

〈講 座〉

水 擊 作 用 (Ⅱ)

Waterhammer

우 효 섭*
Woo, Hyo-Seop

記號

a : 壓力波의 전파속도	γ : 액체의 단위중량	J : 밸브의 開口率
A : 관의 단면적	A_R : 밸브의 開口部 面積	M : 마하數
F : 외력	C_d : 유량계수	Q : 유량
g : 중력가속도	D : 관 반지름	R : 단 반지름
H : 水頭	E : 탄성체의 Young率	W : Control Volume의 이동속도
K : 액체의 체적 탄성계수	e : 관의 두께	Z : 위치수두
L : 관의길이	F_R : 중력에 의한 힘	α : 管軸의 傾斜
P : 압력	F_s : 축벽에서의 압력에 의한 힘	μ : Poisson率
V : 유속	F_w : 관벽마찰에 의한 힘	τ_0 : 마찰응력
ρ : 액체의 밀도	f : Darcy-Weisbach의 마찰계수	

3. 過渡流의 방정식(Transient Flow Equation)

관내의 과도류의 지배방정식으로 운동량방정식과 연속방정식이 사용된다. 먼저, 과도류의 운동량 방정식을 유도하기 위해 그림(3.1)과 같이 점진적으로 단면이 변하는 관에서 1차원 유체의 흐름을 고려한다.

Newton의 제2법칙에 의하면, Control Volume 내의 질량에 유체의 운동 가속도를 곱한 값은 Control Volume에 미치는 외력들의 합이므로,

$$PA - [PA + \Delta(PA)] + F_s - F_R \sin \alpha - F_w = \rho_l \Delta x A \frac{dV}{dt} \quad (3.1)$$

위식에서, F_s 는 관단면의 점진적 변화에 따른 축벽에서의 압력에 의한 축방향의 힘으로써 다음과 같이 표시된다.

$$F_s = (P + \frac{\Delta P}{2}) \Delta A \quad (3.2)$$

α 는 管軸의 경사이며 F_R 는 중력에 의한 유체의 무게로써 다음과 같이 표시된다.

$$F_R = \rho g \Delta x A \quad (3.3)$$

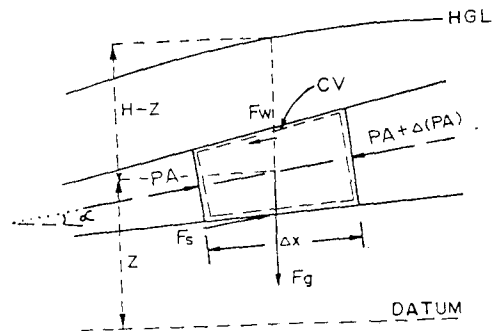


그림 3.1 운동량방정식의 유도를 위한 1차원 흐름

F_w 는 관벽에서의 마찰력으로서 마찰응력 τ_w 를 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$F_w = \tau_w \cdot \pi D \Delta x \quad (3.4)$$

기타 부호들은 前橋에서 이미 정의하였으므로 생략한다. 식(3.2), (3.3), (3.4)를 식(3.1)에 대입하여 정리하면,

$$-\Delta(PA) + (P + \frac{\Delta P}{2})\Delta A - \rho g \Delta x A \sin \alpha - \tau_w \cdot \pi D \Delta x = \rho \Delta x A \frac{dV}{dt} \quad (3.5)$$

Δ 의 2차항을 무시하고 Taylor의 1차급수만을 고려하여 Δ 항을 전개하여 식(3.5)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$P_x A + \rho g A \sin \alpha + \tau_w \cdot \pi D + \rho A \dot{V} = 0 \quad (3.6)$$

윗식에서 P_x 는 x 에 대한 P 의 1차 편미분 ($\partial P / \partial x$)을, \dot{V} 은 t 에 대한 V 의 1차 편미분 (dV/dt)을 나타낸다. 不定流에서의 관벽마찰을 正常流에서의 그것과 같다고 가정하여 Darcy-Weisbach의 공식을 소개하면,

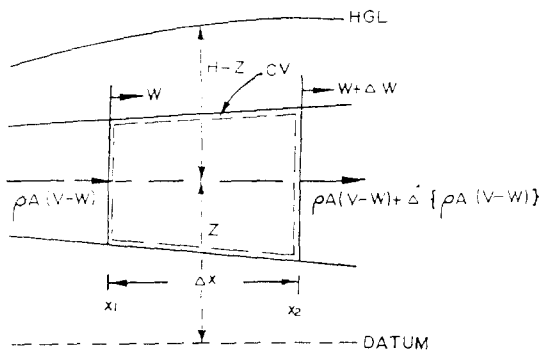
$$\tau_w = \frac{1}{8} \rho f V |V| \quad (3.7)$$

따라서 Darcy-Weisbach의 공식을 이용하여 식(3.6)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V} + \frac{P_x}{\rho} + g \sin \alpha + f \frac{V |V|}{2D} = 0 \quad (3.8)$$

한편, $\dot{V} = VV_x + V_t$ 이므로 관내 과도류의 운동량 방정식은 다음과 같이 표시된다.

과도류의 연속방정식을 구하기 위해 그림 3.2와



3.2 연속방정식의 유도를 위한 1차원 흐름

$$P_x + VV_x + V_t + g \sin \alpha + \frac{fV |V|}{2D} = 0 \quad (3.9)$$

과도류의 연속방정식을 구하기 위해 그림 3.2와 같은 이용 Control Volume에 질량보존의 법칙을 적용한다.

윗 그림에서 W 는 Control Volume이 이동속도를 나타낸다. 질량보존의 법칙에 의하면, 한 Control Volume내의 질량의 순유입량은 그 체적내의 질량의 증가량과 같으므로,

$$-\Delta \{ \rho A (V-W) \} = \frac{d}{dt} (\rho A \Delta x) \quad (3.10)$$

윗 식에서 $\frac{d}{dt}$ 는 Control volume의 이동속도를 고려한, 즉 x 축의 이동에 대한 전미분이며 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{d}{dt} = W \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.11)$$

또한 미소구간 Δx 를 식(3.11)에 의해 미분하면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Delta x) &= \frac{\partial}{\partial t} (\Delta x) \\ &= W \cdot \Delta x \end{aligned} \quad (3.12)$$

따라서, 식(3.11)과 (3.12)를 고려하여 식(3.10)을 전개하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \Delta (\rho A V) - \Delta (\rho A W) + \Delta x \frac{d}{dt} (\rho A) + \rho A W_x \Delta x &= 0 \\ (\rho A V)_x - (\rho A)_x W - \rho A W_x + W (\rho A)_x + (\rho A)_t + \rho A W_x &= 0 \\ \therefore (\rho A V)_x + (\rho A)_t &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

식(3.13)을 전개하여 유체의 이동에 대한 전미분 $\frac{d}{dt}$ 을 이용하면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \rho A V_x + V (\rho A)_x + (\rho A)_t &= 0 \\ \therefore \rho A V_x + \frac{d}{dt} (\rho A) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

여기서,

$$\frac{d}{dt} = V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.15)$$

식(3.14)를 다시 전개하여 정리하면 과도류의 연속방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\rho A V_x + \dot{\rho} A + \rho \dot{A} = 0$$

$$\therefore \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} + V_x = 0 \quad (3.16)$$

식(3.16)은 \dot{A} 과 $\dot{\rho}$ 이 포함되어 있어 실용적이지 못하므로 다음과 같이 관 재료의 응력-변형관계를 이용하여 압력 P로 표시된다. 먼저, 유체의 체적 탄성 계수는 K는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{P}}{K} \quad (3.17)$$

관의 반지름이 R인 원형 단면의 경우 변형도 $\Delta e = \Delta R/R$ 을 이용하면 관단면적과 변형도와 관계는 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\dot{A}}{A} = 2\dot{e} \quad (3.18)$$

관의 재료를 탄성재료로 간주하면 변형도 e과 축방향응력 σ_1 , 원주방향응력 σ_2 와의 관계는 Poisson을 μ 및 Young을 E를 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{e} = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_2 - \mu \dot{\sigma}_1) \quad (3.19)$$

유도과정을 간단히 하기 위해, 본고에서는 Expansion Joint에 의해 축방향의 팽창과 수축이 자유스러운 경우만 고려한다. 이 경우 $\sigma_1 = 0$ 이 되어 식(3.19)는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\dot{e} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} \quad (3.20)$$

한편 σ_2 와 유체의 압력 P와의 관계는 관벽의 두께 t와 관지름 D를 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{\dot{P}D}{2t} \quad (3.21)$$

윗식에서 관경 D나 관두께 t의 변화는 P의 변화에 비해 작으므로 무시되었다. 따라서 식(3.20)과 (3.21)의 관계에서 $\dot{\sigma}_2$ 를 소거하고 \dot{e} 를 식(3.18)에 대입하면 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{P}D}{tE} \quad (3.22)$$

마지막으로, 식(3.17)과 (3.22)를 식(3.16)에 대입하여 정리하면 과도류의 연속방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\dot{P}}{\rho} + a^2 V_x = 0 \quad (3.23)$$

윗식에서 a는 양단이 자유스러운, 탄성재료 관내의 유체에서의 압력파의 전파속도로 다음과 같이 표시된다.

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + \frac{KD}{Et}}} \quad (3.24)$$

식(3.24)에서 알 수 있듯이, 관벽이 매우 두껍고 관재료가 매우 단단한 경우 $\frac{KD}{Et} \ll 1$ 이므로 $a \approx \sqrt{K/\rho}$ 가 되어 압력파의 전파속도는 무한대 유체내의 음파의 전파속도가 된다.

관의 지지상태가 여기서 고려된 것과 다른 경우 식(3.19)의 σ 값의 달라지므로 식(3.24)의 a값 역시 달라지며 이에 대한 구체적인 유도과정은 Wylie와 Streeter의 Fluid Transients(1983)에 잘 나와 있다.

지금까지 유도한 관내과도류의 운동량방정식과 연속방정식을 요약하면 다음과 같다.

운동량방정식

$$\frac{P_x}{\rho} + \dot{V}_t + g \sin \alpha + \frac{fV|V|}{2D} = 0$$

혹은, $\frac{P_x}{\rho} + VV_x + V_t + g \sin \alpha + f \frac{V|V|}{2D} = 0$

연속 방정식

$$\frac{\dot{P}}{\rho} + a^2 V_x = 0$$

혹은, $\frac{P_t}{\rho} + \frac{VP_x}{\rho} + a^2 V_x = 0$

일반적으로, 관내 액체의 흐름은 압력 P보다는 수두 H로써 표시되는 것이 실용적이다. 압력 P는 기준면에서 動水傾斜線까지의 수두 H와 위치수두 Z로써 다음과 같이 표시된다.

$$P=g(H-Z) \quad (3.25.1)$$

$$\text{혹은, } P_s=g(H_s-\sin \alpha) \quad (3.25.2)$$

윗식에서, 액체의 경우 x에 대한 ρ 의 변화는 상대적으로 작으므로 무시되었으나 기체의 경우는 간단히 무시될 수 없으므로 수두 H로 표시된 다음의 식들은 액체의 경우에 국한된다. 식(3.25.2)를 운동량 방정식(3.9)에 대입하여 정리하면,

$$gH_s + VV_s + V_s + f \frac{V |V|}{2D} = 0 \quad (3.26)$$

또한 식(3.25.1)를 연속방정식(3.23)에 대입하여 정리하면,

$$H_s + V(H_s - \sin \alpha) + \frac{a^2}{g} V_s = 0 \quad (3.27)$$

정상류의 경우, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 이므로 운동량방정식(3.26)과 연속방정식(3.27)은 각각 다음과 같이 표시된다.

$$g \frac{dH}{dx} + V \frac{dV}{dx} + f \frac{V |V|}{2D} = 0 \quad (3.28)$$

$$gV \left(\frac{dH}{dx} - \sin \alpha \right) + a^2 \frac{dV}{dx} = 0 \quad (3.29)$$

상기 두 식에서 $\frac{dV}{dx}$ 를 소거하면, $\frac{dH}{dx}$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{dH}{dx} = \left(\frac{fV |V|}{2gD} + M^2 \sin \alpha \right) / (M^2 - 1) \quad (3.20)$$

윗 식에서 M은 Mach수로서, $M=V/a$ 이다. 대부분의 공학적으로 중요한 수격 작용의 경우, $M \cong 0$ 이므로 거리 Δx 에 따른 수두의 변화 H는 식(3.30)에서 다음과 같이 표시된다.

$$\Delta H = -f \frac{\Delta x}{D} \frac{V |V|}{2g} \quad (3.31)$$

윗 식은 잘 알려진 Darch-Weiswach의 마찰공식이다.

4. 特性法을 이용한 수격작용의 해석

식(3.26)과(3.27)로 구성된 관내 과도류의 지배방정식은 준선형(Quasilinear), 쌍곡선(Hyperbolic) 편미분방정식이다. 이 방정식들의 일반적인 해석은 알려져 있지 않으며 컴퓨터를 이용한 수치해석이 널리 사용되고 있다. 이 방정식들의 수치해석의 방법으로서(Applied Hydraulic Transients, Chaudhry, 1987), i) 특성법, ii) 유한차분법, iii) 유한요소법, iv) Spectral Method, v) Boundary-Integral Method등이 있으나 본고에서는 그중 제일 널리 사용되는 특성법에 의한 수치해석에 대해 설명하고자 한다. 특히, 1차원 과도류 해석의 경우 특성법에 의한 수치해석은 다른 방법들에 비해 우수한 것으로 알려져 있다.

4.1 특성방정식(Characteristics Equations)

수두 H와 유속V로 표시된 과도류의 운동량방정식(3.26)과 연속방정식(3.27)은 미지의 매개변수 λ 를 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\left[gH_s + VV_s + V_s + f \frac{V |V|}{2D} \right] + \lambda \left[H_s + V(H_s - V \sin \alpha + \frac{a^2}{g} V_s) \right] = 0$$

$$\text{혹은, } \lambda \left[H_s + (V + \frac{g}{\lambda}) H_s \right] + \left[V_s + (V + \frac{a^2 \lambda}{g}) V_s \right] - \lambda V \sin \alpha + \frac{fV |V|}{2D} = 0 \quad (4.1)$$

편미분방정식인 식(4.1)은 아래식(4.3)과(4.4)을 만족하는 어느 특정한 경우 다음과 같은 상미분방정식으로 변환 될 수 있다. 즉,

$$\lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} - \lambda V \sin \alpha + \frac{fV |V|}{2D} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{여기서, } \frac{dx}{dt} = V + \frac{g}{\lambda} \quad (4.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{a^2 \lambda}{g} \quad (4.4)$$

식(4.3)와(4.4)을 동시에 만족시키는 λ 를 구하면,

$$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad (4.5)$$

$$\text{따라서, } \frac{dx}{dt} = V \pm a \quad (4.6)$$

그러므로, 식(4.2)~(4.6)을 종합하면 다음과 같은 4개의 상미분 특성방정식들이 형성된다.

$$\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} - \frac{gV}{a} \sin \alpha + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{dx}{dt} = V + a \quad (4.8)$$

$$-\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{gV}{a} \sin \alpha + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{dx}{dt} = V - a \quad (4.10)$$

식(4.7)과(4.8)은 통상 C' -Compatibility 방정식이라 하며, 식(4.9)과(4.10)은 C -Compatibility 방정식이라 한다. 다시말하면, 식(4.7)은 x-t 평면상에 식(4.8)이 그리는 선상(그림 4.1에서 C' 선)에서면 성립하고 식(4.9)은 식(4.10)이 그리는 선상(그림 4.1에서 C 선)에서면 성립한다.

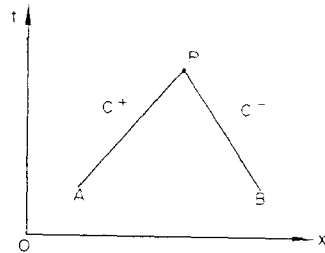


그림 4.1에서, 동상 V값이 a에 비해 매우 작고 또한 a값이 한 관에 대해 일정함으로써 C'와 C 특성곡선들은 직선을 형성한다.

정상류의 경우, 식(4.7)과(4.9)의 해석은 특별한 주의를 요한다. 관의 단면이 변하지 않는 prismatic pipe에서의 정상류의 경우 dV=0라고 보면 식(4.7)은 다음과 같이 간략화 된다.

$$dH = -fa dt \frac{V|V|}{2gD} + V \sin \alpha dt \quad (4.7')$$

식(4.7')은 Darcy-Weisbach(D-W)의 마찰공식에서 어긋나는 것 같이 보인다. 왜냐하면, D-W 공식에 의하면 동수경사선의 변화 dH는 식(4.7')의 우변의 첫번째 항과 같아야 하면 두번째 항은 과잉으로 보이기 때문이다. 이 문제에 대해 흥미로운 논문이 1984년 미Michigan 대학의 Wylie교수에 의해 소개되었다. Wylie 교수의 주장에 의하면, 식(4.7')이 D-W공식과 양립되지 않으므로 연속방정식(3.27)에서 sin α 항은 과잉이며 압력 P로 표시되는 기본적인 연속방정식(3.23)에서 잘못 유도되었다는 것이다. 그의 새로운 유도과정은 액체의 체적 탄성계수 K부터 시작된다. 식(3.17)의 압력 P를 이용한 정의 대신 그는 수두 H를 이용하여 K를 다음과 같이 정의하였으며 따라서 그 결과 얻은 연속방정식은 식(3.29)에서 sin α 항이 포함되지 않았다.

$$K = \frac{\rho g \dot{H}}{\dot{\rho} / \rho}$$

그러나 위의 같은 수두 H를 이용한 K의 정의와 그에 따른 새로운 유도과정은 부정규해석의 전문가들로부터 비판을 받았으며 그도 결국 그러한 비판들을 인정하였다. 사실, 이 문제의 핵심은 가변형관(deformable pipe)이나 압축성 액체의 흐름은 정상류인 경우라도 D-W공식이 성립되는 불변형 prismatic pipe에서의 비압축성 액체의 정상류와 엄밀한 의미에서 다르다는 사실이다. 식(3.16)에서 알수 있듯이 가변형관($\dot{A}/A \neq 0$)내의 비압축성 액체($\dot{\rho}/\rho = 0$)의 흐름이라도 거리 x에 따라 유속 V가 변할 수 있으므로 $V_x \neq 0$ 이며 절대 불변형관($\dot{A}/A = 0$)내의 흐름이라도 액체가 압축성($\dot{\rho}/\rho \neq 0$)인 경우 또한 $V_x \neq 0$ 이므로 식(4.10)은 성립되지 않으며 이러한 정상류의 경우 보다 일반적인 관계식은 식(4.7)에서 다음과 같이 표시된다.

$$(V+a) \frac{dH}{dx} + \frac{a}{g} (V+a) \frac{dV}{dx} - V \sin \alpha + \frac{faV|V|}{2gD} = 0 \quad (4.11)$$

여기서, 정상류의 연속방정식(3.29)를 g로 나누어 뒷식에서 빼면,

$$\frac{dH}{dx} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} + \frac{fV|V|}{2gD} = 0 \quad (4.12)$$

상기식은 운동량방정식이며 식(3.28)과 일치한다. 따라서, 완전한 불변형 prismatic pipe내에 비압축성 액체가 흐르는 경우에만 $dV=0$ 이 되어 식(4.12)는 D-W 공식과 일치하게 된다.

결론적으로, 과도류해석에 귀중한 참고서인 Wylie-Streeter의 Fluid Transients(1983)에 나오는 공식(2.26)~(2.28) (pp.22~23)은 실용적인 면에서 큰 문제가 없을 수도 있으나 해석적인 면에서 부정확한 것들이므로 주의할 요한다.

4.2 差分方程式

특성방정식들 (4.7)~(4.10)은 그림 (4.2)에 C 선(R-P)과 C' 선(S-P)상에서 $t=t$ 에서 $t=t+\Delta t$ 까지 1차 근사 적분할 수 있다. 즉,

$$H_P - H_R + \frac{a_R}{gA} (Q_P - Q_R) - \frac{\sin \alpha}{A} Q_R (t_P - t_R) + \frac{a_R f}{2gDA^2} Q_R |Q_R| (t_P - t_R) = 0 \quad (4.13)$$

$$X_P - X_R = (V_R + a_R)(t_P - t_R) \quad (4.14)$$

$$H_P - H_S - \frac{a_S}{gA} (Q_P - Q_S) - \frac{\sin \alpha}{A} Q_S (t_P - t_S) - \frac{a_S f}{2gDA^2} Q_S |Q_S| (t_P - t_S) = 0 \quad (4.15)$$

$$X_P - X_S = (V_S - a_S)(t_P - t_S) \quad (4.16)$$

위의 네식에서 미지수는 H_P, Q_P, t_P, X_P 등 4개이며

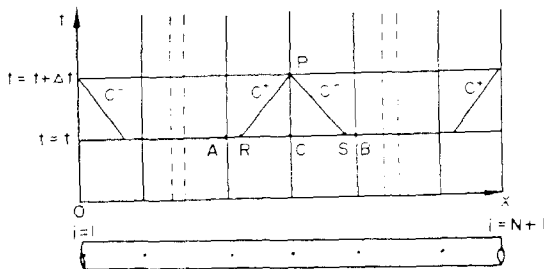


그림 4.2 특성방정식의 계산을 위한 시간 및 거리의 구분

위의 네식에서 미지수는 H_P, Q_P, t_P, X_P 등 4개이며 Specified Time Interval을 사용하는 경우 시간차분간격 Δt 및 거리차분간격 Δx 가 고정되어 있으므로 미지수는 H_P, Q_P 2개로 줄어드나, Characteristics Grid를 사용하는 경우 Δt 와 Δx 모두 미지가 된다. 본고에서는 보다 널리 사용되고 있는 Specified Time Interval에 의한 정규 격자망에서의 차분방정식의 취급에 한정한다.

그림 4.2에서 볼 수 있듯이 $t=t$ 에서의 기지점들은 A,B,C 등이며 R과 S는 미지점들이다. 따라서 $t=t+\Delta t$ 에서 P점의 H 및 Q를 계산하기 위해서는 R과 S점들에서의 이러한 값들을 A,B,C 점들에서의 값들을 가지고 補間法으로 추정하여야 한다. 예로서, Q_R 은 Q_A 와 Q_C 를 이용하여 다음과 같이 추정된다.

$$\frac{X_P - X_R}{X_C - X_A} = \frac{Q_P - Q_R}{Q_C - Q_A} \quad (4.17)$$

Specified Time Interval에서는 $X_C - X_A = \Delta X$ 이며 식(4.14)는 $\Delta X = (V_R + a_R)\Delta t$ 로 되므로 $V_R = Q_R/A$ 를 고려하면 식(4.17)에서 유량 Q_R 은 다음과 같이 주어진다.

$$Q_R = \frac{Q_C - \zeta_R(Q_C - Q_A)}{1 + \frac{\theta}{A}(Q_C - Q_A)} \quad (4.18)$$

마찬가지로, Q_S, H_R, H_S 값들도 보간법으로 각각 다음과 같이 주어진다.

$$Q_S = \frac{Q_C - \zeta_S(Q_C - Q_R)}{1 - \frac{\theta}{A}(Q_C - Q_R)} \quad (4.19)$$

$$H_R = H_C - \left(\frac{Q_R \theta}{A} + \zeta_R \right) (H_C - H_A) \quad (4.20)$$

$$H_S = H_C + \left(\frac{Q_S \theta}{A} - \tau_S \right) (H_C - H_R) \quad (4.21)$$

윗 식들에서 $\theta = \Delta t / \Delta x$ 이며 $\tau = \theta$ 이다. 따라서 식(4.18)~(4.21)을 사용하면 이미 계산된 점들(A, C, B)에서의 값들을 가지고 R과 S에서의

값들을 추정 할 수 있다.

식(4.13)과 (4.15)에서 거리차분점 i에서의 H_{Pi} 는 각각 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$C^+ : H_{Pi} = C_P - BQP_i \quad (4.22)$$

$$C^- : H_{Pi} = C_M + BQP_i \quad (4.23)$$

윗 식들에서 C_P 와 C_M 은 각각 다음과 같다.

$$C_P = H_R + Q_R \left(B_R + \frac{\sin \alpha}{A} \Delta t - \frac{\text{arf} \Delta t}{2gDA^2} |Q_R| \right) \quad (4.24)$$

$$C_M = H_R - Q_R \left(B_R - \frac{\sin \alpha}{A} \Delta t - \frac{\text{arf} \Delta t}{2gDA^2} |Q_R| \right) \quad (4.25)$$

여기서 $B = a/gA$

따라서, 식(4.24)와 (4.25)에서 C_P 와 C_M 을 각각 구하여 식(4.22)와 (4.23)을 연립하여 H_{Pi} 를 구하면,

$$H_{Pi} = (C_P + C_M) / 2 \quad (4.26)$$

또한, Q_{Pi} 는 식(4.26)을 식(4.22)나 (4.23)에 대입하여 구할 수 있다.

차분방정식이 陽解法으로 표시된 경우 항상 주의할 것이 해의 안정성이다. 잘 알려진 Courant-Friedrich-Lewy(CFL)안정조건, 혹은 간략히 Courant조건에 의하면 안정된 해를 얻기 위해서는,

$$V + a \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.27)$$

상기 Courant 조건의 의미는 그림 4.2에서 R과 S가 A나 B의 바깥으로 벗어나면 안된다는 것이다. 단, 식(4.27)로 표시되는 Courant조건은 비선형의 마찰항을 무시하고 유도된 조건이기 때문에 마찰항이 상대적으로 큰 경우 식(4.27)를 만족하여도 해의 안정성이 보장되지 않는다. 예를 들어, 표면처리가 안된 암석터널이나 액체/고체 혼합물

(Slurry)운송관의 경우 마찰항이 상대적으로 크므로 Courant조건에 사용에 주의할 요한다.

4.3 경계조건

그림(4.2)에서 보이는 바와 같이, 계산의 시작점이나 끝점에서는 단지 1개의 Compatibility 방정식만이 가용하기 때문에 식(4.26)을 적용할 수 없으므로 미리 정해진 경계조건들이 필요하다. 수격작용의 해석에 자주 인용되는 대표적인 경계조건들로서는 다음과 같은 것들이 있다.

상류단의 수두를 아는 경우

상류단($i=1$)에 일정한 수위의 저수지가 있거나 기타 수두가 정해진 경우, H_{P1} 은 알 수 있으므로 식(4.25)에서 C_M 을 계산하여 식(4.23)에서 Q_{P1} 을 구할 수 있다.

상류단에 유량이 결정된 경우

상류단에 펌프(positive replacement pump) 등이 있는 경우, Q_{P1} 은 시간의 함수로 표시될 수 있으므로 식(4.23)에서 곧바로 H_{P1} 을 구할 수 있다.

상류단에 유량 수두 관계를 아는 경우

원심펌프 등이 상류단에 설치된 경우 H_{P1} 과 Q_{P1} 의 관계를 펌프 특성 곡선에서 구할 수 있으므로 식(4.23)과 연립하여 풀면 H_{P1} 과 Q_{P1} 을 구할 수 있다.

하류단이 막히 경우(Dead End)

하류단($i=N+1$)이 막힌 경우 유량 $Q_{P_{N+1}}$ 은 0이 되므로 식(4.22)에서 $H_{P_{N+1}}$ 을 구할 수 있다.

하류단이 밸브인 경우

상류단이 저수지이고 하류단이 밸브인 단일관에서의 수격작용의 해석은 가장 기본적인 해석 중의 하나이며 이러한 경계조건은 수격작용해석에 자주 인용되는 경계조건이다. 밸브를 통한 정상류의 유량 Q_0 는 밸브에서의 정상 수두 H_0 로써 다음과

같이 표시된다.

$$Q_0 = (C_d A_k) \sqrt{2gH_0} \quad (4.28)$$

윗식에서 C_d 는 유량계수이며 A_k 밸브의 開口部 면적이다. 식(4.28)을 일반적으로 표시하면,

$$Q_P = (C_d A_k) \sqrt{2g\Delta H} \quad (4.29)$$

윗식에서 ΔH 는 밸브 직상·하류의 수두차이다. 식(4.29)를 식(4.28)로 나누고 무차원 밸브 開口率 J 를 고려하면,

$$Q_P = \frac{Q_0}{\sqrt{H_0}} J \sqrt{\Delta H} \quad (4.30)$$

$$\text{윗식에서 } J = \frac{C_d A_k}{(C_d A_k)_0} \quad (4.31)$$

정상류의 경우 $J=1$ 이며 밸브가 완전히 닫힌 경우 $J=0$ 이 된다. 밸브 직하류의 압력을 대기압으로 보면 식(4.30)에서 $\Delta H = H_{p_{N+1}}$ 이므로 따라서 식(4.30)과 (4.22)를 연립하여 풀면 하류단 밸브에서의 수두 $H_{p_{N+1}}$ 과 유량 $Q_{p_{N+1}}$ 을 구할 수 있다.

4.4 補間에 의한 오차

식(4.18)~(4.21)은 $\Delta x = (V \pm a)\Delta t$ 를 근거로 유도되었으나 대부분의 과도류의 경우 V ,나 H , 등 대류(Convective)항은 V ,나 H ,등에 비해 작으므로 통상 $V \ll a$ 이다. 따라서, $\Delta x = \pm a\Delta t$ 로 가정하면 식(4.18)~(4.21)은 각각 다음과 같이 간략화된다.

$$Q_R = Q_C - \tau_R(Q_C - Q_A) \quad (4.32)$$

$$Q_S = Q_C - \tau_S(Q_C - Q_B) \quad (4.34)$$

$$H_R = H_C - \tau_R(H_C - H_A) \quad (4.34)$$

$$H_S = H_C - \tau_S(H_C - H_B) \quad (4.35)$$

이 경우 $\varphi = \frac{\Delta t}{\Delta x} a$ 이므로 바로 보간의 척도가 되며 이 값은 Courant 조건을 고려 하면, $0 < \tau <$

1.0이어야 한다.

보간법을 사용하여 계산하는 경우, 완전한 보간 방정식(4.18)~(4.21)을 사용하거나 간략화된 보간방정식(4.32)~(4.35)를 사용하면 시간이 계속 지남에 따라 인위적인 Numerical Damping이 발생하여 계산결과에 영향을 준다. 이러한 Damping 효과는 Specified Time Interval 방법에서와 같이 시간 및 거리간격을 고정하고 보간법을 사용하여 계산하는 경우에는 크진 작진 반드시 발생한다. 따라서, 이러한 Numerical Damping에 의한 영향을 최소한 줄이기 위해서는 계산 거리간격(Δx)을 좁히거나 ζ 값을 1에 가깝게 하여 보간효과를 가급적 줄이는 것이다.

4.5 간략화된 특성방정식

플라스틱관과 같이 관재료가 특별히 유연하지 않고 유속 V 가 압력파의 전파속도 a 에 비해 대단히 작은 대부분의 공학적 적용에 있어, 과도류의 운동량 방정식(3.26)에서 Convective 가속도항 VV_x 는 다른 항에 비해 작으며 연속 방정식(3.27)에서 VH_x 항과 $V \sin \alpha$ 항은 다른 항에 비해 작다. 따라서 이런 항들을 무시한 간략화된 운동량방정식과 연속방정식은 각각 다음과 같다.

$$gH_x + V_t + \frac{fv |v|}{2D} = 0 \quad (4.36)$$

$$H_t + \frac{a^2}{g} V_x = 0 \quad (4.37)$$

위의 두식들은 4.1장에서와 같은 방법으로 하나의 상미분방정식으로 변환시키면 그 결과는 다음과 같다.

$$\lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{fV |V|}{2D} = 0 \quad (4.38)$$

$$\text{여기서, } \lambda = \pm \frac{g}{a} \quad (4.39)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (4.40)$$

위의 식들은 4.1장에서와 같은 방법으로 식(4.

22)와 (4.23)과 같은 2개의 Compatibility 방정식들로 변화되어 식(4.26)에서 H_p 값을 구할 수 있다. 단 이때의 C_p 과 C_M 값은 각각 다음과 같다.

$$C_p = H_A + B Q_A - \frac{f \Delta x}{2gDA^2} Q_A | Q_A | \quad (4.41)$$

$$C_M = H_B - B Q_B + \frac{f \Delta x}{2gDA^2} Q_B | Q_B | \quad (4.42)$$

이러한 간략화된 방정식들의 제일 큰 장점은 무엇보다도 그림 4.2와 같은 보간에 의한 계산이 필요하지 않으므로 Numerical Damping의 위험이 없고 계산 과정 역시 간단하다는 것이다. 다시말하면, $\Delta X = \pm a \Delta t$ 이므로 그림 4.2에서 R과 A, S와 B가 각각 일치하게 된다.

4.6 컴퓨터에 의한 계산

이러한 특성방정식을 적분하여 얻은 차분방정식은 컴퓨터를 이용한 계산에 매우 적합하여 특성법을 이용한 많은 컴퓨터 프로그램이 개발되어 있다. 예로서, 잘 알려진 수격작용 관련 참고서인 Fluid Transients에는 1) 밸브에 의한 수격 작용, 2) 직렬 연결된 파이프에서의 수격작용, 3) 배큘밸브에서의 수격작용, 4) 펌프에 의한 수격작용, 5) 터빈에 의한 수격작용, 6) Column Separation에 의한 수격작용 등의 해석을 위한 FORTRAN 프로그램들이 수록되어 있으며, Applied Hydraulic Transients에는, 1) 밸브에 의한 수격작용, 2) 펌프에 의한 수격작용, 3) Surge Tank에서의 수위진동 등에 관한 FORTRAN 프로그램이 수록되어 있으며, Analysis and Control of Unsteady Flow in Pipelines에는, 1) 일반적인 관망에서의 수격작용 외 다수의 FORTRAN 프로그램들이 수록되어 있

다. 이러한 프로그램들의 주 목적은 물론 교육용이나 상당히 세밀히 만들어져 있기 때문에 어느정도 실용적으로 사용될 수 있을 것이다.

P/C 컴퓨터가 보급된 후 수격작용의 해석은 바로 자기책상위에서 가능하여졌으며 1982년 Wylie의 P/C컴퓨터와 관에서의 과도류에 관한 논문이 이러한 시도를 잘 소개하였다.

熱水力學 분야에서의 과도류의 해석을 위한 잘 알려진 컴퓨터모형으로 RELAP series가 있다. 또한 이러한 과도류 해석 결과에 의한 관망에서의 水力을 예측하기 위한 모형의 하나로서 REPIPE가 있다. 이러한 컴퓨터 모형들은 특히 원자력 발전소에서의 냉각수 순환관망의 해석에 진요히 사용되고 있다.

참 고 문 헌

- (1) Wylie, E.B.(1982), *The microcomputer and pipeline transients*, ASCE, J. of Hydraulic Engineering, Vol. No.12 Dec.
- (2) Wylie, E.B.(1984), *Fundamental equations of water hammer*, ASCE, J. of Hydraulic Engineering, Vol.110 No.4 April/Also see discussions of the paper.
- (3) RELAP series(1981), *NUREG/CR 1826 EGG-2070 EG&G Idaho*, Mar.
- (4) REPIPE(1980), *Application Reference Manual*, Cybernet Services, Control Data.
- (5) Watters, G.E (1984), *Analysis and Control of Unsteady Flow in Pipelines*, 2nd Edition, Ann Arbor Science Book, Butterworth Publishers, Stoneham, MA