

조속식 감속기의 치 강도 및 커터치형 해석

전완주 · 오박균*

한국과학기술연구원 기계공학부

Analysis of Tooth Strength and Cutter Tooth Profile in Harmonic Drive Reducer

Wan Joo Jun and Park Kyoung oh*

Division of Mechanical Eng., KIST

Abstract - This paper deals with strength analysis of tooth and method of manufacture of external tooth profile in harmonic drive. From the calculation of load imposed on the contact teeth, maximum contact stress is investigated to design the addendum modification coefficient. New tooth profile of the external gear is generated according to the law of gearing, assuming that internal gear has involute tooth profile. External tooth profile can't be manufactured by conventional exclusive tools which have pressure angle of 20° . The method to design cutter tooth profile is presented.

1. 서 론

각종 기계 장치의 기계적 구성품은 거의 구동부분이 모터와 감속 장치로 구성되어 있으며 이 부분의 입출력 특성이 시스템의 성능에 큰 영향을 미치게 된다. 더우기 정확한 위치제어가 요구되는 로봇, 자동화 장치에서는 이 부분의 정밀도와 동적특성이 장치의 정도를 결정하기 때문에 토오크 드라이브는 기계적 구성요소 중 가장 중요한 부품으로 취급되고 있다. 매니퓰레이터용 토오크 드라이브는 일반기어 장치에 비해 저 백래쉬, 고 감속비와 소형, 경량화 특성이 요구됨으로 이를 충족시킬 수 있는 내접 유성식 감속기와 조속식 감속기가 주로 사용되고 있다[1].

파동 발생기(wave generator), 플렉스 스플라인(flexspline), 서클라 스플라인(circular spline) 등 3요소로 구성되어 있는 조속식 감속기는 파동발생기의 회전에 따라 플렉스 스플라인이 탄성 변형하면서 서클라 스플라인과 치물림 운동을하는 독특한 기구학적 특성을 갖고 있는 기구이다. 강체의 개념에서 설계되고 제작되어온 기존의 감속기와 달리 탄성체의 개념에서 설계, 제작되는 조속식 감속기의 운동 이론 및 기구학적 해석을 다

룬 논문[2, 3, 4]은 다소 있으나 강도해석 및 가공방법을 다룬 연구는 거의 없다.

본 연구에는 내치차인 서클라 스플라인의 치형을 인볼류트 치형으로 사용하고 기어의 물음법칙과 기구의 운동특성으로 부터 외치차인 플렉스 스플라인의 치형을 구할 수 있음을 보인 참고문헌[4]에 이어서 치 강도 해석 및 커터치형 설계법에 대해서 고찰해본다. 조속식 감속기는 내치차와 외치차는 일부 구간에서 다수의 치가 접촉을 하면서 토오크를 전달하게 된다. 따라서 접촉치들에 하중이 분배하게 되고 분배된 하중으로 부터 치면 접촉응력을 계산하고 치면 접촉응력의 분포로부터 전위계수를 결정할 수 있다. 그리고 플렉스 스플라인의 치형으로는 동기구의 기구학적 독특한 운동으로 말미암아 인볼류트 치형이 아닌 새로운 치형이 창성된다. 따라서 공구 압력각이 20° 인 기존의 공구로는 가공이 불가능하다. 외치차와 물음법칙을 만족하면서 굴음운동하는 커터의 치형을 구하는 방법을 제시한다.

2. 조속식 감속기의 강도 해석

로봇, 자동화 장치등에 널리 사용되는 조속식 감속

기는 기구의 용도가 고하중, 고토오크, 고통량보다는 높은 감속비, 소형, 경량, 정확한 위치 제어가 요구되는 기계장치에 주로 이용되고 있다. 이러한 특성을 최대한 만족하기 위해서 내치차로 많이 연구, 응용되는 조속식 감속기는 내치차 본래의 구조적 특성 때문에 심한 간섭이 어려운 문제로 대두 되게 된다. 이의 해결 방법으로 외치차가 탄성 변형되면서 정점 부근에서만 치접촉을 하게 되고 또한 보통치 보다 작은 저치를 사용한다. 이로 인하여 접촉 길이가 짧아져 불림율이 감소하고 회전 전달특성이 불량해 진다. 이는 다수의 치가 동시에 치접촉을 하여 하중을 분산시켜 해결하고 있다 그러나 조속식 감속기는 고감속에 따른 치면 접촉응력으로 인한 치면 손상 문제가 중요한 고려 사항이 된다. 간섭이 일어나지 않는 범위내에서 최소 허용 접촉응력이 작용하는 전위계수를 계산하였다.

2-1. 분배하중

이미 언급한 바와 같이 내치차와 외치차가 일부구간에서 다수의 치가 동시에 치접촉을 행하고 있으므로 접촉치들에 하중이 분배하게 된다. 이러한 하중 분배상태는 정역학적으로 계산할 수 없기 때문에 부정정이라 하고 다음의 단계로 해석한다. 첫째 힘의 평형방정식을 구하며 둘째 변위간의 관계식을 유도하고 셋째 하중과 변위의 관계식을 유도하여 연립방정식을 계산한다. 실제로는 접촉에 의한 변형이외에도 제작오차, 운동속도, 부하의 종류 등 고려하기 힘든 어려운 요인들도 치의 하중 분배에 영향을 미치게 되나 무시하기로 한다.

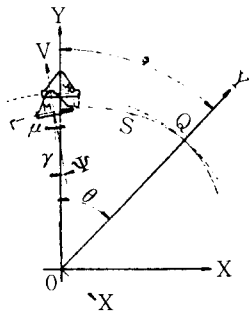


Fig. 1. Relative motion of wave generator, flexspline and circular spline

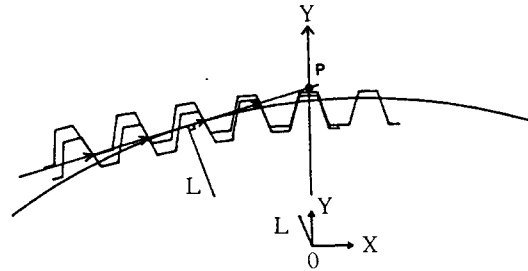


Fig. 2. Reaction load of teeth when $\phi=0$

그림1에서 xy축은 내치차에 고정된 좌표축이고 XY는 파동 발생기에 고정된 좌표축이다. 파동발생기의 회전각 ϕ 가 0일때 두 좌표축은 일치하게 되고 y축상에 장축이 놓이게 된다. 이때 그림2와 같이 내치차와 외치차가 접하게 된다. p는 피치점이고 L은 모멘트 아암이다. 서보 모터에 부하가 걸리면 파동발생기가 회전하게 되고 그림3과 같은 불림 상태가 된다. 이때 접촉점들을 P_1, P_2, \dots 라 하면 다음의 관계를 유도할 수 있다.

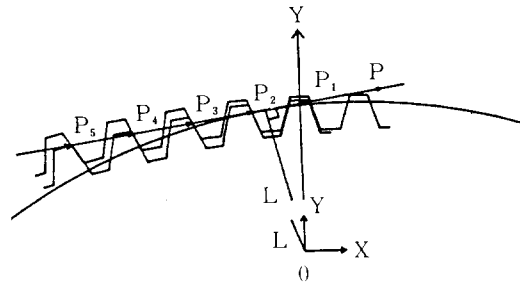


Fig. 3. Reaction load of teeth when $\phi \neq 0$

가) 힘의 평형방정식

내치차인 서클라 스플라인의 치에 작용하는 하중도 치접촉에 의한 수직방향 하중과 마찰에 의한 접선방향 하중이 있다. 그러나 접촉 부위가 유완 상태에 있기 때문에 마찰에 의한 접선방향 하중은 수직방향 하중에 비해 매우 적으므로 무시한다. 그림2와 3에서 접촉점에서 그른 법선은 피치점을 통과하고 기초원에 접해야 하기 때문에 하중의 작용선은 일직선 상에 놓이게 된다. 따라서 다음과 같이 힘의 평형식을 쓸 수 있다.

$$\sum P_i L_i = M = T/2 \tag{1}$$

여기서 M은 180°대칭으로 2곳에서 힘을 전달하기 때문에 출력축 토오르크 T의 절반이 된다.

나) 변위간의 관계식(Geometric Compatibility)

내치차인 서클라 스플라인이 $\delta\theta$ 만큼 회전하였다 고 가정하면 각치와의 접촉점에서 변위량 δ_i 는 기하학 적으로 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\delta_i = L_i \cdot \delta\theta \quad (2)$$

다) 하중과 변위의 관계식

내치차인 서클라 스플라인이 외치차인 플렉스 스플라인과 접촉점에서 탄성변형은 무시하고 원형을 그대로 유지한다고 가정하면 변위는 하중에 비례하게 된다.

$$P_i = K \cdot \delta_i \quad (3)$$

K : 강성계수

(2)식을 (3)식에 대입하고 이를 (1)식에 대입 후 $\delta\theta$ 에 관해서 정리하면

$$\delta\theta = M / (K \cdot \sum L_i) \quad (4)$$

(4)식을 (2), (3)식에 대입하면 각치에 분배되는 하중을 구할 수 있다.

$$P_i = M \cdot L_i / \sum L_i \quad (5)$$

(5)식에서 치에 분배되는 하중은 오직 모멘트 아암에 만 비례함을 알 수 있다. 조속식 감속기의 경우 모멘트 아암은 바로 기초원 반경이 되어 일정하다. 따라서 조속식 감속기의 경우 N개의 치가 동시에 접촉하면 각 치에 분배되는 하중은

$$P_i = M / (L \times N) \quad (6)$$

이 되어 일정하게 분배된다.

2-2. 치면의 접촉응력

앞에서 물림 특성을 보인 바와 같이 내치차와 외치차의 굴음 접촉판은 선접촉으로 가정할 수 있다. 기어와 같은 국부 고하중 접촉특성을 지닌 기계 요소에서

는 접촉부위가 탄성 변형됨으로 이를 고려한 접촉응력이 보다 큰 설계 변수가 된다. 접촉이 선이나 점으로 행해지는 것을 Herzian접촉이라 하며 이때의 응력을 Herzian contact stress라 한다. 이때 최대 접촉응력은 다음의 식으로 부터 계산된다.

$$S = \sqrt{\frac{qE}{2\pi R}} \quad (7)$$

q : 분포 하중 ($q = P_i/b$)

E : 등가 탄성 계수

$$\left(\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right)$$

R : 등가 반경 ($\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}$)

(+ : 외접, - : 내접)

여기서 접촉응력을 계산할때 필연적으로 등가반경을 구하기 위해서 치형의 곡률반경이 필요하게 된다. 곡률 반경의 계산방법으로는 3가지가 있다. 첫번째 방법으로는 근사적 방법으로 피치원을 이용하여 곡률 반경을 유도하는 방법[5]이고, 두번째로는 치형의 곡선을 다항식으로 가정하여 수치적 방법으로 반복계산 후 곡률을 계산하는 근사법이다. 세번째 방법으로는 치형의 곡률 중심의 궤적인 이볼류우트(evolute)를 구하고 다시 인볼류우트(involute)를 계산하여 동일 이볼류우트에 대한 다른 인볼류우트들은 등거리 관계를 갖는다는 특성을 이용하여 곡률궤적 및 곡률 중심을 구하는 방법이다[1].

본 연구에서 하모닉 드라이브의 경우 기구의 특성상 세번째 방법으로는 계산이 너무 복잡하고 계산량이 많으며 인볼류우트 치형의 경우 치수가 많고 모듈율이 극히 작은 경우는 직선 치형에 가깝다는 특성을 고려하여 5개의 미지수를 갖는 4차 다항식으로 가정하여 수치적 방법으로 계산하였다. 치형의 곡선을 다음과 같이 가정하면,

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (8)$$

곡률 반경 ρ_c 는

$$\rho_c = \frac{\{1 + f'(x)\}^{3/2}}{f''(x)} \quad (9)$$

가 된다. 완전히 다른 치형을 창성케하는 전위계수 x_r 가 변함에 따라 곡률반경, 등가반경은 변하게 되고 최대 치면 접촉응력을 계산할 수 있다. 그림4는 최대 치

면 접촉응력이 작용하는 위치와 크기를 보여 주고 있는 예이다. 이때 최대 접촉응력이 최소인 $x_r=0.9$ 가 얻고자 하는 전위계수가 된다.

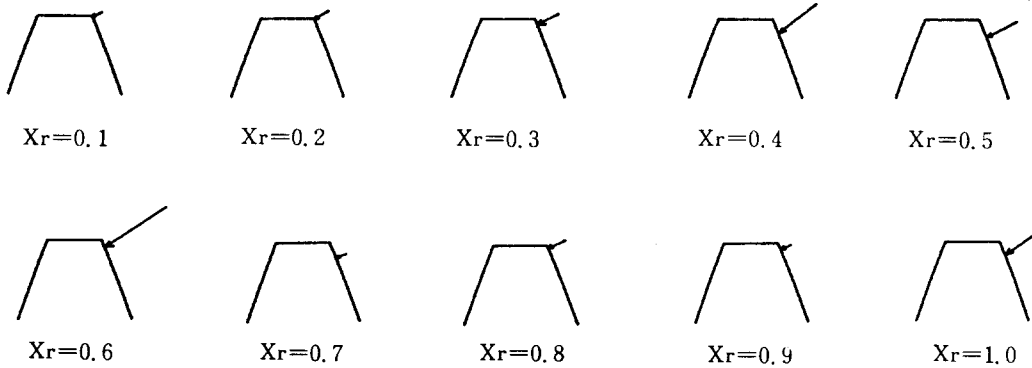


Fig. 4. Distribution of herzian contact stress

3. 커터치형의 설계

내치차를 인볼류우트 치형으로 가정하고 물음 법칙에 따라 이와 맞물려 돌아가는 외치차의 치형은 완전히 새로운 치형으로 창성되어 기존의 공구로는 가공이 불가능하다[3]. 첫번째 방법은 일반적인 방법으로서 그림 5에 보인 바와 같이 내치차와 외치차의 구름 접촉판 P_1, P_2 와 굴음 접촉운동을 하는 또 하나의 굴음 접촉판 P_3 를

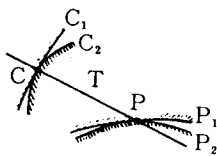


Fig. 5. Tooth profile (C_1, C_2) and rolling contact plate (P_1, P_2)

고려하고 P_3 와 상대운동을 하는 치형을 C_3 라 하면 P_1, P_2, P_3 는 동일한 P점에서 굴음 접촉하고 C_1, C_2, C_3 는 동일한 C점에서 미끄럼 접촉하게 된다. 이때 C_3 를 커터의 날로 하면 P_3 와 플렉스 스플라인의 굴음접촉판 P_2 에 굴음운동을 고려하면 플렉스 스플라인의 치형 C_2 가 창성된다. 두번째 방법으로는 파동치차 장치의 기구를 이용하는 방법으로서 플렉스 스플라인과 동일한 파동운

동을 하는 피삭체의 장축 정점 근방에 커터의 날을 파동발생기에 대해서 평행 이동시켜서 절삭한다. 이 방법은 직선 날의 호브로 근사적으로 플렉스 스플라인의 치형을 창성하는 방법이다. 세번째 방법은 기존의 인볼류우트 치형을 수정하는 방법으로서 실용적으로는 이 방법이 제일 간단하다. 그러나 두번째와 세번째 방법은 정확한 치형을 설계, 가공후 실용적으로 사용하기에 알맞은 근사적 가공법이다.

따라서 본 연구에서는 첫번째 방법을 이용하여 커터의 치형을 두 기어에서 한쪽치형을 알고 있을때 이와 맞물리는 치형을 구하는 방법과 동일한 방법으로 설계하였다. 가공할 외치차의 치형이 내치차의 운동궤적으로 부터 구한 것이기 때문에 계산식이 매우 복잡하여 커터의 치형을 이론적으로 구하기가 불가능하여 창성 방법으로 구했다. 외치차와 커터는 기어가 맞물린 운동을 하게 됨으로 커터의 치형을 구하기 위해서 피치원을 선정하여야 한다. 피치원은 플렉스 스플라인의 치의 치선원을 사용하던가 치저원을 사용하던가 또는 그 중간의 임의의 위치로 잡아도 무관하다.

호브는 플렉스 스플라인과의 관계에서 피치원은 각각 호브와 플렉스 스플라인과의 회전 속도를 구속하는 역할을 하며 절삭은 커터의 상화 왕복운동으로 이루어 짐으로 피치원 위치에 따라 커터의 치형은 변하지만 절삭 과정에 영향을 미치지 않는다.

플렉스 스플라인의 치 갯수를 Z_f , 피치원 반경을 P_f 라 하면 치 갯수 Z_b 인 호브의 피치원 반경 P_b 는 다음 식으로 부터 구해진다.

$$P_b = P_f \cdot Z_b / Z_f \quad (10)$$

호브와 플렉스 스플라인의 회전운동은 두 피치원의 굴음운동이 되며 커터를 고정시키고 플렉스 스플라인의 굴음운동을 관찰하면 그림 6과 같이 도시된다.

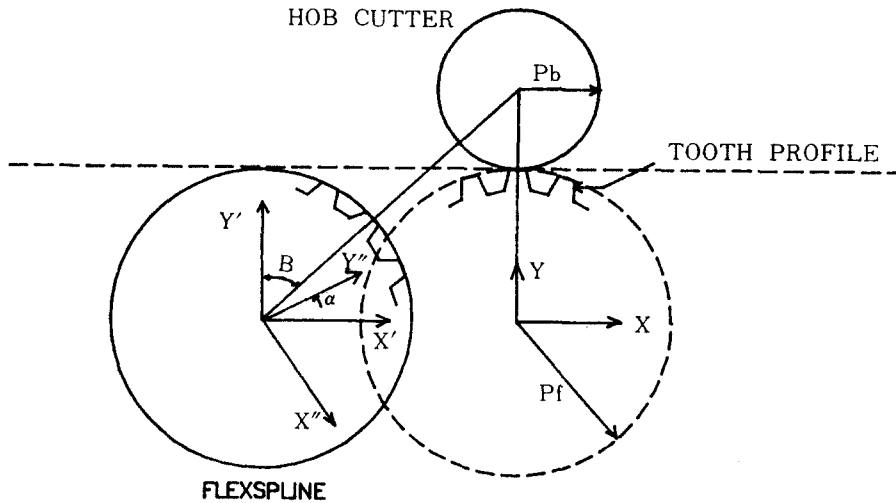


Fig. 6. Relative motion of hob cutter and flexspline

플렉스 스플라인의 치형을 알고 있으므로 굴음운동에 따라 중첩되는 플렉스 스플라인의 치형 외곽 곡선이 커터의 치형으로 구해진다. 그림 6에서 플렉스 스플라인 상에 있는 (x, y) 축은 굴음 운동에 따라 (x'', y'') 축으로 이동하며, 도시되어 있는 각도 α, β 는 굴음 접촉조건으로부터 다음과 같은 관계를 만족해야 한다.

$$P_f \cdot \alpha = P_b \cdot \beta \quad (11)$$

플렉스 스플라인의 치형도 (x, y) 축 상에 있는 것이 동일하게 (x'', y'') 축으로 이동하기 때문에 이것을 중첩한 형상이 커터의 치형으로 결정된다. 플렉스 스플라인의 치형 좌표를 (X_f, Y_f) 라 하면 이 좌표는 (x, y) 축과 (X'', Y'') 축을 기준으로 한 것이며 (X'', Y'') 축 상에 있는 좌표는 (x, y) 축으로 이동해야 중첩도시가 가능하다. (x'', y'') 축은 (x, y) 축과 평행한 (X', Y') 축으로 이동시키면 반시계 방향으로 축을 $(\alpha + \beta)$ 회전한 것이 되어 (x'', y'') 축에 있는 치형 좌표 (X_f, Y_f) 는 다음과

같이 변환된다.

$$\begin{aligned} x' &= \cos(\alpha + \beta) \cdot x_f + \sin(\alpha + \beta) \cdot Y_f \\ Y' &= -\sin(\alpha + \beta) \cdot x_f + \cos(\alpha + \beta) \cdot Y_f \end{aligned} \quad (12)$$

(X', Y') 축을 (x, y) 축으로 평행 이동 시키면 치형의 좌표는 다음식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} X &= X' - (P_b + P_f) \cdot \tan \beta \\ Y &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

따라서 식 13은 (x'', y'') 축에 위치한 치형 좌표를 (x, y) 축을 기준으로 변환시킨 것이며 커터를 고정시키고 굴음운동 때문에 β 의 변화에 대해 동일한 작업을 수행하여 좌표 변환된 치형을 그리며 포락선이 커터의 형상으로 결정된다.

그림 7은 감속비 80 : 1인 감속기의 플렉스 스플라인을 가공하기 위한 20배 확대 커터 도면의 예이다.

REFERENCE LINE FROM CUTTER
CENTER (mm) -2

NUMBER OF CUTTER TEETH B

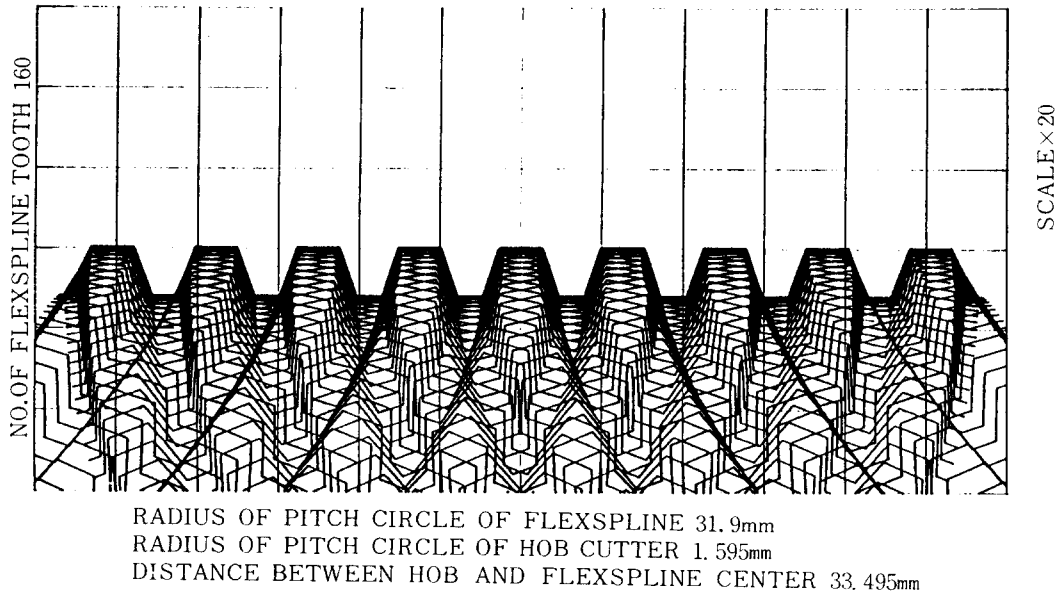


Fig. 7. Hob cutter profile(grid 1mm)

4. 결 론

외치차가 파동 발생기가 회전함에 따라 탄성 변형을 하며 내치차와 독특한 물림특성을 갖는 조속식 감속기에 있어서 강도 해석을 고려한 치형설계 방법을 제시하였다. 접촉치에 하중이 균일하게 분포하게 되고 다수의 치가 동시에 접촉함으로써 하중이 분산하게 되고 따라서 치면 접촉응력 또한 작음을 알 수 있다. 최대 치면 접촉응력으로 부터 전위계수를 결정할 수 있음을 보여 주었다. 창성된 새로운 치형은 기존 치형과 달라 공구 입력각 20° 의 기존 공구로 가공이 불가능하여 커터의 치형 설계방법을 제시하고 20배의 확대도면으로 부터 커터치형의 가공이 가능함을 제시하였다.

후 기

본 연구는 과학기술처에서 수행한 특정연구개발사업으로 수행되었음을 밝히며, 이에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. 오박균, 전완주의 "Multi-functional Manipulator용 Torque Driver의 개발에 관한 연구: 과학기술처 보고서, 2N 392-3137-2, 1988, KIST"
2. Shoichi Ishikawa, "The Gear Geometry of Tooth Engagement in Harmonic Drive," JSME, 1967, Semi-International Symposium, pp. 97-104.
3. Koshi Kondo and Jun Takeda, "Study on Wave Gear Drives," JSME, 1989, 9, Vol. 52, No. 481. pp. 2456-2462.
4. Wan Joo Jun, Park Kyoun Oh, "Analysis of Kinematics and Tooth Profile in Harmonic Drive," J. of KSLE, Vol. 4, No. 2, 1988, pp. 60-67.
5. 정선모, 표준기계 설계학(합본), 동명사, 1981.