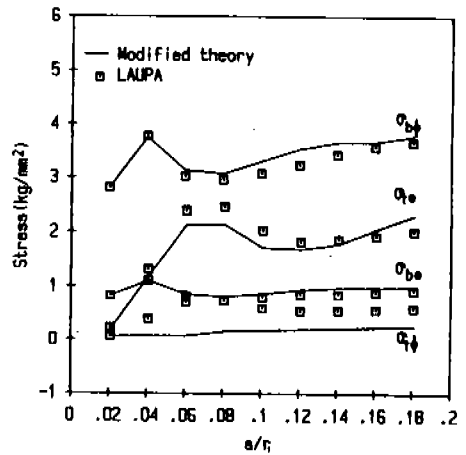


Fig. 16 A comparison between modified theory and Laupa's for the U typed bellows with varying a/r_1 . ($r_1 = 200 \text{ mm}$, $t = 1 \text{ mm}$, load = 100 kg, $p_1 = 4 \text{ mm}$)

의 범위를 가질 때 U형 및 원형 벨로우즈에 발생하는 각 응력 성분의 최대값을 표시한 것이며, Fig. 12, Fig. 13에 표시한 유한 요소법의 결과는 파형이 5개인 U형 및 원형 벨로우즈에서 발생하는 최대값을 택한 것이다. Fig. 12, Fig. 13에 표시한 것과 같이 두 결과

가 일치하고 있다. 다만, U형 벨로우즈의 경우에는 λ 가 0.16 이상인 영역에서 굽힘 응력이 작게 나타나고 있는데, 이것은 원형 평판의 영향으로 인하여 굽힘 응력의 발생 조건이 변화하는 것으로 생각된다. 이상의 결과로부터 본 연구의 해석결과는 정해에 접근하리라

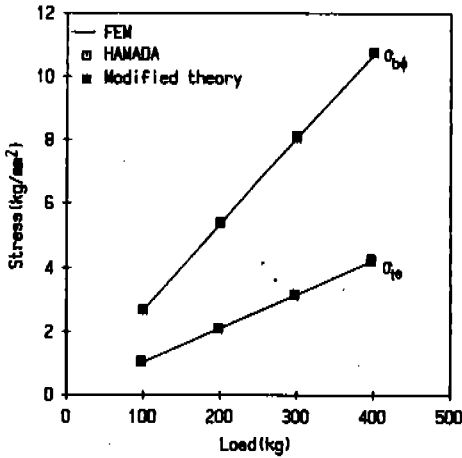


Fig. 17 A comparison of validity ranges of solution with FEM, Laupa's, modified theory. ($\lambda=0.04$, $r_1=250$ mm, $t=1$ mm, annular typed)

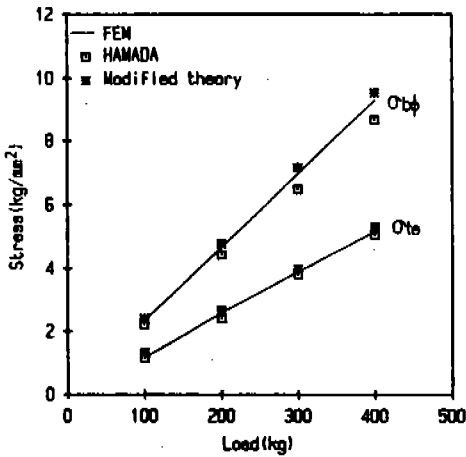


Fig. 18 A comparison of validity ranges of solution with FEM, Laupa's, modified theory. ($\lambda=0.1$, $r_1=250$ mm, $t=1$ mm, annular typed)

되어진다. Fig. 14는 파형이 5개인 원형 벨로우즈에 발생하는 응력을 유한 요소법으로 구하여 표시한 것이다. Fig. 14에 나타난 것과 같이 벨로우즈에 발생하는 응력은 각 파형을 중심으로 하여 대칭적으로 발생하므로, 본 연구에서 가정한 벨로우즈의 변형상태와 이에 따른 해석 형상의 모델링 과정은 타당한 것으로 생각된다. Fig. 15, Fig. 16은 기존의 에너지

이론⁷⁾과 본 연구에서 제시한 수정 이론의 결과를 표시한 것이다. Fig. 15, Fig. 16에 표시한 것과 같이 λ 값이 작은 영역에서는 두 결과가 일치하고 있으나 λ 값이 큰 영역에서는 차이를 보인다. 이것은 λ 값이 작은 영역에서는 자오선 방향의 막응력이 변형 에너지에 미치는 영향이 무시할 정도이지만, λ 값이 큰 영역에서는 그 영향이 커지기 때문인 것으로 이해된다. Fig. 15, Fig. 16의 결과로부터 본 연구에서 제시한 수정 이론은 기존의 에너지 이론의 정확도를 충분히 개선한 것으로 생각된다. 수정 이론의 안정 상태를 검토하기 위하여 λ 값과 하중 변화에 따른 최대 응력의 변화를 검토하였다. Fig. 17~Fig. 19는 λ 값이 각각 0.04, 0.10, 0.14 일때 발생하는 최대굽힘 응력 σ_{bfmax} 와 최대 막응력 σ_{tmax} 의 변화를 표시한 것이다. Fig. 17~Fig. 19에 표시한 것과 같이 λ 값이 작은 영역에서는 수정 이론과 급수 전개법에 의한 이론 및 유한 요소법의 결과가 잘 일치하지만, λ 값이 큰 영역에서는 급수 전개방식으로 구한 해석결과의 신뢰성이 떨어지는 것을 알 수 있다. 그러므로 본 연구에서 제시한 수정 이론은 급수 전개법을 이용한 이론에 비하여 안정되어 있음을 확인할 수 있다. 따라서, 급수 전개방식을 이용한 해석은 λ 값이 비교적 작은 영역에서는 유

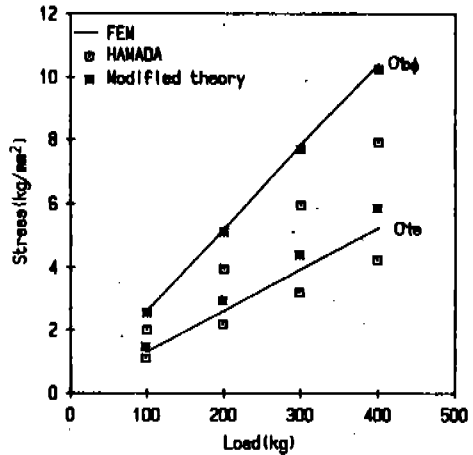


Fig. 19 A comparison of validity ranges of solution with FEM, Laupa's, modified theory. ($\lambda=0.14$, $r_1=250$ mm, $t=1$ mm, annular typed)

효하지만 λ 값이 큰 영역에서는 신뢰성이 낮으므로 본 연구에서 제시한 수정 이론을 이용하는 것이 바람직하다.

해석을 통하여, U형 벨로우즈의 경우에 있어서는 원형 평판과의 접속 부분에서 발생하는 응력이 다소 불연속적으로 나타났다. 이러한 현상은 에너지 이론을 도입하는 문제에서 전형적으로 나타나는 현상으로서, 원형 평판의 변형 이론을 완전한 비선형(nonlinear)으로 기술하면 개선할 수 있을 것으로 생각된다.

4. 결 론

에너지 이론에 쉘의 지배방정식을 도입한 수정 이론을 이용하여 벨로우즈를 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 본 연구에서 제안한 수정 이론은 벨로우즈의 기하학적 변수의 변화에 관계없이 해석의 정확도를 유지하며, 기존의 에너지 이론에 비하여 해석의 정확도가 개선되었다.

2. 본 연구에서 제안한 수정 이론은 기존의 급수 전개방식에 의한 해석 이론에 비하여 해석의 안정상태 및 정확도가 광범하게 유지됨을 알았다.

3. 벨로우즈의 곡률이 큰 경우, 기존의 에너지 이론이나 급수 전개방식에 의한 해석 이론은 해석의 정확도가 떨어지므로 본 연구에서 제시한 수정 이론을 이용하여 해석하는 것이 타당함을 알았다.

참 고 문 헌

- H. Kraus, 'The elastic shells', 1967, John Wiley & Sons.
- 兵田 實, '円環かくの強度に關する研究(解の提案)', 日本機械學會論文集, Vol. 29, 昭 38.
- R.A. Clark, 'Asymptotic solutions of elastic shell problems', Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications, Wiley, 1964.
- C.R. Calladine, 'Flexibility of axially symmetric bellows under axial loading', Int. J. Mech. Sci., Vol.16, 1974.
- C. Dahal, 'Toroidal shell expansion joints', J. of Applied Mech. 1953.
- Chimpman, 'Stress analysis of bellows for the HNPf intermedinate heat exchanger', Atomic reactor technology report NAA-SR-4534, 1960.
- A. Laupa & N.A. Weil, 'Analysis of u-shaped expansion joint', J. of Applied Mech., 1962.
- R.A. Clark, 'An expansion bellows problems', J. of Applied Mech., 1970.
- 兵田 實, '円環かくの強度に關する研究', 日本機械學會論文集, Vol. 29, 昭 38.
- 兵田 實, 'U形 Bellowsの強さ', 日本機械學會論文集, Vol. 31, 昭 40.
- P.H. Nagdi, 'Asymptotic solutions of a class of elastic shells of revolution with variable thickness', Army report, Univ. of Michigan, 1956.
- M. Hamada & S. Takezono, 'Analysis of expansion joints of pressure vessels', Bul. JSME, Vol.13, 1970.
- S. Takezono, 'Stress analysis of expansion joints of pressure vessels under internal pressure', Bul. JSME, Vol.14, 1971.
- O.C. Zienkiewicz, 'The Finite Element Method', McGraw-Hill, 1977.
- 이완익, '유한 요소법을 이용한 Bellows Joint의 응력 해석', 한국자동차공학회지, Vol. 9, No. 4, 1987.

Appendix

elements of $[G_f]$

$$\lambda = a/r_1, \quad q = r_1/r_2$$

$$G_{f11} = \lambda \{q^2(1+\nu) + 1 - \nu\} / (q^2 - 1)$$

$$G_{f14} = -2q\lambda / (q^2 - 1)$$

$$G_{f22} = 4\mu \{q^2(1+\nu) + 1 - \nu\} / (q^2 - 1)(1 - \nu^2)$$

$$G_{f25} = -8q\mu / (q^2 - 1)(1 - \nu^2)$$

$$G_{f41} = 2q^2 \lambda / (q^2 - 1)$$

$$(1 - \nu^2)$$

$$G_{f44} = -q\lambda \{q^2(1 - \nu) + 1 + \nu\} / (q^2 - 1)$$

$$G_{f12} = G_{f13} = G_{f15} = G_{f21} = G_{f23} = G_{f24} =$$

$$G_{f52} = -8q^2 \mu / \lambda (q^2 - 1)(1 - \nu^2)$$

$$G_{f31} = G_{f32} = G_{f33} = G_{f34} = G_{f35} = G_{f42} =$$

$$G_{f55} = 4q\mu \{q^2(1 - \nu) + 1 + \nu\} / \mu (q^2 - 1)$$

$$G_{f43} = G_{f51} = G_{f53} = G_{f54} = 0$$

訂正

* 한국자동차 공학회지의 Vol. 9, No. 4 (1987 발행)에 게재된 “유한 요소법을 이용한 Bel-lows Joint 의 응력 해석” 중의 Table 1 의 “Longitudinal bending stress” title 과 “Me-ridional bending stress” 의 title 이 서로 바뀌었으므로 정정합니다. 또한, 응력방향의 혼선을 피하기 위하여 “Longitudinal ...” 은 Circumferential ...” 로 정정합니다.