

Weiss형 등속조인트 볼 홈의 접촉응력평가

김 완 두* · 이 순 복**
* 한국기계연구소 · **한국과학기술대학

Contact Stress Evaluations for the Ball Groove of Weiss Type Constant Velocity joint

Wan-Doo Kim* Soon-Bok Lee**

* Korea Institute of Machinery & Metals

** Korea Institute of Technology

Abstract- For the life prediction and fatigue failure prevention of the constant velocity joint, the maximum equivalent stress and its location in depth from the contact area are essential. These values give the fundamental information to determine the depth of the surface hardening treatment at the contact area. Contact stresses are evaluated at the surface and subsurface of the ball groove of the Weiss type constant velocity joint. The maximum contact pressure and the maximum equivalent stress are obtained. The effects of various parameters such as the radius of ball groove, friction coefficient, and residual stress are studied. The maximum equivalent stress and the maximum contact pressure increase as the radius of the ball groove increases. The location of the maximum equivalent stress moves toward surface as the friction coefficient increases. It was also found that the maximum equivalent stress becomes minimum when the compressive residual stress is about 0.16 times of the maximum contact pressure.

1. 서 론

등속조인트(Constant Velocity Joint)는 동력 전달과 조향을 동시에 수행해야 하는 전륜구동차의 앞차축에 필수적인 부품으로 차량의 조향시 이음각이 수시로 변할때에도 구동축으로부터 각속도와 토오르크를 피동축에 균일하게 전달시켜주는 역할을 하며, 최근 승용차의 소형화 및 연료절약을 위한 전륜구동화 추세로 인해 그 수요가 급증하고 있는 자동차의 중요 부품이다[1]. 이러한 등속조인트에는 Rzeppa형, Weiss형, Tripot형 및 Double offset형 등 여러가지 종류가 개발되어 실용화되고 있으며, 이들 대부분은 볼이 볼홈(groove)을 따라 이동되어 동력전달면을 항상 등속평면으로 유지시킴으로써 등속으로 운동을 전달시킨다[2]. 등속조인트는 볼과 볼홈이 항상 접촉된 상태에서 동력을 전달하므로 등속조인트의 설계를 위해서는 접촉부위에서의 응력평가가 필요하며, 조인트가 임의의 이음각을 이루고 회전할때 볼홈을 따라 이동하는 볼은 구름접촉 운동과 미끄럼 운동을 하게되어 마찰의 영향을 고려한 접촉응력 해석도 뒤따

라야 하겠다. 기존의 등속조인트 설계에서는 주로 접촉부위 표면에 작용되는 최대 접촉 압력만을 고려 하였으며, 마찰의 영향과 잔류응력 크기변화에 따른 표면하층(subsurface)에서의 응력상태 등은 고려하지 못하였다[3].

이에 본 논문에서는 접촉부위 표면과 표면하층에서의 응력상태를 해석적으로 구한 Bryant 와 Keer [4]의 풀이를 바탕으로 접촉부위 임의지점에서의 응력성분을 구할 수 있는 program을 완성하였으며, 이로부터 구름접촉 하중을 받는 부위의 응력상태를 가장 잘 표현하는 Mises 항복조건식에 의한 등가응력을 구하고[5], 또한 접촉부위 피로파손 및 수명에측에 기초 자료가 되는 최대 전단응력 파괴설에 의한 등가응력들을 찾아 이의 최대값 및 최대값 발생깊이를 찾아 조인트 제작공정에서의 표면경화 깊이결정 등에 중요한 자료로 이용 되도록 하며[3], 마찰과 잔류응력의 영향도 고찰하였다. 모든 수치적 계산은 전륜구동형 트럭의 앞차축으로 사용되는 Weiss형 등속조인트(최대허용 토오르크; 18.63 kN·m)에 대해 수행되었다.

2. Weiss형 등속조인트의 기하학적 해석

Weiss형 등속조인트는 볼홈이 가공된 2개의 Yoke, 동력전달과 등속표면 유지를 위한 4개의 볼, 그리고 중앙에 중심삽기용 볼 등으로 구성되며 한방향 토크에 대해 180도 위치에있는 2개의 볼이 접촉되어 동력을 전달한다.

Fig 1에 분해된 Weiss형 조인트의 실제모양을 보여 주고 있으며, Fig 2는 볼과 볼홈의 상대운동을 도식적으로 나타낸 그림이다. 이 그림에서 O는 조인트 중심이며 A와 B점은 각각 구동축쪽 볼홈(G1)과 피동축쪽 볼홈(G2)의 중심으로 곡률반경은 Rc로서 동일하며, 각 볼홈 중심은 조인트 중심으로부터 d만큼 편심되어 있다. 두축m과 n이 θ 의 이음각을 이룰 때 볼이 볼홈을 따라 이동되면서 생기는 각변화는 $\theta/2$ 가 되어 C1' C2' 평면은 등속평면이 되며 임의 이음각에서도 등속으로 운동이 전달된다. 한편 임의 이음각 θ 를 유지한 상태에서 조인트가 회전하면 동력전달점인 C1'과 C2' 간의 거리(L)는, 최소 Lmin에서 최대 Lmax까지 변하게 되어 조인트가 일정한 토크를 전달할때 접촉부위에 전달되는 하중도 변하게 된다. θ 와 동력전달점 간의 거리(L)의 관계식은 다음과 같다.

$$L = 2 \sqrt{Rc^2 - d^2 \cos^2(\theta/2)}$$

Fig 2의 기하학적 관계로부터 Lmin과 Lmax는 다음과 같이 구해진다.

$$L_{min} = C1 C2 = 2 \sqrt{Rc^2 - d^2}$$

$$L_{max} = C1' C2' = 2 \sqrt{Rc^2 - d^2 \cos^2(\theta/2)}$$

조인트가 일정한 토크 T를 전달할 때 볼과 볼홈의 접촉 부위에 작용되는 하중(F)은 T/L이며, 조인트 회전으로 인한 L의 변동은 접촉하중의 변동을 초래하며, 이 변동값은 조인트각이 클수록 크며, 최소 Fmin 에서 Fmax까지 변하게 된다.

$$F_{min} = T/L_{max} = T / (2 \sqrt{Rc^2 - d^2 \cos^2 \theta})$$

$$F_{max} = T/L_{min} = T / (2 \sqrt{Rc^2 - d^2})$$

Table 1은 정적 최대허용 토크가 18, 63 kN·m인

Weiss 형 등속조인트에 대해 조인트각 변화에 따른 토크 팔길이, 전달하중 등을 계산한 도표이며, 계산에 이용한 등속조인트의 치수는 다음과 같다.

볼홈 반경 (R) : 55.88mm

볼홈 편심거리 (d) : 25.4mm

접촉하중은 다음절에서 언급된 접촉응력 해석에 필수적인 수치로서, Table 1의 계산결과에서도 알 수 있는 바와 같이, 조인트의 이음각이 최대($\theta=30^\circ$)인 경우에도 그의 변동범위가 0.87%에 지나지 않아 Fmax를 기준으로 접촉응력 해석을 수행하도록 하였다.

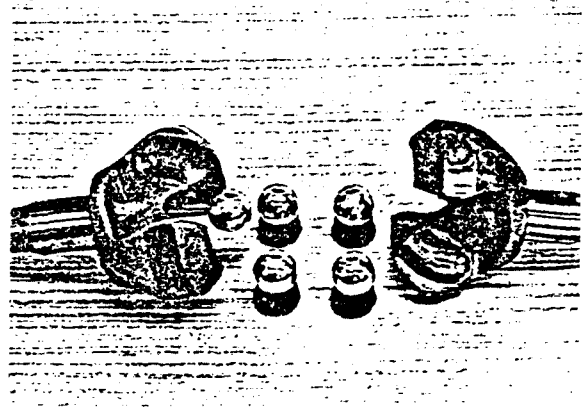


Fig.1. Weiss type constant velocity joint

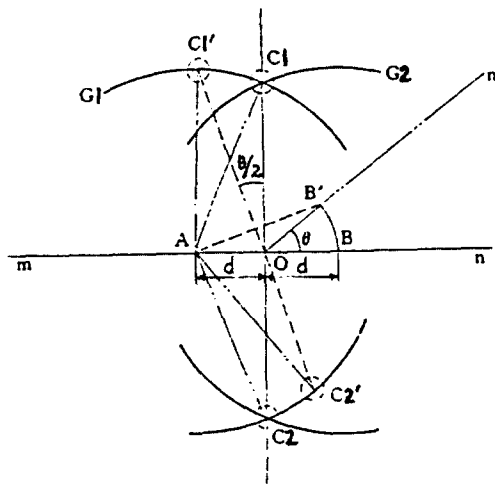


Fig.2. A diagram for the kinematic analysis of balls and ball grooves

Table 1. Results of the geometrical analysis of the Weiss type CV joint

joint angle θ (deg)	torque arm length, (mm)		contact force, (kN)	
	Lmin	Lmax	Fmin	Fmax
0	99.54	99.54	187.2	187.2
5	"	99.57	187.1	"
10	"	99.65	187.0	"
15	"	99.77	186.7	"
20	"	99.94	186.4	"
25	"	100.15	186.0	"
30	"	100.41	185.5	"

3. 접촉부위 응력평가

접촉부위 표면 및 표면하중 임의지점에서의 응력성분을 구하기 위해서는 먼저 Hertz 분포로 알려진 타원접촉 영역의 장단축 길이인 a 와 b , 최대 접촉압력 P_0 를 알아야 한다. Hertz 접촉응력 해석은 몇가지 가정(재질은 등방성 탄성체, 접촉표면의 조도는 무시, 접촉부위는 평면을 유지)하에 수행되며, 압력분포 $P(x, y)$ 는 Fig. 3과 같이 타원형 분포로 주어진다.

$P(x, y)$ 와 a, b 및 P_0 의 관계식은 다음과 같다[6, 7].

$$P(x, y) = P_0 \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$$

$$R_x/R_y = \frac{(1 - e^2) [K(e) - E(e)]}{[E(e) - (1 - e^2) K(e)]}$$

$$a = [3R' E(e) F / \{(1 - e^2) E'\}]^{1/3}$$

$$b = a \sqrt{1 - e^2}$$

$$P_0 = 3F / (2\pi ab)$$

여기서, $e^2 = 1 - (b/a)^2$

$K(e), E(e)$: 1st, 2nd kind complete elliptic integrals

R_x, R_y : 접촉물체의 x, y 방향 effective radius

$$1/R_x = 1/R_{x1} + 1/R_{x2}$$

$$1/R_y = 1/R_{y1} + 1/R_{y2}$$

R_{x1}, R_{y1} : contact radius of body 1

R_{x2}, R_{y2} : contact radius of body 2

R' : effective radius

$$(1/R' = 1/R_x + 1/R_y)$$

E' : effective modulus

$$\frac{1}{E'} = \frac{(1 - \nu_1^2)}{(\pi E_1)} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{(\pi E_2)}$$

E_1, E_2 : Young's moduls (body 1, 2)

ν_1, ν_2 : Poisson's ratio (body 1, 2)

F : applied force

Hertzian 접촉압력 분포를 구하기 위해 계산에 필요한 수치들은,

- 1) 접촉부위의 기하학적 형상(곡률반경)
- 2) 재질의 탄성계수 및 Poisson 비
- 3) 작용하중

등이며, 계산결과로서,

- 1) 타원접촉의 장축과 단축 크기
- 2) 최대 접촉응력 크기
- 3) 접촉 부위에서의 변형량

등의 값을 구할 수 있다. 접촉부위 표면 및 표면하중에서의 응력평가로서, 선접촉인 경우의 풀이는 Smith와 Liu [9]에 의해 구해졌으며, 원접촉인 경우에 대한 풀이는 Hamilton과 Goodman[10]에 의해 구해졌다. 그밖에 Bryant와 Keer [4]는, 마찰이 없는 경우에 대한 Lure[11]의 풀이와, 마찰이 있을때 즉, 접촉전단응력이 존재하는 경우에 대한 Boussinesq와 Cerruti [12]의 풀이를 이용하여 타원접촉 부위의 응력을 평가하였으며, Broszeit와 Zwirlein [5]은 여러가지 등가응력 가설을 도입하여 선접촉인 경우에 대한 마찰, 잔류응력 및 접촉형상들의 효과를 밝혔다.

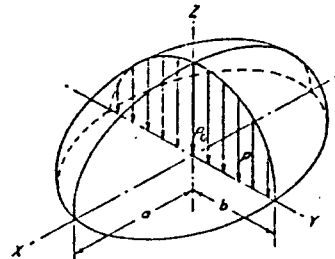


Fig. 3. Hertzian contact pressure distribution

등속조인트 접촉응력해석을 위해 Bryant와 Keer의 연구결과를 토대로 개발된 접촉응력 해석 프로그램 [8]을 이용하여, 접촉표면 및 표면하중 임의지점에서의 모든 응력 성분을 구했다. 구름접촉 하중을 받는 부위의 응력상태를 가장 잘 표현하고 소성 flow 예측과 잔류응력 및 균열생성 영역 결정에 유용한 Mises 항복조건식에 의한 등가응력 (S_m)과 접촉부위 피로파괴 및 수명 예측등에 사용되는 최대전단 응력설 (Tresca 항복조건식)에 의한 등가응력 (S_t)을 구해 [12], 표면 경화깊이 결정에 중요한 자료가 되는 등가응력의 최대값 및 최대값 발생깊이를 찾았다. 또한 마찰과 잔류응력의 영향을 고려하기 위해 마찰계수와 잔류응력 크기 변화에 따른 접촉응력 상태도 검토하였다.

접촉부위 임의 지점에서의 S_m 과 S_t 는 각 응력 성분으로부터 다음과 같이 정의된다.

$$S_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \}^{1/2}$$

$$S_t = | \sigma_{\max} - \sigma_{\min} |$$

한편, 등속조인트의 표면경화나 연삭 등의 제작공정 중에 발생되거나, 또는 shot peening공법 등으로 발생하는 잔류응력 (σ_r)은 X와 Y축 방향에서는 동일한 크기를 가지며, Z축 방향(깊이)은 무시할 수 있을 정도로 작음이 밝혀져 있다 [14]. 따라서 각 지점에서의 잔류응력을 고려한 등가응력 (S_{mr})은 다음식으로 구할 수 있다.

$$S_{mr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_r - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \}^{1/2}$$

Fig.4는 해석에 이용된 프로그램의 flowchart이다.

4. 해석결과 및 고찰

Weiss 형 등속조인트의 기하학적 해석으로 부터 이음각 변화에 따른 접촉하중 변화는 무시할 수 있을 정도임이 밝혀졌으며, 이에따라 접촉응력 해석을 위한 하

중은 이음각이 0° 일때를 기준으로 계산되었다. Table 2는 볼의 크기 (직경 $D: 44.45\text{mm}$)를 일정하게 둔 상태에서 볼홈의 곡률반경 (R) 변화에 따른 접촉부위 장축과

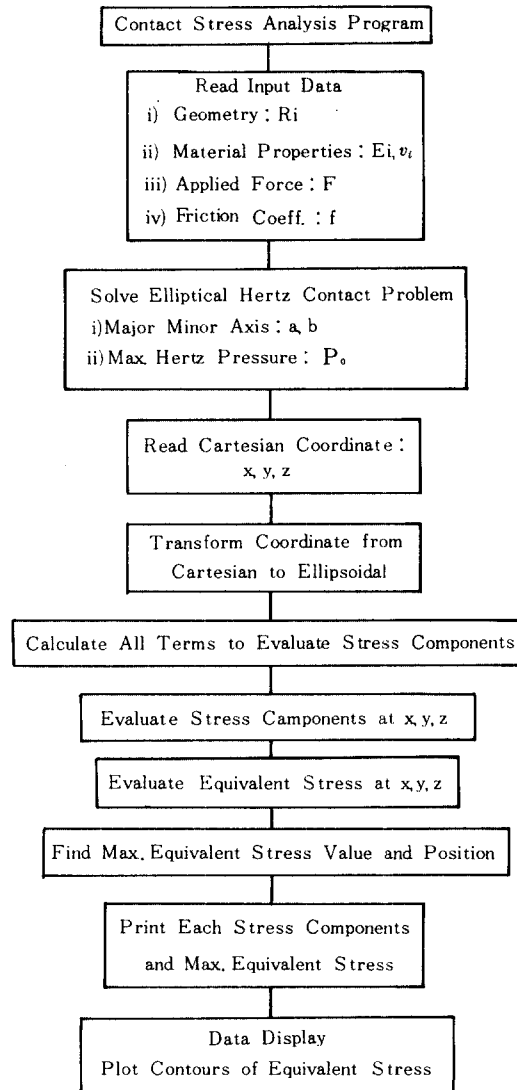


Fig.4. Flowchart of the program for contact stress analysis

단축의 길이 (a, b), 최대 접촉 압력 (P_0)등을 보인 표로서, R 이 커짐에 따라 P_0 가 증가되는 경향을 나타낸다.

일반적인 볼베어링의 파손접촉압력인 2700MPa [14]를 등속 조인트 설계에 적용하면 볼홈의 크기는 0.502D 정도로 제한되며 이는 볼홈의 설계 추천치인 0.5005D -0.502D와도 잘 일치된다[3]. 표면하층에서의 응력상태를 나타내는 등가응력 Sm과 St를 Table 3에 나타냈으며, 각각의 최대값 발생깊이 (Zd)도 찾아졌다. 최대등가응력은 R의 증가에 따라 증가되나 이를 Po의 상대적인 값으로 나타내면 Sm의 경우 약 0.56Po, St의 경우 약 0.61Po로서 균일하며 Po와 더불어 접촉부의 응력 설계식으로 손쉽게 이용할 수 있겠다. 각 경우에 대한 최대등가응력 발생깊이도 접촉 부위 단축길이(b)의 상대적인 값으로 나타내면 Sm의 경우 약 0.71b, St의 경우 0.79b이다. 한편 이들 값은 표면하층에서의 초기 파손현상을 방지하기 위해 실시되는 표면경화깊이가 결정에 중요한 자료가 되며, 표면경화깊이는 Zd의 3배로 추천되고 있다[3].

Table 2. Results of the Hertzian contact analysis

ball dia. D(mm)	groove radius R(mm)	major axis a(mm)	minor axis b(mm)	max. pressure Po(MPa)
44.45	22.269 (0.501D)	42.16	0.91	2323
44.45	22.314 (0.502D)	32.27	1.04	2657
44.45	22.358 (0.503D)	27.67	1.12	2870
44.45	22.403 (0.504D)	24.73	1.19	3037
44.45	22.447 (0.505D)	22.70	1.24	3171

Table 3. Max. equivalent stress and its depth

groove radius R(mm)	eq. stress (Mises)		eq. stress (Tresca)	
	max. Sm(MPa)	Zd(mm)	max. St(MPa)	Zd(mm)
0.501D	1301(0.56Po)	0.65(0.71b)	1414(0.61Po)	0.72(0.79b)
0.502D	1492(0.56Po)	0.74(0.71b)	1625(0.61Po)	0.82(0.79b)
0.503D	1619(0.56Po)	0.80(0.71b)	1763(0.61Po)	0.88(0.79b)
0.504D	1713(0.56Po)	0.85(0.71b)	1872(0.62Po)	0.93(0.79b)
0.505D	1792(0.57Po)	0.89(0.71b)	1961(0.62Po)	0.97(0.79b)

Fig.5는 볼 홈 곡률반경에 따른 Po, 최대 Sm, St 및 Zd를 나타낸 그림이며, Fig.6-10은 Z축상에서의 Sm과 St 분포를 보여준다. Fig 11-15는 각 볼 홈크기에 대한 Sm의 등가선을 나타낸 그림이다. Table 4는 R=0.502D인 경우 마찰계수 변화에 따른 최대 Sm과

Zd를 나타낸 도표로서 마찰계수 증가에 따라 Sm은 급격히 증가되며 Zd는 줄어들어 f=0.28인 경우는 표면에서 최대 Sm가 발생됨을 알 수 있었다. 이로써 마찰계수가 접촉부위 응력에 큰 영향을 끼침을 알 수 있고, 마찰의 최소화를 위한 볼과 볼홈사이의 적정 윤활관리가 요청된다. Fig 16-18는 마찰계수가 각각 0.05, 0.20, 0.28인 경우에 대한 Sm의 등가선을 나타낸 그림이다. 잔류응력의 영향을 알아보기 위한 등가응력은, 이영향을 표현하는데 가장 적합한 식으로 제안되고 있는 Mises 항복조건식에 따랐으며, Table 5는 잔류응력 크기변화에 따른 최대 Sm과 최대 Sm발생 위치를 보여준다. Fig.19는 Table 5의 최대 Sm을 도식화한 그림이며, 잔류응력이 Po의 0.16배 즉 425MPa의 압축잔류 응력이 존재할때 최대 Sm값을 1159 MPa로 최소화 시킬 수 있다. 따라서, 잔류응력의 크기를 적절하게 조절함으로써 잔류응력이 없는 경우보다 약 22% 최대 등가응력을 감소시킬 수 있겠다. Fig. 20-23은 잔류응력 변화에 따른 Sm 값 변화를 3차원으로 나타낸 그림이다.

Table 4. Max. Sm and Zd for various friction coeff. (R=0.502D, Po=2657 MPa)

friction coeff.	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.28	0.30
max. Sm(MPa)	1492	1497	1510	1535	1570	1614	1660	1734
Zd(mm)	0.74	0.73	0.71	0.67	0.62	0.54	0.0	0.0

Table 5. Magnitudes and position of max. eq. stress (Sm), as a function of the residual stress (f=0.0, R=0.502D, Po=2657MPa)

σr/Po	max. Sm(MPa)	position(mm)	
		Y	Z
0.6(tensile)	3075(1.16Po)	0	0.71(0.68b)
0.4(")	2548(0.96Po)	0	0.71(0.68b)
0.2(")	2018(0.76Po)	0	0.74(0.71b)
0.0	1492(0.56Po)	0	0.74(0.71b)
-0.2(compre.)	1178(0.44Po)	1.01(0.97b)	0.42(0.40b)
-0.4(")	1532(0.58Po)	1.13(1.08b)	0.31(0.30b)
-0.6(")	2007(0.76Po)	1.16(1.11b)	0.23(0.22b)
-0.16(")	1159(0.436Po)	1.93(0.89b)	0.48(0.46b)

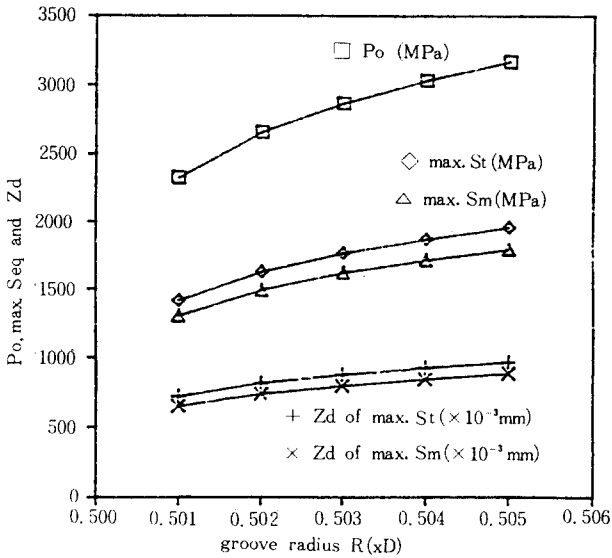


Fig. 5. Groove radius vs. Po, max. eq. stress (Sm, St) and depth of max. eq. stress

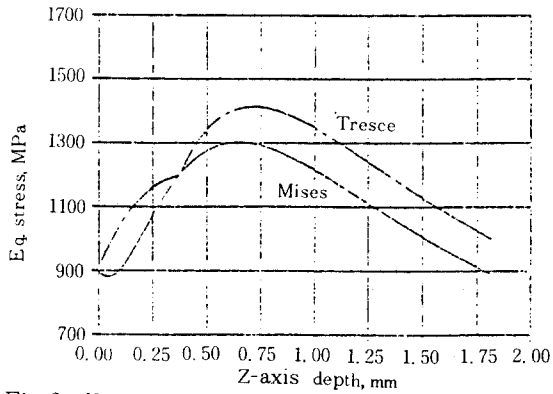


Fig. 6. Eq. stresses derived from Mises and Tresca hypotheses along Z axis (R = 0.501D)

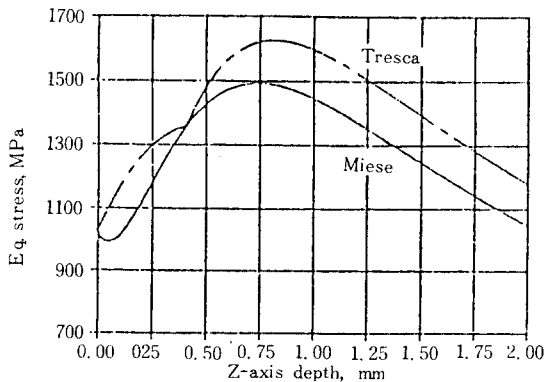


Fig. 7. Eq. stresses derived from Mises and Tresca hypotheses along Z axis (R = 0.502D)

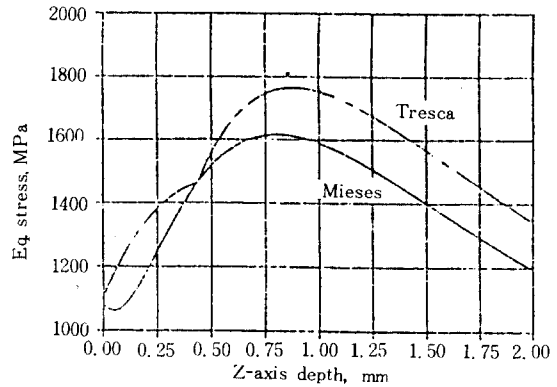


Fig. 8. Eq. stresses derived from Mises and Tresca hypotheses along Z axis (R = 0.503D)

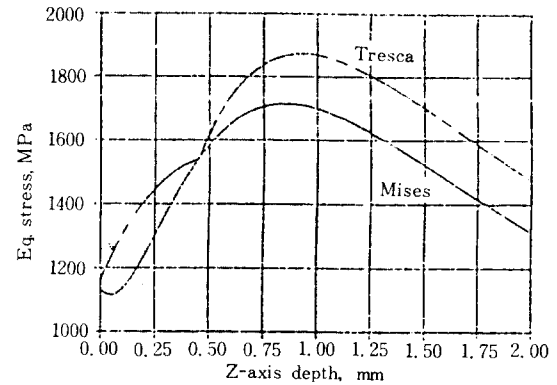


Fig. 9. Eq. stresses derived from Mises and Tresca hypotheses along Z axis (R = 0.504D)

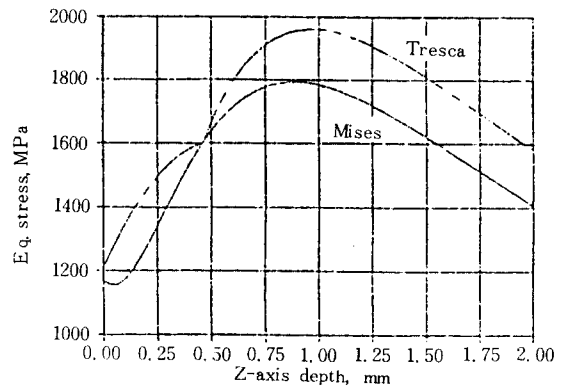


Fig. 10. Eq. stresses derived from Mises and Tresca hypotheses along Z axis (R = 0.505D)

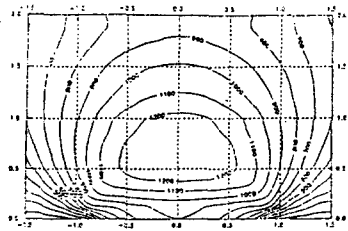


Fig 11. Contours of S_m (GPa) beneath directed along $X = 0$ ($R = 0.501D, f = 0.0$)

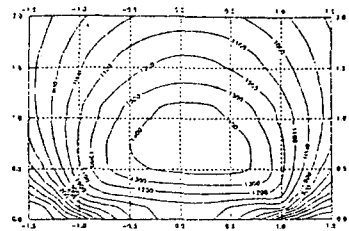


Fig 16. Contours of S_m (GPa) beneath directed along $X = 0$ ($R = 0.502D, f = 0.05$)

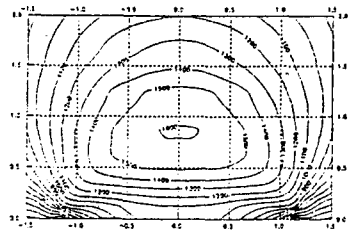


Fig 12. Contours of S_m (GPa) beneath directed along $X = 0$ ($R = 0.503D, f = 0.0$)

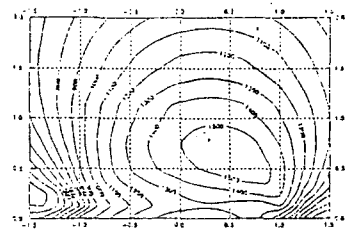


Fig 17. Contours of S_m (GPa) beneath directed along $X = 0$ ($R = 0.502D, f = 0.2$)

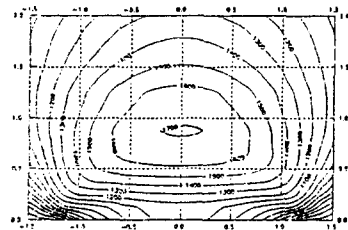


Fig 13. Contours of S_m (GPa) beneath directed along $X = 0$ ($R = 0.504D, f = 0.0$)

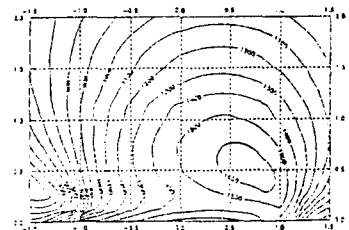


Fig 18. Contours of S_m (GPa) beneath directed along $X = 0$ ($R = 0.502D, f = 0.28$)

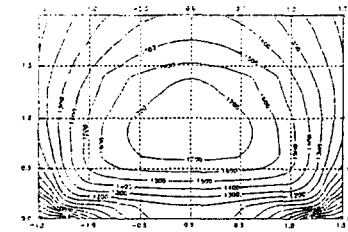


Fig 14. Contours of S_m (GPa) beneath directed along $X = 0$ ($R = 0.505D, f = 0.0$)

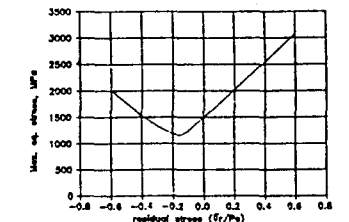


Fig 19. Max. eq. stress (S_m) as a function of the residual stress

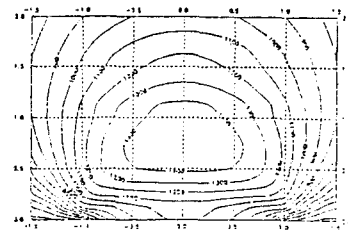


Fig 15. Contours of S_m (GPa) beneath directed along $X = 0$ ($R = 0.502D, f = 0.0$)

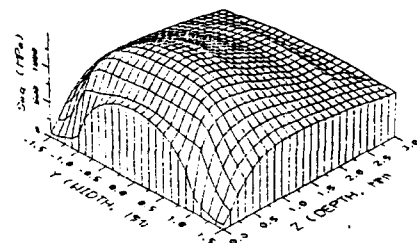


Fig 20. Variation of the S_m in the $Y-Z$ plane ($R = 0.502D, \sigma_r = 0.0 \text{ Pa}$)

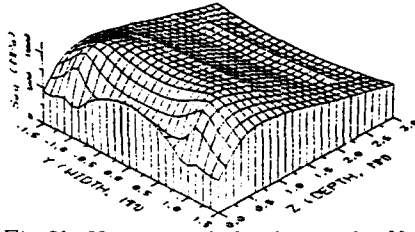


Fig. 21. Variation of the S_m in the Y-Z plane ($R=0.502D$, $\sigma_r=-0.16P_0$)

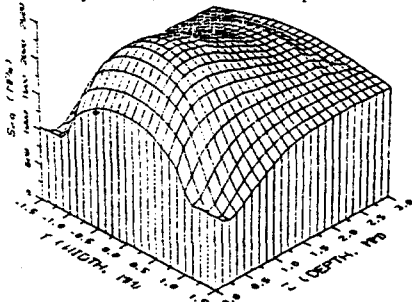


Fig. 22. Variation of the S_m in the Y-Z plane ($R=0.502D$, $\sigma_r=0.4P_0$)

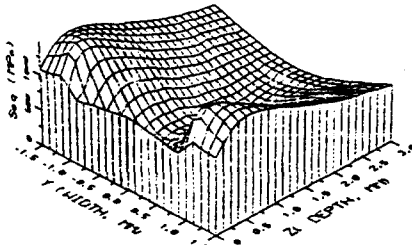


Fig. 23. Variation of the S_m in the Y-Z plane ($R=0.502D$, $\sigma_r=-0.4P_0$)

5. 결 론

본 연구의 결과로 다음의 결론을 얻었다.

- 1) Weiss형 등속조인트의 기하학적 해석과 볼과 볼홈 사이의 접촉부위 응력해석을 통하여 접촉부위에서의 최대 접촉압력, 최대 등가응력 및 최대 등가응력 발생깊이 등을 구하였다.
- 2) 최대 접촉압력과 최대 등가압력은 볼의 크기가 일정할 때 볼홈의 곡률반경이 커짐에 따라 증가하는 경향을 보였으며 등속조인트 설계시 이 두가지를 모두 고려할 수 있게되었다.
- 3) 표면경화 깊이 결정에 중요한 수치가 되는 최대 등가응력 발생깊이는 볼홈의 곡률반경이 커짐에 따라 증가되었으며, 곡률반경을 일정하게 했을 경우 마찰계수 증가에 따라 최대 등가응력이 급격히 증가되고 최대 등가응력발생 깊이가 접촉표면으로 이동 된다.
- 4) 접촉 표면에서 압축 잔류응력의 크기가 최대접촉 압력의 약 0.16배 일때 최대등가 응력이 최소화 된다.

후 기

본 연구는 과학기술처 특정연구개발비의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사를 표합니다.

참 고 문 헌

1. "Constant Velocity Joints for Advanced Driveline Engineering," GKN Universal Transmissions GmbH, 1984.
2. S.L. Girguis et al., "Constant Velocity Joints and Their Applications," SAE 780098.
3. E.C. Jr. Charle, Universal Joint and Driveshaft Design Manual, Advanced in Engineering Series, No. 7, SAE, 1979, pp. 337-377.
4. B.D. Bryant, L.M. Keer, "Rough Contact Between Elastically and Geometrically Identical Curved Bodies," ASME J. of Applied Mechanics, June 1982, pp. 345-352.
5. E. Broszeit, O. Zwirlein, "Internal Stresses and Their Influence on Material Stresses in Hertzian Contacts," ASME J. of Trib., Vol. 108, July 1986, pp. 387-393.
6. J.A. Walowit, J.N. Anno, Modern Developments in Lubrication Mechanics, John Wiley & Sons, 1975, pp. 77-84.
7. S.P. Timshenko, J.N. Goodier, Theory of Elasticity, 1970, pp. 409-420.
8. 이준복외 5인, "기계부품시험기술개발(III)," 특정연구개발 사업 보고서 UCN/22-1039. C, 과학기술처, 1988, pp. 262-312
9. G.H. Hamilton, C.E. Goodman, "The Stress Created by Circular Sliding Contact," ASME J. of Applied Mechanics, June 1966, pp. 371-376.
10. T.O. Smith, C.K. Liu, "Stresses Due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid with Application to Some Contact Stress Problems," ASME J. of Applied Mechanics, June 1953, pp. 157-166.
11. A.I. Lure, Three Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, Interscience Pub. 1964, pp. 286-313.
12. A.E.H. Love, A. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York, 1944, pp. 267-270.
13. A.P. Boresi et al., Advanced Mechanics, John Wiley and Sons, 1977, pp. 581-627.
14. R.L. Mattson, W.S. Coleman, Jr., "Effect of Shot-Peening Variable and Residual Stresses on the Fatigue Life of Leaf-Spring Specimens," SAE Trans. Vol. 62, 1954, pp. 546-556.
15. R.C. Juvinal, Engineering Considerations of Stress, Strain, and Strength, McGraw-Hill Inc., 1967, p. 386.