講 座

有限要素法과 農工學에의 活用 (II)

李 宰 泳

(全北大學校 農科大學 農工學科)

2. 有限要素法의 理論的인 背景

構造解析은 有限要素法이 가장 많이 活用되고 또 발달된 分野이다. 그러나 이 方法의 强力한 面貌는 그외의 여러 分野에 다양하게 適用될 수 있다는데 있다. 특히 農工學에서는 構造力學 以外의 문제에 그 活用度가 더 높다고 본다. 그럼에도 불구하고 많은 사람들이 有限要素法을 단순히 構造解析의 한 方法으로 알고있는 경향이 있다. 이는 有限要素法이 초기에 構造工學者들이 이용했던 直觀的인 概念을 바탕으로 흔히 소개되고 있었음에도 부분적으로 기인한다. 그러나 현재와 같이 발달된 有限要素法에서는 기초의 直觀的 觀念에 의한 定式化는 사실상 거의 이용되지 않고 있다. 이러한 관점에서 여기서는 有限要素法의 理論的인 背景을 普遍性있는 概念을 중심으로 설명하고자 한다.

우리는 여러가지 自然現象을 偏微分方程式으로 表現할수 있다. 주어진 境界條件이나 初期條件과 함께 方程式을 풀면 이 自然現象을 陽函數로 나타낼 수 있게 된다. 그러나 解析的인 方法으로 이와같은 陽函數를 구할 수 있는 경우도 있지만 많은 경우에는 그렇지가 못하다. 이때에 實用的으로 이용되는 것이 數値解法이며, 그중의 한가지 方法이 有限要素法이다.

有限要素法의 着想은 偏微分方程式을 푸는데 있어서 解析領域全體를 한꺼번에 다루는것이 너무 복잡하므로 이를 여러개의 小領域(subdomain)으로 나누어서 單純化시켜서 다루자는 것이다. 이들 小領域을 要素(element)라고 한다. 물론 원래의 偏微分方程式이 각 要素를 공통적으로 支配한다. 그러나 하나의 要素를 독립적으로 놓고보면 幾何學的形狀과 境界條件이 극히 單純化되었으므로 方程式을 좀더 쉽게 취급할 수가 있다. 그래서 한 要素를 支配하는 偏微分方程式을 개략적으로 다음과 같은 線形代數方程式으로 代替할 수 있다.

$$\{f\} = [k]\{u\}$$

이를 有限要素方程式(finite element equation), 또는 要素方程式이라고 한다. 여기서 {u}는 要素를 구성하고 있는 節點(node)에서 自然現象의 擧動을 나타내는 값이며, 方程式을 풀므로서 그 값을 알게되는 未知의 變數이다. 즉 有限要素法에서 얻는 해답은 陽函數의 形態가 아니라 節點이라는 제한된 位置에서의 函數값으로 주어진다. 여타의 數値解法에서도 一般的으로 이와 같은 形式의 結果를 얻게된다. 한 要素내의 未知變數의 數가 n이라면 要素方程式은

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix}$$

와 같은 形態를 갖는다.

要素方程式이 각 要素에 대해서 개별적으로

* 第31卷 1號 27페이지 繼續

구해지면, 각 要素간의 連續性이라는 條件에 따라서 이들 方程式을 결합하여 解析領域全體에 대한 線形代數方程式을 얻게된다.

$$\{f\} = [k]\{u\}$$

이를 全體方程式(global system equations)이라고하며, 問題의 種類에 따라서 $\{F\}$, $[K]$ 및 $\{U\}$가 의미하는 바는 表-1과 같다.

위의 方程式에서 $\{F\}$와 $[K]$는 우리가 이미 알고 있는 값으로 부터 직접 구할 수 있으며,

表-1. 方程式의 構成因子.

問題의 種類	{U}의 係數	[K]의 係數	{F}의 係數
應力	變位	剛性度	荷重
熱傳導	溫度	熱傳導率	熱源의 發熱量
地下水흐름	水頭	透水係數	流量의 發生量
電氣傳導	電壓	電氣傳導度	電流賦荷
流出	流量	粗度係數또는 流出係數등	降水量

$$\{U\}^T = \lceil U_1\ U_2 \cdots\cdots\cdots U_N \rfloor$$

는 解析領域 全體의 N개의 未知變數를 나타내는데, 方程式에 境界條件(이미 알고 있는 U_i의 값)을 代入하여 풀면 그 값을 구할 수 있다.

有限要素法의 중심적인 課題는 크게 다음의 두가지라고 할 수 있다.

1) 要素方程式을 어떻게 세울 것인가?

2) 要素方程式을 어떻게 조립하여 全體方程式을 만들고, 또 이를 풀 것인가?

첫번째 課題를 要素의 定式化(formulation of finite elements)라고 하고, 두번째 課題를 方程式의 組立解法(assembly and solution of system equations)이라고 한다.

가. 要素의 定式化

要素의 定式化는 解析領域全體에 대한 支配偏微分方程式으로부터 要素方程式을 誘導하는 課程을 의미한다. 이는 有限要素法에 있어서 가장 핵심적인 課題이며, 有限要素解析의 效率性과 正確性을 좌우하는 중요한 부분이다. 그래서 有限要素法에 관해서는 지금까지의 가장 많은 연구가 要素의 定式化와 관련되어 왔다. 要素의 定式化를 위한 方法은 대체로 直接的인 方法, 變分的 方法 및 加重殘差法의 세가지로 分類된다.

1) 直接的인 方法

이 方法은 有限要素法의 初期에 주로 構造工學者들이 直觀的인 概念을 바탕으로 구사하였던 것으로, 要素내에서 構成因子들간의 理想化된 物理的인 관계에 근거하여 直接的으로 方程式을 유도하는 方法이다. 이 方法은 간단한 問題와 간단한 要素에만 적용할 수 있으므로 普遍性이 없으며 解析結果의 收斂性을 數學的으로 立證할 수 없다는 단점을 지니고 있어서 요즈음 새로 개발되는 (定式化되는)要素에서는 이 方法이 거의 사용되지 않는다. 이 方法을 설명하기 위해서는 어떤 특정한 問題(주로 構造力學의 問題)를 예로 들어야 한다. 앞에서도 이미 언급했듯이 有限要素法이 構造解析과 같은 특정한 問題를 위한 方法이라는 인상을 주지 않기 위해서 여기서는 直接的인 方法에 대한 구체적인 설명은 생략하고, 나머지 두 方法에 대해서 좀더 상세히 살펴 보겠다.

2) 變分的 方法

가) 問題의 形成

이미 앞에서 언급했듯이 有限要素法은 境界値問題의 偏微分方程式을 풀어내는 數値解法의 일종이다. 여기서 境界値問題란 일반화된 표현을 쓰자면, 그림. 2와 같은 解析領域Ω에 대한 支配方程式

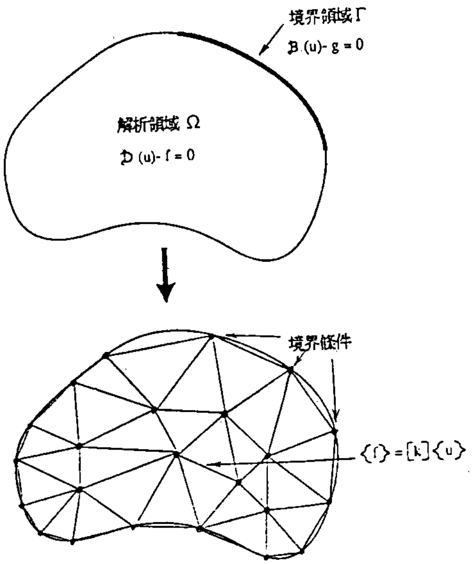

그림. 2. 有限要素模型.

$$D(u)-f=0$$

와 境界領域 Γ에 따른 境界條件

$$B(u)-g=0$$

에 의해서 규정되는 物理現象의 여러 問題를 의미한다. 가장 잘 알려진 간단한 例를 들자면 보의 굽힘에 대한 支配方程式은

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}+M=0$$

이며, 境界條件은

$$\frac{dw}{dx}=\theta \text{ (境界에서 처짐각)}$$

또는

$$W=\delta \quad \text{(境界에서 처짐)}$$

등이다. 다른 한가지 쉬운 例를 들면 地下水의 흐름에 대한 支配方程式은

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

이며 境界條件은

$$V_n=\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \text{ (境界領域에 수직인 速度成分)}$$

등이다.

나. 變分原理

위와 같은 支配方程式을 풀면 우리가 원하는 결과를 얻게된다. 그런데 支配方程式에 대응되는 모종의 汎函數(functional, 函數의 函數)가 있다고 하자. 또 이 汎函數의 停留値(最大 또는 最小値)가 바로 支配方程式을 충족시킨다고 하자. 그러면 支配方程式을 풀어서 해를 구하는 대신에 汎函數의 停留値를 구하므로서 원하는 결과를 얻을 수 있을 것이다. 실제로 많은 경우에 이러한 汎函數가 존재한다. 즉 위의 支配方程式에 대응되는 汎函數를

$$\Pi\int_{\Omega}f(\Omega,\ u,\ u')d\Omega$$

라고하면, 支配方程式을 충족시키는 解 u_0에 대해서는

$$\frac{d\Pi(u_0)}{du}=0$$

이 성립된다. 그 逆이 반드시 성립되는 것은 아니다. 이를 變分原理(variational principle)라고 하며, 이 汎函數의 停留値를 구하는 방법을 變分法(variational calculus)이라고 한다.

變分法에서는 첫째 支配方程式에 대응되는 汎函數를 찾는 것과 둘째 汎函數의 停留値를 구하는 것이 문제가 된다. 예를 들어서 汎函數 공식에 의하면 위의 보의 굽힘에 대한 支配方程式으로부터 汎函數

$$\Pi=\int_0^L\left(\frac{1}{2}EI\left(\frac{dw}{dx}\right)^2-M\right)dx$$

와, 地下水흐름의 支配方程式에 대응되는 汎函數

$$\Pi=\int_R\left(\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2\right)dx\ dy$$

를 구할 수 있다. 그러나 경우에 따라서는 이 汎函數를 구태여 유도할 필요가 없다. 왜냐하면 變分原理에 대응되는 물리적인 법칙이 존재하기 때문이다. 예를 들어서 구조역학에 있어서 잘 알려진 "最小포텐셜에너지의 정리"는 바로 이와 같은 變分原理에 해당되며 總포텐셜에너지는

汎函數와 일치한다. 그러므로 구조역학에 있어서 最小포텐셜에너지를 적용하는 것은 곧 變分原理를 적용하는 것과 동일하다.

다. Rayleigh-Ritz의 方法

Rayleigh-Ritz방법은 주어진 汎函數의 停留値를 試行函數(trial function)에 의하여 數値的으로 구하는 방법이다. 정확한 解를 u_0라고하면 일련의 試行函數에 의하여 이를 近似化할 수 있다.

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i$$

여기에서 $\phi_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$는 一次獨立的인 基底函數이며 상수 a_i는 위의 汎函數가 停留値(일반적으로 最小値)를 갖도록 정해진다. n이 무한대로 커짐에 따라서 u가 u_0에 접근한다면 試行函數가 정확한 解에 수렴한다고 할 수 있다. 위의 보의 굽힘문제를 다시 例로 들자면 試行函數를 $w=a_1x(L-x)+a_2x^2(L-x)^2$로 가정하면

$$\prod = \int_0^L \left\{\frac{1}{2}EI\left(a_1(L-2x)+a_2(4x^3-3Lx^2+2L^2x)\right)^2 - M\right\}dx$$

이며, 상수 a_1과 a_2는 $\prod$를 最小化하는 값으로서 결정된다. 즉

$$\frac{\partial\prod}{\partial a_1}=0 \qquad \frac{\partial\prod}{\partial a_2}=0$$

두 식을 연립해서 풀므로서 a_1과 a_2를 구하여 원래의 試行函數에 대입하면 이것이 곧 구하고자하는 근사 解이다.

라. 有限要素法과 Rayleigh-Ritz方法

有限要素法과 Rayleigh-Ritz방법은 근본적으로 동일한 방법이라고 할 수 있다. 다만 後者가 解析領域전체에 대한 試行函數를 가정하는데 반해서 前者의 試行函數는 개개의 要素에 국한된다는데 차이가 있을 뿐이다. 이 두방법의 공동점은 다음과 같다.

① 試行函數를 가정하여 近似解를 구한다.

② 試行函數를 基底函數의 線形組合으로 가정한다.

③ 주어진 汎函數를 최소화하는 試行函數를 찾아서 解를 구한다.

有限要素法에 있어서 試行函數는 우리가 구하려고 하는 節點의 未知變數에 관한 식으로 전환할 수 있다. 즉

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i$$

의 꼴로된 試行函數에 節點에서의 ϕ_i값을 대입하므로서

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i \qquad \text{or} \qquad u = [N]\{u\}$$

의 형태로 바꿀 수 있다. 여기서 n는 要素의 節點數 u_i는 節點의 未知變數를 나타내며, N_i를 補間函數(interpolation function)라고 한다. 이제 汎函數는

$$\prod = \prod(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)$$

와 같이 節點의 未知變數에 관한 函數로 나타낼수 있다. 汎函數가 停留値를 갖기위한 條件으로서

$$\frac{\partial\prod}{\partial u_1}=0, \quad \frac{\partial\prod}{\partial u_2}=0, \cdots\cdots, \quad \frac{\partial\prod}{\partial u_n}=0$$

이 성립되는데, 이들 條件式으로부터

$$\{f\} = [k]\{u\}$$

형태의 要素方程式을 얻게된다. 지금까지 설명한 방법에 따라서 變分的方法에 의한 要素의 定式化가 이루어진다.

3) 加重殘差法

앞에서 언급한 支配方程式의 정확한 해를 u_0라고 할때 이를 원래의 方程式에 대입하면 주어진 支配方程式이 정확히 만족되므로

$$D(u_0) - f = 0$$

을 얻게된다. 그러나 數値解析法에서는 정확한 解 대신에 이에 가까운 近似解를 찾으려고 한다. 이를 위해서 試行函數로 구성된 試行解(trial solution)를 가정했다고 하자. 이때 試行解는 일반적으로 支配方程式을 정확히 만족시키지 못하므로

$$R = D(\hat{u}) - f \neq 0$$

이다. 여기서 R을 殘差(residual)라고 하며 試行解의 誤差를 의미한다. R이 작을수록 試行解가 정확한·解에 가깝다고 기대할 수 있다.(그러나 반드시 그런것이 아니다. 즉 R이 작아야 한다는 것은 정확한 解에 근접하기 위한 必要條件이지 充分條件은 아니다.) 여기서 정확한 解에 가장 근접한 解를 얻기위해서 試行解가 殘差의 解析領域 전체에 걸친 積分値 $\int_\Omega R\, d\Omega$를 最小化하는 條件을 부여할 수 있을 것이다. 加重殘差法(method of weighted residual)은 이와 같은 관념에 바탕을 둔 數値解析의 일종이다. 이 방법은 殘差의 積分値를 最小化하는 대신에 殘差의 加重積分値가 零이라는 條件을 부여한다. 즉

$$\int_\Omega W_i R\, d\Omega = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots, n)$$

여기서 W_i를 加重函數(weighting function)라고 한다. 加重殘差法은 加重函數를 가정하는 방법에 따라서 配置法(collocation method), 最少自乘法(least squares method), 小領域法(subdomain method), Galerkin法등으로 구분된다. 이중에서 마지막의, 방법, 즉 Galerkin의 加重殘差法이 有限要素法에서 가장많이 쓰이고 있다.

Galerkin法은 加重函數로 補間函數 또는 試行函數를 사용한다. 즉

$$W_i = N_i \qquad \text{or} \qquad W_i = \phi_i$$

이며, 殘差를 最小化하기 위한 Galerkin은 基準은

$$\int_\Omega N_i\, R\, d\Omega = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots, n)$$

이며 이에 의하여 n개의 방정식을 얻게된다. Galerkin의 加重殘差法에 의한 有限要素의 定式化過程을 간단히 요약하면 다음과 같다.

가) 試行函數를 가정한다.

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{n} N\, u_i = [N]\{u\}$$

나) Galerkin의 加重殘差 基準에 代入한다.

$$\int_\Omega N\ D(\hat{u}) - f\}\, d\Omega = 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

다) 위의 n개의 식에 Green의 定理(또는 部分積分)를 적용하면 앞에서와 같이

$$\{f\} = [k]\{u\}$$

형태의 有限要素方程式을 얻게된다.

나. 方程式의 組立과 풀이

方程式의 組立은 個個의 要素에 대한 要素方程式을 결합하여 全體方程式을 얻는 과정을 의미한다. 要素方程式의 結合은 인접한 要素間의 連續性(inter-element continuity), 또는 適合性(compatibility)에 근거하여 이루어진다. 要素間의 連續性이란 앞의 보의 굽힘 문제를 예로들자면 어떤 지점에서 인접한 경간의 처짐과 처짐각이 같다는 조건을 말한다. 또한 그림. 3과 같이 인접한 두 要素 A와 B의 공통된 節點 k와 m에서 未知變數의 값 u_k와 u_m가 동일하여야 한다는 조건이 바로 要素간의 連續性이다. 이러한 連續性으로 인하여 개개의 要素方程式들 사이에는 공통된 未知變數가 존재한다. 이와같은 要素方程式들의 상호연관성에 근거하여 全體方程式을

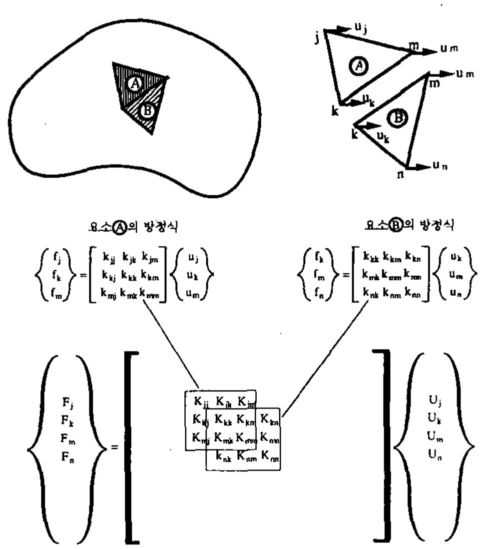

그림.3. 要素間의 連續性과 方程式의 組立.

組立할수 있다. 그림. 3의 경우를 예로들면 全體方程式의 未知變數는 個個要素의 未知變數와 일치한다. 즉,

$$U_k = u_k^A = u_k^B = \cdots\cdots$$

이며 우변의 列백터 {F}의 係數는

$$F_k = f_k^A = f_k^B + \cdots\cdots$$

行列[K]의 係數는

$$K_{km} = k_{km}^A = k_{km}^B + \cdots\cdots$$

이다. 이러한 관계에 따라서 解析領域안에 있는 모든 要素의 {f}를 組立하여 {F}를 만들고, [K]를 組立하여 [K]를 만들면 全體方程式이 完成된다. 行列[K]는 일반적으로 다음과 같은 몇가지 특성을 갖고 있다.

1) 對稱인 正方行列이다. (對稱이 아닌 특수한 경우도 있음)

2) 陽의 正値行列(positive definite matrix)이다.

3) 帶象行列이다.

有限要素解析의 效率性(컴퓨터의 計算時間과 所要記憶容量)을 높이기 위하여 方程式의 組立과 풀이에는 이러한 특성이 최대한으로 이용된다. 실제적인 有限要素解析에 있어서 많이 이용되는 方程式의 組立解法은 대표적으로 다음과 같다.

1) band matrix algorithm : 行列[K]에서 有效數値를 모두 포함하는, 對角線에 인접한 일정부분을 직사각형의 配列로 組立하고 푸는 方法

2) skyline(profile) algorithm : 行列[K]에서 零이 아닌 부분만을 一次配列로 組立하여 푸는 方法

3) frontal solution algorithm : 補助記憶裝置를 이용하여 方程式의 일부를 組立함과 동시에 풀어가는 方法

이 중에서 첫번째 方法은 다른 方法에 비하여 效率性이 떨어지기 때문에 현재에서 별로 이용되지 않는다. 최근에는 뒤의 두 方法을 절충한 blocked skyline solution algorithm과 같은 方法이 많이 이용되고 있다.