Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 14, No. 2, Dec., 1989

콘테이너 선박 운항경로 문제의 모형화와 해법

성기석* · 박순달*

A Modeling and Solution Method for Routing of Container Ship

Ki-Seok Sung* and Soon-Dal Park*

요 약

콘테이너 선박은 출발항과 종착항의 두 항구 사이를 잇는 지정된 항로를 오가면서 항로의 중도에 있는 각 항구에 기항하여 화물을 상 · 하역하는 형태로 각 항구 사이의 화물운송을 수행한다. 이때 이윤을 최대화 하기 위해서 선박을 어느 항구에 기항하고, 또 기항하는 항구에서는 얼마만큼의 화물을 상 · 하역할 것인지를 적절하게 결정해야 한다.

이러한 콘테이너 선박 운항경로 문제를 모형화 하고, 0-1 혼합정수 계획법을 이용한 수리모형을 제시한 후, 최소비용 흐름문제와 분지한계 기법을 이용한 최적해법을 제시하였다.

본 논문에서 제시한 해법에서는 먼저, 기항하기로 한 항구의 집합에 따라 부분문제를 정의한다. 그리고 분해된 각 부분문제를 최소비용 흐름문제를 이용하여 풀어서 하한값을 구한다. 또한 분해된 부분문제에서 추가로 기항할 항구들에 대한 운항구간의 적재 한계와 운항비용을 완화시킨 문제를 정의하고, 그것을 다시 최소비용 흐름문제를 이용하여 풀어서 상한값을 구한다. 이와 같은 방법으로 각 부분문제의 하한값과 상한값을 계산하여, 그것을 이용하여 분지를 절단하고, 또한 상한값이 높은 부분문제를 우선적으로 선택하여 분지함으로써 최적해를 구한다.

1. 서 론

화물을 운송하는 수단은 그 형태에 따라 육상운송, 해상운송, 항공운송으로 나누어진다. 육상운송 수단은 도로를 이용하는 트럭과 철도를 이용하는 기차가 주류를 이루고, 해상운송 수단으로는 탱커선박, 벌크선박, 콘테이너 선박 등의 여러 종류의 선박들이 있으며, 항공운송 수단으로는 항공기가 있다.

이들 운송수단들은 제각기 독특한 특성을 가

* 서울대학교 공과대학 산업공학과

지고 있다. 즉 트럭이나 기차는 내륙운송의 대부분을 차지하고 있으며, 손쉽게 이용할 수 있는 장점이 있다. 선박은 항구가 인접한 경우에만 사용할 수 있어서 트럭이나 기차에 비해서 가용성(availability)이 떨어진다. 그러나 대량의 화물을 먼거리에 운송할 경우에는 트럭이나 기차에 비교가 되지 않을 만큼 비용이 적게 드는 장점이 있다. 항공운송의 경우에는 비용이 많이 들기는 하지만 먼거리를 신속하게 운송할 수 있는 장점이 있다.

산업과 무역이 발달함에 따라 장거리에 걸친 국제간의 재화의 교류량이 많아지고, 그에 따라 대량의 화물을 장거리에 저렴한 비용으로 운송할 수 있는 운송수단인 선박이 화물운송의 주류를 이루게 되었다.

따라서 선박을 운용할 때 운항경로를 적절히 정하여 선박을 운용함으로써 얻는 이윤을 높일 수 있도록 해야 한다. 선박의 경로일정 문제는 차량경로 일정문제와 유사하다. 그러나 선박, 화물, 항구 및 해운업무 등의 특성에 따른 제약요소와 비용발생 요소가 많아서 차량의 경우보다 일반적으로 복잡하다. 그 차이점을 몇가지 들어보면 다음과 같다.

— 선박 일정계획은 운용형태(liner, tramp, industrial operation)에 따라 달라진다.

— 차량 일정문제에서는 모든 차량이 출발한 차고로 돌아와야 합법경로를 이루나, 선박 일정문제에서는 반드시 출발지로 돌아올 필요는 없다.

— 선박 일정계획은 기상조건, 장거리 항해 등으로 인한 불확실성이 높아서 잦은 계획의 변경이 요구된다.

— 차량은 보통 낮시간에만 운행하지만, 선박은 24시간 운항한다.

— 선박은 운항중에 목적지가 바뀔수 있다.

한편 선박 일정문제는 차량에 비해 부수된 비용이 큼에도 불구하고, 다음과 같은 이유로 인해서 연구를 많이 하지 못해 왔다.

— 사용성이 적다. 대부분의 화물들이 차량이나 기차로 운반되어지고, 선박은 국제간의 무역과 같이 제한된 경우에만 사용되고 있다.

— 차량 일정문제 보다 덜 구조화 되어 있다.

— 선박 운항에는 기상조건, 기계적인 문제, 파업 등으로 인해 운항 지연이 자주 발생하고, 많은 불확실성이 내포되어 있지만 높은 운용비 때문에 일정계획에는 여유가 적다.

— 선박은 국제간의 무역에 주로 사용되기 때문에 운항 일정계획을 연구하기 보다는 국제간의 법규나 규약 등을 개선함으로써 비용을 절약하려고 노력해 왔다.

— 해운업계가 오랜 전통을 가지고 있어서 매우 보수적이다.

그러나 선박의 운용에 부수되는 비용이 매우 크므로, 현재의 운항일정 계획을 개선함으로써 많은 비용을 절감할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 선박운용 모델

David Ronen(1982)은 선박의 운용 형태를 정기선(Liner operation), 부정기선(Tramp operation), 화주 운용선(Industrial operation)의 세가지로 분류하였다.

정기선은 지정된 항로를 따라 지정된 시간에 각 항구에 기항하여 화물을 상·하역하면서 항로상에 있는 항구들간의 화물운송을 수행하는 것으로서 버스의 운용형태와 유사하다.

부정기선은 특정한 항구 사이의 화물운송 요청이 있으면, 그 요구에 따라 화물의 출발항에서 상역하고 도착항에서 하역함으로써 화물운송을

수행하는 것으로서 콜택시의 운행 형태와 유사하다.

화주 운용선은 대량의 화물운송을 필요로 하는 산업체에서 자기 소유, 또는 임대한 선박을 자체적으로 운항 경로일정을 결정하면서 자신들이 필요로 하는 화물운송을 수행하는 것으로서 화주가 직접 운용하는 트럭의 운행 형태와 유사하다.

Bellmore, Bennington 과 Lubore(1971)는 두 항구 사이의 화물을 운송하는 선박 수를 최소화 하는 문제를 선형계획법을 이용하여 풀었다. 또한 이들은 다종의 선박을 이용하여 분적이 허용된 화물을 지정된 일자에 운송하는 문제를 분지한계법과 네트워크 부분문제를 이용하여 풀었다.

Mckay 와 Hartley(1974)는 위의 문제에 다종의 화물과 선박의 특정 항구에 대한 접안가능 여부와 상품구입을 고려한 문제를 혼합 정수계획법으로 모형화 하고 특별한 rounding procedure 를 가진 선형계획법으로 풀었다.

Rao 와 Zionts(1968)는 두 지점간의 화물을 운송하는 경로문제를 열 제조법(column generation method)을 이용하여 풀었다.

Ronen(1986)은 하나의 다종의 선박을 이용하여 분적이 허용된 재화를 하나의 공급 항구에서 다수의 수요 항구로 운송하는 일정문제를 비선형 혼합 정수계획법으로 수리모형을 세우고, 수송문제 해법을 이용하여 풀었다. 또 그는 대형의 문제를 풀기 위해 두가지의 발견적 기법을 제시하였다.

Brown, Graves 와 Ronen 은 공급지가 여러개인 원유 수송문제를 집합분할 문제(set partitioning problem)로 정형화 하여 풀었다. 이 방법에서는 각 선박에 대해 각 항구에의 접안가능 여부 등의 제약조건을 만족하는 가능 경로들을 미리 구해야 하는데, 그러한 가능 경로들의 수가 많아서 집합분할 기법의 수렴도가 떨어진다.

K. Rana, R.G. Vickson(1987)은 선박의 임대형태를 Barboat charter, Time charter, Voyage charter 의 세가지로 분류하고, 정기선 운용에 있어서 하나의 시간임대 선박(Time characted ship)을 추가하여 운용하는 문제를 모형화 하고 Bender's partitioning method 를 이용하여 최적해법을 제시했다.

본 연구에서는 한대의 콘테이너 선박을 운용하는데 있어서, 선박이 운항할 항로상의 각 항구들에 기항할 것인지의 여부와, 기항하는 항구에서 어느 목적지로 가는 화물을 얼마만큼 실을 것인지를 결정하는 문제를 모형화 하고 분지한계법을 이용하는 최적해법을 제시한다. 특히 이 논문에서는 기항할 항구의 집합에 따라 부분문제를 생성하고, 또 생성된 각 부분문제를 최소비용 흐름문제를 이용하여 풀어서 최적해의 상한값과 하한값을 효율적으로 구할수 있게 했다.

3. 콘테이너 선박의 운항경로 문제

콘테이너 선박을 운용하는 대부분의 해운회사들은 출발항과 종착항의 두 항구 사이를 잇는 지정된 항로를 오가면서 항로의 중도에 있는 각 항구에 기항하여 화물을 상·하역하는 형태로 각 항구 사이의 여러 종류의 일반 화물운송을 수행한다.

콘테이너를 이용한 운송은 화물 자체가 여러 종류일지라도 일단 콘테이너에 넣어지면 모두

동일한 형태로 되므로 화물의 종류에 따른 취급상의 차이를 두지 않아도 된다.

해운회사들은 하나의 항로에 여러대의 콘테이너 선박을 각각의 운항경로를 따라 정기적으로 운항시키면서 각 항구 사이에 발생하는 화물을 운송해 주면서 이윤을 얻고 있다.

그런데 화물운송에 대한 수요가 증가하면, 그 증가된 화물을 운송하기 위해서 다른 회사나 선주들로부터 선박을 임대하여 기존의 항로에 추가로 배정하여 운항시킬 경우가 있다. 이때 이윤을 최대화 하기 위해서 추가로 운항할 선박을 어느 항구에 기항하고, 기항하는 항구에서는 얼마만큼의 화물을 상·하역할 것인지를 적절하게 결정해야 한다.

선박을 운용함으로써 얻는 이득으로서는, 각 항구 사이의 화물을 운송하여줌으로써 지불받는 운임이 있다.

비용은 운항거리, 선박의 속도 등에 따라 달라지는 연료비용, 선박의 유지보수 비용, 보험료, 항구 사용료 등이 있으며, 이들은 기항하는 각 항구내에서 발생하는 비용과 항구 사이의 운항구간에서 발생하는 비용으로 분류할 수 있다. 이들은 모두 두 항구 사이를 직속(Direct) 운항하는데 필요한 비용으로 합해서 나타낼 수 있다.

한편 선박은 만재 한계가 정해져 있으며, 항로상의 각 운항구간과 기항하는 항구의 특성에 따라서 적재 한계가 제한된다.

선박은 출발항을 떠나 지정된 항로상의 항구들에 기항하면서 종착항까지 가서는 다시 같은 항로를 따라 되돌아 온다. 돌아올 때에는 갈때에 기항했던 것과 똑같은 항구에 기항할 필요는 없다. 다만 각 항구 사이의 운항비용과 적재한계 등의 제약때문에 항로상에서 기항하는 항구에 따라 이윤에 영향을 준다.

따라서 임대한 선박을 운용할 때, 선박의 적재용량의 제약하에서 이윤을 최대로 하기 위해서 지정된 항로상의 어느 항구에 기항하며, 얼마만큼의 화물을 운송할 것인지를 결정해야 한다.

이와 같은 콘테이너 선박의 운항경로 결정에 있어서 고려되어야 할 요소들과 각 요소들에 관련한 제약조건, 그리고 최적 경로결정의 목적함수 등을 살펴보면 다음과 같다.

1) 항로 : 출발항으로부터 종착항에 이르는 선박의 전반적인 항해 경로이다. 선박은 지정된 항로를 따라 움직이며, 항로에 인접한 항구들에 기항한다.

2) 항구 : 항로에 인접하고 있으며, 선박이 기항하여 화물을 상·하역하는 곳이다. 기항하는 항구에서의 항구 사용료는 각 항구에 따라 다르다.

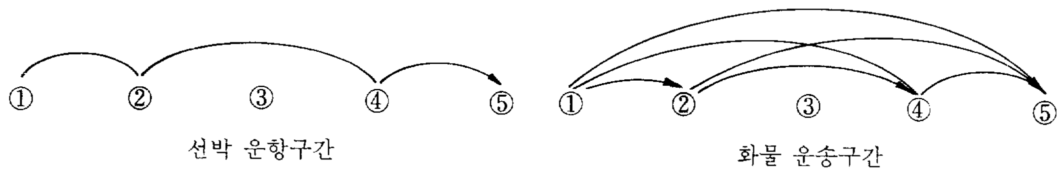
3) 선박 : 선박은 항로를 따라 왕복하면서 중도의 항구들에 기항하여 화물을 운송한다. 이때 선박이 항로상의 운항구간을 운항할 때 적재한계, 운항비용은 각 운항구간별로 다르다.

4) 화물 : 항로상에서 선박의 기항이 가능한 각 항구들 사이에 화물운송 수요가 발생한다. 각 화물은 화물운송 구간별로 단위당 운임을 다르게 받는다. 또한 각 운송구간별로 화물의 운송수요가 다른데, 이들 화물 운송수요는 주어진 계획기간 동안의 예측치로써 사용한다. 선박은 이 예측된 운송 수요량의 한도내에서 화물을 운송할 수 있다.

5) 목적함수 : 선박의 운항경로는 화물을 운송함으로써 얻는 수입에서 각 운항구간에서의 운항비용을 뺀 이윤을 최대화 하도록 정해야 한다. 이때 결정해야 할 것은 기항해야 할 항구와 화물운송 구간별 운송량이다.

한편 선박운항 구간이란 각 항구를 직접 연결하는 선박의 운항하는 구간이며, 화물운송 구간이란 선박의 운항구간과는 달리 선박의 운항경

로상에서 연결 가능한 화물의 선적항과 하역항 사이의 구간을 말한다. 선박운항 구간과 화물운송 구간을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 1] 선박 운항구간과 화물운송 구간

3.1 수리모형

위와 같은 문제를 0-1 혼합 정수계획법으로 수리 모형화 하면 다음의 문제 [P1]과 같다.

[P1] : 원문제의 수리모형

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (r_{ij}\, y_{ij} - c_{ij}\, x_{ij}) \quad \cdots\cdots \text{(1) Revenue}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{s.t. } \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=j}^{n} y_{pq} \le a_{ij} + M(1-x_{ij}), \\ \quad i=1, 2, \cdots, n-1,\ j=i+1, \cdots, n \end{array}\right] \cdots\cdots \text{(2a) Outbound Capacity}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{p=i}^{n} \sum_{q=1}^{j} y_{pq} \le a_{ij} + M(1-x_{ij}), \\ i=2, \cdots, n,\ j=1, \cdots, i-1 \end{array}\right] \cdots\cdots \text{(2b) Inbound Capacity}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{ij} \le d_{ij} \left(\sum_{q=i+1}^{j} x_{iq}\right), \\ i=1, 2, \cdots, n-1,\ j=i+1, \cdots, n \end{array}\right] \cdots\cdots \text{(3a) Outbound Departure}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{ij} \le d_{ij} \left(\sum_{q=j}^{i-1} x_{iq}\right), \\ i=2, \cdots, n,\ j=1, \cdots, i-1 \end{array}\right] \cdots\cdots \text{(3b) Inbound Departure}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{ij} \le d_{ij} \left(\sum_{p=i}^{j-1} x_{pj}\right), \\ i=1, 2, \cdots, n-1,\ j=i+1, \cdots, n \end{array}\right] \cdots\cdots \text{(4a) Outbound Arrival}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{ij} \le d_{ij} \left(\sum_{p=j+1}^{i} x_{pj}\right), \\ i=2, \cdots, n,\ j=1, \cdots, i-1 \end{array}\right] \cdots\cdots \text{(4b) Inbound Arrival}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=2}^{n} x_{1j} = 1, \\ \sum_{i=1}^{p-1} x_{ip} - \sum_{j=p+1}^{n} x_{pj} = 0,\ p=2, 3, \cdots, n-1 \end{array}\right] \cdots\cdots \text{(5a) Outbound Network}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=2}^{n} x_{i1} = 1, \\ \sum_{i=p+1}^{n} x_{ip} - \sum_{j=1}^{p-1} x_{pj} = 0,\ p=2, 3, \cdots, n-1 \end{array}\right] \cdots\cdots \text{(5b) Inbound Network}$$

$$y_{ij} \ge 0,\ x_{ij} \in \{0, 1\},\ i=1, 2, \cdots, n-1,\ j=i+1, \cdots, n$$

위의 수리모형에서 각 변수와 기호는 다음과 같이 정의한다.

n : 항로상의 항구수

i, j : 항구의 Index

d_{ij} : i에서 j로의 화물 운송수요

r_{ij} : i에서 j로의 화물 단위당 운임

a_{ij} : i에서 j로의 운항구간에서 선박의 적재 한계

c_{ij} : i에서 j로의 운항구간에서 선박의 운항 비용

$x_{ij}=\begin{cases}1: \text{i에서 j로의 운항구간을 운항할 때} \\ 0: \text{i에서 j로의 운항구간을 운항하지 않을 때}\end{cases}$

y_{ij} : i에서 j로의 화물운송 구간의 운송량

3.2 일방향 운항 형태의 수리모형

위의 수리모형 [P1]은 출발항과 종착항 사이를 왕복하는 경우의 모형이다. 즉 출발항에서 나가는 방향(Outbound Direction)과 출발항으로 들어오는 방향(Inbound Direction)의 두 경우를 같이 나타낸 모형이다.

그런데, 다음과 같이 가상의 항구와 종착항을 첨가함으로써 출발항에서 출발하여 종착항에 도착하는 모형으로 변형시킬 수 있다.

출발항 종착항

Out bound →

①——②——③——④

← In bound

출발항 종착항

One way →

①——②——③——④——③'——②'——①'

[그림 2] 일방향 운항형태로의 변형

이와 같이 변형된 모형의 수리모형은 다음의 [P2]와 같이 된다.

[P2] : 일방향 운항 형태의 수리모형

$$\text{Max } Z=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(r_{ij}\,y_{ij}-c_{ij}\,x_{ij}) \quad \cdots\cdots (1)\ \text{Revenue}$$

$$\text{s.t. } \sum_{p=1}^{i}\sum_{q=j}^{n} y_{pq}\le a_{ij}+M(1-x_{ij}),\quad i=1,2,\cdots,n-1,\ j=i+1,\cdots,n \quad \cdots\cdots (2)\ \text{Capacity}$$

$$y_{ij}\le d_{ij}\Big(\sum_{q=i+1}^{j} x_{iq}\Big),\quad i=1,2,\cdots,n-1,\ j=i+1,\cdots,n \quad \cdots\cdots (3)\ \text{Departure Demand}$$

$$y_{ij}\le d_{ij}\Big(\sum_{p=i}^{j-1} x_{pj}\Big),\quad i=1,2,\cdots,n-1,\ j=i+1,\cdots,n \quad \cdots\cdots (4)\ \text{Arrival Demand}$$

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j}=1,\quad \sum_{i=1}^{p-1} x_{ip}-\sum_{j=p+1}^{n} x_{pj}=0,\ p=2,3,\cdots,n-1 \quad \cdots\cdots (5)\ \text{Network}$$

$$y_{ij}\ge 0,\ x_{ij}\in\{0,1\},\ i=1,2,\cdots,n-1,\ j=i+1,\cdots,n$$

4. 최소비용 흐름문제를 이용한 최적해법

본 논문에서는 분지한계 기법을 이용하는데, 이때 부분문제의 상한과 하한을 구하기 위해 최소비용 흐름문제를 이용한다.

분지한계기법(Branch and Bound Method)에서는 부분문제로의 분해(Separation), 하한값과 상한값의 계산과 분지의 절단, (Relaxation and Fathoming), 그리고 문제 목록에 남아있는 부분문제의 선택(Selection) 등의 과정을 다루는 문제의 특성에 따라 알맞는 방법으로 진행해야 한다.

분지한계 기법에 사용될 부분문제를 정의하기 위해서 먼저 다음과 같이 기호들을 정의한다. 여기서 1번 항구와 N 번 항구는 각각 출발 항구와 종착 항구를 나타낸다.

1) 항구집합

$S=\{1,\ i_1,\ i_2, \cdots, i_m,\ N\}$: 기항하기로 정해진 항구의 집합.

$I=\{u,\ u+1,\ u+2, \cdots, N\},\ u=i_m$: 마지막 기항지와 종착항 사이의 모든 항구, 즉 미정 항구의 집합.

$Q=\{u,\ i_1,\ i_2, \cdots, i_r,\ N\},\ u=i_m$: 미정 항구들 중에서 추가로 기항하는 항구의 집합.

2) 선박 운항구간 집합

$AS=\{(i_r,\ i_{r+1}) \mid i_r,\ i_{r+1} \in S\}$: 기항하기로 한 항구에만 기항할 때의 운항구간 집합.

$AO=AS-\{(u,\ N)\}$: AS 에서 마지막 기항지와 종착항 사이의 운항구간을 제외한 운항구간 집합.

$AI=\{(i_r,\ i_{r+1}) \mid i_r,\ i_{r+1} \in I\}$: 모든 미정 항구에 기항할 때, 미정 항구들 사이의 운항구간 집합.

$AQ=\{(i_r,\ i_{r+1}) \mid i_r,\ i_{r+1} \in Q\}$: 추가로 기항하는 미정 항구에 기항할 때, 미정 항구들 사이의 운항구간 집합.

3) 화물운송 구간 집합

$LS=\{(i,\ j) \mid i<j,\ i,\ j \in S\}$: 기항하기로 한 항구에만 기항할 때 화물운송 가능 구간집합.

$LQ=\{(i,\ j) \mid i<j,\ i,\ j \in (S \cup Q)\}$: 추가로 기항하는 미정 항구를 기항할 때의 모든 화물운송 가능구간 집합.

$LI=\{(i,\ j) \mid i<j,\ i,\ j \in (S \cup I)\}$: 모든 미정 항구를 기항할 때의 모든 화물운송 가능구간 집합.

$LS_{ij}=\{(p,\ q) \mid p \le i,\ q \ge j,\ (p,\ q) \in LS\}$: LS 중에서 항구 i 와 j 사이를 지나치는 모든 운송 가능구간 집합.

$LQ_{ij}=\{(p,\ q) \mid p \le i,\ q \ge j,\ (p,\ q) \in LQ\}$: LQ 중에서 항구 i 와 j 사이를 지나치는 모든 운송 가능구간 집합.

$LQ_{i.}=\{(i,\ q) \mid (i,\ q) \in LQ\}$: LQ 중에서 항구 i 부터 출발하는 모든 운송 가능구간 집합.

$LQ_{.j}=\{(p,\ j) \mid (p,\ j) \in LQ\}$: LQ 중에서 항구 j 로 도착하는 모든 운송 가능구간 집합.

$LI_{ij}=\{(p,\ q) \mid p \le i,\ q \ge j,\ (p,\ q) \in LI\}$: LI 중에서 항구 i 와 j 사이를 지나치는 모든 운송 가능구간 집합.

$LI_{i.}=\{(i,\ q) \mid (i,\ q) \in LI\}$: LI 중에서 항구 i 부터 출발하는 모든 운송 가능구간 집합.

$LI_{.j}=\{(p,\ j) \mid (p,\ j) \in LI\}$: LI 중에서 항구 j 로 도착하는 모든 운송 가능구간 집합.

그리고 각 분지에서 사용할 부분문제들은 다음과 같이 정의된다.

1) [P]=[P2] : 원문제.

2) [PQ(S)] : 기항하기로 정해진 항구의 집합 S가 주어진 상태에서 추가로 기항할 항구의 집합 Q를 구하는 문제.

3) [P(S)] : 기항하기로 정해진 항구의 집합 S가 주어진 상태에서 추가로 기항하는 항구가 없는 경우에 최적 선적량을 정하는 문제.

4) [PI(S)] : 기항하기로 정해진 항구의 집합 S가 주어진 상태에서 이후의 모든 항구의 집합 I를 추가로 기항할 경우에 최적 선적량을 정하는 문제.

5) [PR(S)] : 기항하기로 정해진 항구의 집합 S가 주어진 상태에서 추가로 기항할 구간에서의 운항비용과 적재한계를 완화하여 최적 목적함수값의 상한을 구하는 문제.

위의 각 문제들에 대한 설명은 다음의 각 절에서 하기로 한다.

4.1 기항할 항구집합 S가 주어진 최적 선적량 문제와 최소비용 흐름문제

기항하기로 한 항구의 집합이 $S=\{1, i_1, i_2, \cdots, i_m, N\}$이라 할때, 최적 선적량은 다음 문제 [P(S)]의 최적해이다.

[P(S)] : 항구집합 S에 대한 최적 선적량 문제.

$$\text{Max } Z= \Sigma_{LS}\ r_{ij}\ y_{ij}-\Sigma_{AS}\ c_{ij} \quad \cdots(1)\ \text{Revenue}$$

$$\text{s.t. } \Sigma_{LSij}\ y_{pq}\le a_{ij},\quad \forall(i,j)\in AS \quad (2)\ \text{Capacity}$$

$$0\le y_{ij}\le d_{ij},\quad \forall(i,j)\in LS \quad \cdots(3)\ \text{Demand}$$

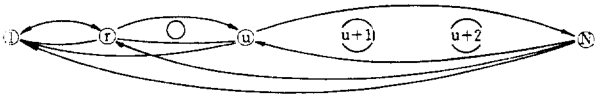
$$\text{where } S=\{1, i_1, i_2, \cdots, i_m, N\} \quad \cdots(4)\ \text{PortSet}$$

한편, 다음과 같이 단위흐름 비용과 흐름상한이 주어진 최소비용 흐름문제를 보자. 여기서 C_{ij}는 각 호에서의 단위흐름 비용을 나타내고, U_{ij}는 각 호에서의 흐름상한을 나타낸다.

[N(S)] : 문제 [P(S)]에 대한 최소비용 흐름문제

$$(C_{ij},\ U_{ij})=(0,\ a_{ij}),\quad \forall(i,\ j)\in AS$$

$$(C_{ji},\ U_{ji})=(-r_{ij},\ d_{ij}),\quad \forall(i,\ j)\in LS$$



그리고 문제 [P(S)]의 최적 목적함수값을 V(S)라고 하고, 문제 [N(S)]에서 최소비용 흐름의 비용을 v[N(S)]라고 하자. 그러면 다음과 같은 정리가 성립한다.

정리 1: 문제 [P(S)]의 최적해는 문제 [N(S)]의 최소비용 흐름으로부터 얻을수 있고, 최적 목적함수 값은 $V(S)= -v[N(S)]-\Sigma_{AS}\ c_{ij}$이다.

증명)

우선 $S=\{1, 2, 3, \cdots, N\}$라고 가정하자. 그리고 마디 j에서 마디 i로의 흐름량을 y_{ij}, $(i<j)$라고 하고, 마디 i에서 마디 i+1로의 흐름량을 t_{ii+1}라고 하자. 그러면 최소비용 흐름문제 [N(S)]는 다음과 같이 나타내어진다.

$$v[N(S)] = \text{Min } \Sigma_{LS} - r_{ij}\ y_{ij}$$

$$\text{s.t}$$

$$0\le t_{ii+1}\le a_{ii+1},\quad \forall(i, i+1)\in AS$$

$$0\le y_{ij}\le d_{ij},\quad \forall(i,j)\in LS$$

$$\text{for a given } S=\{1, i_1, i_2, \cdots, i_m, N\}$$

이때 유통량 보존이 성립되어야 하므로,

$$t_{12}=\Sigma^{n}_{q=2}\ y_{1q}$$

$$t_{23}=t_{12}+\Sigma^{n}_{q=3}\ y_{2q}-\Sigma^{1}_{p=1}y_{p2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$t_{ii+1}=t_{i-1i}+\Sigma^{n}_{q=i+1}\ y_{iq}-\Sigma^{i-1}_{p=1}\ y_{pi} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\vdots$$

$$t_{i-1n}=t_{n-2n-1}+y_{n-1n}-\Sigma^{n-2}_{p=1}\ y_{pn-1}$$

이어야 한다. 그런데 이 제약식 (5)로부터,

$$t_{ii+1}=(\Sigma^{n}_{q=i+1}\ y_{iq}-\Sigma^{i-1}_{p=1}\ y_{pi})+(\Sigma^{n}_{q=i}\ y_{i-1q}-\Sigma^{i-2}_{p=1}\ y_{pi-1})+\cdots+t_{12}$$

$$=\Sigma^{i}_{p=1}\ \Sigma^{n}_{q=p+1}\ y_{pq}-\Sigma^{i}_{q=2}\ \Sigma^{q-1}_{p=1}\ y_{pq}$$

$$=\Sigma^{i}_{p=1}\ \Sigma^{n}_{q=i+1}\ y_{pq}+\Sigma^{i}_{p=1}\ \Sigma^{i}_{q=p+1}\ y_{pq}-\Sigma^{i}_{q=2}\ \Sigma^{q-1}_{p=1}\ y_{pq}$$

$$=\Sigma^{i}_{p=1}\ \Sigma^{n}_{q=i+1}\ y_{pq}$$

즉, $t_{ii+1}=\Sigma_{Lsii+1}\ y_{pq},\ \ \forall(i, i+1)\in AS$

임을 알수 있다. 이것은 문제 [N(S)]의 최적해가 문제 [P(S)]의 최적해와 동일함을 보여준다. 또한 이때의 최적 목적함수 값은

$V(S)=-v[N(S)]-\Sigma_{AS}\ c_{ij}$이다.

4.2 부분문제와 분해전략

부분문제는 이미 기항하기로 정한 항구의 집합(S)들에 의해서 정의된다. 즉 기항하기로 한 항구의 집합 S에서 종착항 직전에 기항하는 마지막 기항 항구와 종착항 사이에 있는 미정 항구들을 추가로 기항하는 문제로 정의한다. 즉, 미정 항구들 중에서 추가로 기항해야 할 항구를 정하는 문제로 축소된 문제가 된다. 부분문제의 수리식은 다음과 같다. 여기에서 Q는 추가로 기항할 미정 항구의 집합이다.

[PQ(S)]-부분문제

$$\text{Max } Z=\Sigma_{LQ}\ r_{ij}\ y_{ij}-\{\Sigma_{AO}\ c_{ij}+\Sigma_{AQ}\ c_{ij}\}$$

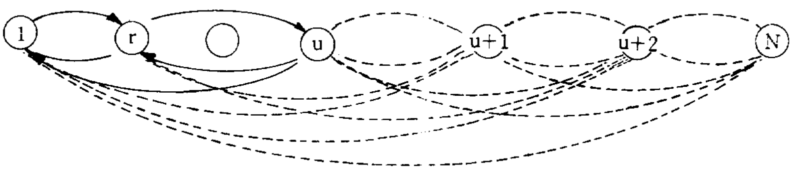
$$\text{s.t. } \Sigma_{LQij}\ y_{pq}\le a_{ij},\ \ \forall(i,j)\in(AO\cup AQ)$$

$$0\le y_{ij}\le d_{ij},\ \ \forall(i,j)\in LQ$$

$$\text{for a given } S=\{i, i_2,\cdots,i_m, N\}$$

$$\forall\ Q\subseteq I=\{u, u+1,\cdots, N\},\ \ u=i_m$$

부분문제로 분해하는 분해전략은 다음과 같다. 즉, 어느 한 부분문제에서 기항하기로 한 항구의 집합 S에다 미정 항구를 하나씩 차례로 추가한 것을 기항하기로 정해진 항구의 집합으로



[그림 3] 네트워크로 표현된 부분문제

삼는 부분문제를 생성한다. 따라서 하나의 부분문제로부터 생성된 부분문제의 수는 그 부분문제의 미정 항구의 수 만큼 된다.

즉 기항하기로 한 항구의 집합이 $S^k=\{1, 2, \cdots, u, N\}$인 부분문제 $[PQ(S^k)]$는, 기항하기로 한 항구의 집합이 $S_j^{k+1}=S^k \cup \{j\}$인 N-u-1개의 부분문제 $[PQ(S_j^{k+1})]$, $j=u, u+1, u+2, \cdots, N-1$로 분해한다.

4.3 하한 전략

각 부분문제의 하한값은 두가지 방법으로 구할수 있다. 첫째는 주어진 부분문제에서 추가로 기항하는 항구없이 곧바로 종착항으로 가는 경우의 이윤을 하한값으로 삼는 방법이고, 둘째는 모든 미정 항구를 추가로 기항하는 경우의 이윤을 하한값으로 삼는 경우이다.

추가 기항지를 고려하지 않는 하한문제는 문제 $[P(S)]$와 같고, 모든 기항지를 추가로 기항하는 하한문제 $[PI(S)]$와 같다.

$[P(S)]$: 하한문제 1

$$\max_{Y} Z=\Sigma_{LS}\, r_{ij}\, y_{ij}-\Sigma_{AS}\, c_{ij}$$
$$\text{s.t. } \Sigma_{LSij}\, y_{pq} \le a_{ij}, \quad \forall (i, j) \in AS$$
$$0 \le y_{ij} \le d_{ij}, \quad \forall (i, j) \in LS$$
$$\text{for a given } S=\{1, i_1, i_2, \cdots, i_m, N\}$$

$[PI(S)]$: 하한문제 2

$$\max_{Y} Z=\Sigma_{LI}\, r_{ij}\, y_{ij}-\{\Sigma_{AO}\, c_{ij}+\Sigma_{AI}\, c_{ij}\}$$
$$\text{s.t. } \Sigma_{LIij}\, y_{pq} \le a_{ij}, \quad \forall (i, j) \in (AO \cup AI)$$
$$0 \le y_{ij} \le d_{ij}, \quad \forall (i, j) \in LI$$
$$\text{for a given } S=\{1, i_1, i_2, \cdots, i_m, N\}$$
$$\text{and } I=\{u, u+1, \cdots, N\}, \quad u=i_m$$

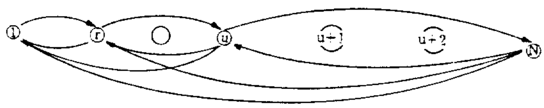
한편 문제 $[P(S)]$와 문제 $[PI(S)]$의 최적해는 다음의 최소비용 흐름문제 $[N(S)]$와 $[NI(S)]$의 최적해로부터 구할수 있고, 그 목적함수값은 각각 $V(S)= -v[N(S)]-\Sigma_{AS}\, c_{ij}$와, $VI(S)= -v[NI(S)]-\{\Sigma_{AO}\, c_{ij}+\Sigma_{AI}\, c_{ij}\}$와 같이 구해진다.

$[N(S)]$: 하한문제 1의 최소비용 흐름문제

$S=\{1, r, \cdots, u, N\}$ 일때, 각 호의 단위흐름 비용과 흐름 상한은 다음과 같다.

$(C_{ij}, U_{ij})=(0, a_{ij}), \ \forall (i, j) \in AS$

$(C_{ji}, U_{ji})=(-r_{ij}, d_{ij}), \ \forall (i, j) \in LS$

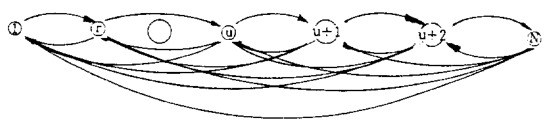


$[NI(S)]$: 하한문제 2의 최소비용 흐름문제

$S=\{1, r, \cdots, u, N\}$ 일때, $I=\{u, u+1, \cdots, N\}$라고 하고, 각 호의 단위흐름 비용과 흐름 상한은 다음과 같다.

$(C_{ij}, U_{ij})=(0, a_{ij}), \ \forall (i, j) \in (AO \cup AI)$,

$(C_{ji}, U_{ji})=(-r_{ij}, d_{ij}), \ \forall (i, j) \in LI$



4.4 상한 전략

각 부분문제의 상한값은 마지막 기항지 이후의 모든 미정 항구에 대한 운항구간의 적재한계

를 완화하고, 고정비용인 운항비용을 변동비용인 것으로 완화함으로써 구한다. 운항비용을 완화하는 방법은 두가지가 있다. 첫째는 각 미정 항구로 입항할 때 이용하는 운항구간의 비용을 완하하는 것이고, 둘째는 각 미정 항구로부터 출항할 때 이용하는 운항구간의 비용을 완화하는 것이다. 여기서는 입항할 때 이용하는 운항구간의 비용과 적재한계를 완화한 상한문제를 사용하기로 한다.

입항할 때 이용하는 운항구간의 비용과 적재한계를 완화한 상한문제는 다음과 같다.

[PR(S)] : 상한문제

$$\max_{Y} Z=\Sigma_{LI}\ r_{ij}\ y_{ij}-\{\Sigma_{AO}\ c_{ij}+\Sigma_{j\in I}\ \bar{c}_j\ t_j \quad \cdots\cdots(1)\ \text{Revenue}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \Sigma_{LIij}\ y_{pq}\le a_{ij}, \quad \forall(i,j)\in AO \quad \text{i)} \\ & \Sigma_{LIij}\ y_{pq}\le \bar{a}_{ij}, \quad \forall(i,j)\in AI \quad \text{ii)} \\ & \Sigma_{LIi.}\ y_{iq}\le \bar{a}_{i.}, \quad \forall i\in I \quad \text{iii)} \\ & \Sigma_{LI.j}\ y_{pj}\le \bar{a}_{.j}, \quad \forall j\in I \quad \text{iv)} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(2)\ \text{Capacity}$$

$$0\le y_{ij}\le d_{ij}, \quad \forall(i,j)\in LI \quad \cdots\cdots(3)\ \text{Demand}$$

$$\left.\begin{aligned} & \text{for a given } S=\{1, i_1, i_2, \cdots, i_m, N\} \\ & I=\{u, u+1, \cdots, N\}, \quad u=i_m \end{aligned}\right] \quad \cdots\cdots(4)\ \text{PortSet}$$

where

$$\left.\begin{aligned} & t_j=\Sigma_{LI.j}\ y_{pj}, \quad \forall j\in I \\ & \bar{c}_j=\text{Min}\{c_{pj}/a_{pj}\mid p<j,\ p\in I\}, \quad \forall j\in I \\ & \bar{a}_{ij}=\text{Max}\{a_{pq}\mid p\le i,\ q\ge j,\ p,q\in I\}, \quad \forall(i,j)\in AI \\ & \bar{a}_{i.}=\text{Max}\{a_{iq}\mid q>i,\ q\in I\}, \quad \forall i\in I \\ & \bar{a}_{.j}=\text{Max}\{a_{pj}\mid p<j,\ p\in I\}, \quad \forall j\in I \end{aligned}\right] \quad \cdots\cdots(5)\ \text{Cost \& Capacity Relaxation}$$

한편 문제 [PR(S)]의 최적해 값이 부분문제 [PQ(S)]와 그것으로부터 분해되는 모든 부분문제들의 상한값이 된다는 것을 다음의 두 정리로부터 알수 있다. 우선 문제 [PR(S)]의 최적해 값이 부분문제 [PQ(S)]의 상한값이 됨을 보이면 다음과 같다.

정리 2 : 문제 [PQ(S)]와 문제 [PR(S)]의 최적 목적함수 값을 각각 VQ(S)와 VR(S)라 하면, $VQ(S)\le VR(S)$이다.

증명)

먼저 문제 [PQ(S)]와 문제 [PR(S)]의 가능해 집합을 각각 PQ(S)와 PR(S)라 하면 PQ(S)

$\subseteq PR(S)$임을 알수 있다.

따라서 문제 [PQ(S)]의 최적해를 (Q, Y)라 하면, $PQ(S) \subseteq PR(S)$이므로 $Y \in PR(S)$이다. 즉, Y는 문제 [PR(S)]의 한 가능해이다.

따라서, v(Y)를 Y에 대한 문제 [PR(S)]의 목적함수 값이라 하면 $v(Y) \leq VR(S)$이다.

그러므로 여기서 $VQ(S) \leq v(Y)$임을 보이기만 하면 된다. 먼저 문제 [PQ(S)]의 식(1)로부터,

$$VQ(S) = \Sigma_{LQ}\ r_{ij}\ y_{ij} - \{\Sigma_{AO}\ c_{ij} + \Sigma_{AQ}\ c_{ij}\} \quad \cdots\cdots (a)$$

이고, 또 문제[PR(S)]의 식(1)로부터,

$$v(Y) = \Sigma_{LI}\ r_{ij}\ y_{ij} - \{\Sigma_{AO}\ c_{ij} + \Sigma_{j \in I}\ \bar{c}_j\ t_j\} \quad \cdots\cdots (b)$$

단, $t_j = \Sigma_{LI.j}\ y_{pj},\ \forall j \in I$

이다. 한편 $y_{ij} = 0,\ \forall (i, j) \notin LQ$. 이므로,

$$\Sigma_{LQ}\ r_{ij}\ y_{ij} = \Sigma_{LI}\ r_{ij}\ y_{ij} \quad \cdots\cdots (c)$$

이고, $t_j = \Sigma_{LI.j}\ y_{pj} = 0,\ \forall j \notin Q$.

이다. 그리고 문제[PQ(S)]의 식(2)로부터,

$$t_j = \Sigma_{LI.j}\ y_{pj} = \Sigma_{LQ.j}\ y_{pj} \leq \Sigma_{LIij}\ y_{pq} \leq a_{ij},$$
$$\forall (i, j) \in AQ.$$

이다. 한편 $Q \subseteq I$이므로, 문제[PR(S)]의 식(5)에서,

$$\bar{c}_j = \mathrm{Min}\{c_{pj}/a_{pj} \mid (p, j) \in LI_{.j}\},\ \forall j \in I$$
$$\bar{c}_j \leq \mathrm{Min}\{c_{pj}/a_{pj} \mid (p, j) \in LQ_{.j}\},\ \forall (i, j) \in AQ$$

이므로, $\bar{c}_j\ t_j \leq c_{ij},\ \forall (i, j) \in AQ$이고 따라서

$$\Sigma_{j \in I}\ \bar{c}_j\ t_j = \Sigma_{j \in Q}\ \bar{c}_j\ t_j \leq \Sigma_{AQ}\ c_{ij} \quad \cdots\cdots (d)$$

이다. 이상의 식 (a), (b), (c), (d)로부터 $VQ(S) \leq v(Y)$임을 알수 있다.■

따라서 문제 [PR(S)]의 최적해 값이 부분문제 [PQ(S)]의 상한값이 된다. 또한 문제 [PR(F)]의 최적해 값이 부분문제 [PQ(F)]로부터 분해된 임의의 부분문제 [PQ(S)]의 상한값이 됨을 보이면 다음과 같다.

정리 3 : 문제 [PQ(F)]로부터 분해된 부분문제를 문제 [PQ(S)]라 하면, 즉 $F = S^k$이고, $S = S_j^{k+1} = S^k \cup \{j\}$, $j = 1, 2, \cdots, N-1$라고 하면, $VR(S) \leq VR(F)$이다.

증명)

먼저 문제 [PR(S)]와 문제 [PR(F)]의 가능해 집합을 각각 PR(S)와 PR(F)라 하면 $PR(S) \subseteq PR(F)$임을 알수 있다.

따라서 문제 [PR(S)]의 최적해를 Y라 하면, $PR(S) \subseteq PR(F)$이므로, $Y \in PR(S)$이다. 즉, Y는 문제 [PR(F)]의 한 가능해이다.

따라서, v(Y)를 Y에 대한 문제 [PR(F)]의 목적함수 값이라 하면 $v(Y) \leq VR(F)$이다.

그러므로 여기서 $VR(S) \leq v(Y)$임을 보이기만 하면 된다. 먼저 다음과 같이 집합을 정의한다.

$$F = \{1, i_1, i_2, \cdots, i_m, N\},\ i_m = u,$$
$$S = F \cup \{v\},\ u < v < N.$$
$$I^f = \{u, u+1, \cdots, N\},$$
$$I^s = \{v, v+1, \cdots, N\},$$
$$LI^f = \{(i, j) \mid i < j,\ i, j \in (F \cup I^f)\},$$
$$LI^s = \{(i, j) \mid i < j,\ i, j \in (S \cup I^s)\},$$
$$LI^f_{i.} = \{(i, q) \mid (i, q) \in LI^f\},$$
$$LI^s_{i.} = \{(i, q) \mid (i, q) \in LI^s\},$$
$$LI^f_{.j} = \{(p, j) \mid (p, j) \in LI^f\},$$
$$LI^s_{.j} = \{(p, j) \mid (p, j) \in LI^s\},$$
$$AF = \{(i_r, i_{r+1}) \mid i_r, i_{r+1} \in F\},$$

$AS=\{(i_r, i_{r+1}) | i_r, i_{r+1} \in S\}$,

$AO^f = AF - \{(u, N)\}$,

$AO^s = AS - \{(v, N)\} = AO^f \cup \{(u, v)\}$.

그리고 문제 [PR(S)]의 식 (1)로부터

$$VR(S) = \Sigma_{LI^s} r_{ij} y_{ij} - \{\Sigma_{AO^s} c_{ij} + \Sigma_{j \in I^s} \bar{c}^s_j t^s_j\}, \quad \cdots\cdots (a)$$

단, $t^s_j = \Sigma_{LI^s{}_{.j}} y_{pj}, \quad \forall j \in I^s$

$\bar{c}^s_j = \mathrm{Min}\{c_{pj}/a_{pj} | (p, j) \in LI^s{}_{.j}\}, \quad \forall j \in I^s$

$$v(Y) = \Sigma_{LI^f} r_{ij} y_{ij} - \{\Sigma_{AO^f} c_{ij} + \Sigma_{j \in I^f} c^f_j t^f_j\}, \quad \cdots\cdots (b)$$

단, $t^f_j = \Sigma_{LI^f{}_{.j}} y_{pj}, \quad \forall j \in I^f$

$\bar{c}^f_j = \mathrm{Min}\{c_{pj}/a_{pj} | (p, j) \in LI^f_{.j}\}, \quad \forall j \in I^f$

이다. 한편, $y_{ij}=0, \quad \forall (i, j) \notin LI^s$이므로,

$$\Sigma_{LI^s} r_{ij} y_{ij} = \Sigma_{LI^f} r_{ij} y_{ij} \quad \cdots\cdots (c)$$

이고, $t^f_j = \Sigma_{LI^f{}_{.j}} y_{pj} = \begin{cases} \Sigma_{LI^s{}_{.j}} y_{pj} = t^s_j, & \forall j \in I^s, \\ 0, & \forall j \in (I^f - I^s - \{u\}). \end{cases}$

이다. 한편 $I^s \subseteq I^f$이므로, 문제 [PR(S)]의 식 (5)에서,

$$\bar{c}^f_j = \mathrm{Min}\{c_{pj}/a_{pj} | (p, j) \in LI^f_{.j}\} \leq \mathrm{Min}\{c_{pj}/a_{pj} | (p, j) \in LI^s_{.j}\} = \bar{c}^s_j, \quad \forall j \in I^s.$$

이므로, $\Sigma_{j \in I^f} \bar{c}^f_j t^f_j \leq \Sigma_{j \in I^s} \bar{c}^s_j t^s_j \quad \cdots\cdots (d)$

이다. 그러므로 $c_{uv} \geq 0$이므로,

$$\Sigma_{AO^f} c_{ij} \leq \Sigma_{AO^f} c_{ij} + c_{uv} = \Sigma_{AO^s} c_{ij} \quad \cdots\cdots (e)$$

이다. 이상의 식 (a), (b), (c), (d), (e)로부터 $VR(S) \leq v(Y)$임을 알수 있다.

따라서 문제 [PR(F)]의 최적해 값이 부분문제 [PQ(F)]로부터 분해된 임의의 부분문제 [PQ(S)]의 상한값이 됨을 알수 있다. 그러므로 VR(S)는 부분문제 [PQ(S)]의 상한값으로 사용할 수 있다.

한편 문제 [PR(S)]의 최적해는 다음의 최소비용 흐름문제 [NR(S)]의 최적해로부터 구할 수 있고, 그 목적함수 값은 $VR(S) = -v[NR(S)] - \Sigma_{AS} c_{ij}$와 같이 구해진다.

[NR(S)] : 상한문제의 최소비용 흐름문제

$S=\{1, r, \cdots, u, N\}$ 일때, $I=\{u, u+1, \cdots, N\}$,

$I^D=\{N+1, N+2, \cdots, 2N-u\}$,

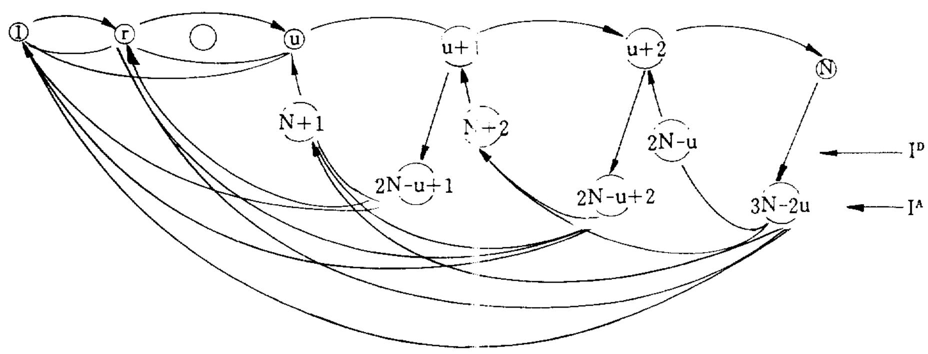
$I^A=\{2N-u+1, 2N-u+2, \cdots, 3N-2u\}$,

$LI^{DA}=\{(i, j) | i \in (S \cup I^D), \ j \in (S \cup I^A), \ i<j\}$

라 하고 각 호의 단위흐름 비용과 흐름상한은 다음과 같다.

$$
(C_{ij},\ U_{ij}) = \begin{cases} (0,\ a_{ij}) & \forall (i, j) \in AO \\ (0,\ \bar{a}_{ij}) & \forall (i, j) \in AI \\ (\bar{c}_j,\ \bar{a}_{.j}) & \forall (i, j),\ j \in I^A,\ i = j-2N+2u \\ (0,\ \bar{a}_{i.}) & \forall (i, j),\ i \in I^D,\ j = i-N+u-1 \end{cases}
$$

$$
(C_{ji},\ U_{ji}) = (-r_{ij},\ d_{ij}) \quad \forall (i, j) \in LI^{DA}.
$$



4.5 분지전략과 분지한계 기법의 흐름

부분문제를 선택하는 기준은 상한값이 큰것을 먼저 선택하도록 한다. 앞서 서술한 한계전략과 분지전략들을 사용하여 최적해를 구하는 해법의 흐름도는 다음 [그림 4]와 같다.

5. 예　　제

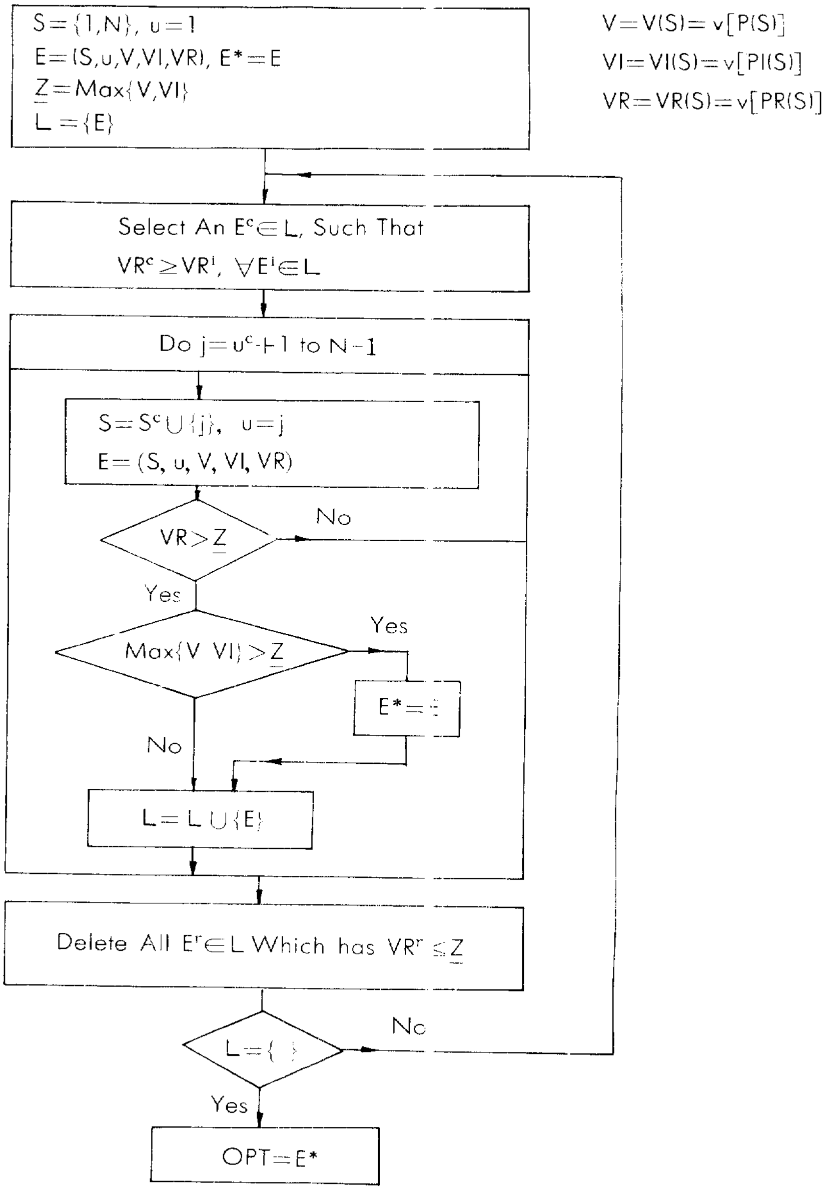
다음과 같은 예제를 풀어보도록 하자. 항구의 집합은 P={1, 2, 3, 4, 5, 6}와 같다. 이때 1과 6은 각각 출발항과 종착항이다. 그리고 각 운항구간에서의 적재한계와 운항비용은 다음의 [표 1]과 같고, 각 화물운송 구간에 대한 운송 수요량

[표 1] 선박운항 구간별 적재한계와 운항비용

적재한계 / 운항비용		1	2	3	4	5	6
항구	1		10	12	15	15	15
	2	30		10	10	12	12
	3	40	40		17	12	15
	4	50	50	30		12	15
	5	120	60	100	10		10
	6	130	110	110	60	60	

과 단위당 운임은 [표 2]와 같다.

위의 예제를 최소비용 흐름 문제를 이용한 분지한계법으로 풀어보면 다음 [그림 5]와 같이 분지나무가 형성된다. 여기서 최적 운항경로는 1-3-4-6이며, 각 화물 운송구간의 최적 운송량



[그림 4] 분지한계기법 흐름도

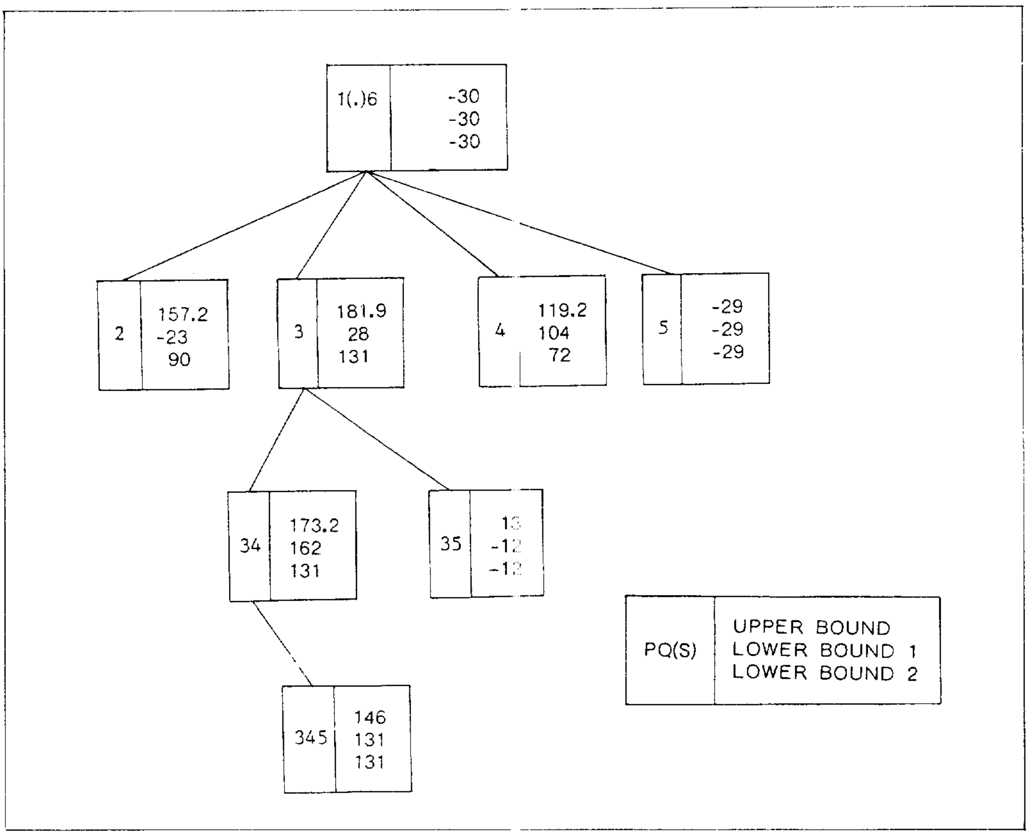
[표 2] 화물운송 구간별 운송 수요량과 단위당 운임

운임 \ 수요량		1	2	3	4	5	6
항구	1		5	10	8	8	10
	2	4		6	6	5	5
	3	7	3		10	5	7
	4	8	5	7		7	8
	5	9	6	7	5		5
	6	10	7	10	10	3	

운 1-3은 10, 1-4는 2, 3-4는 8, 3-6은 7, 4-6은 8이다. 이 경우에 얻는 이윤은 162이다.

6. 결 론

본 연구에서는 여러 형태의 선박운항 경로문제 중에서 콘테이너 선박의 운항경로 문제를 알아보았다. 콘테이너 선박은 출발항과 종착항의 두 항구 사이를 잇는 지정된 항로를 오가면서 항로의 중도에 있는 각 항구에 기항하여 화물을 상 · 하역하는 형태로 각 항구 사이의 화물운송을 수행한다. 이때 이윤을 최대화하기 위해서 선박을 어느 항구에 기항하고, 또 기항하는 항구에



[그림 5] 분지나무

서는 얼마만큼의 화물을 상·하역할 것인지를 적절하게 결정해야 한다.

이러한 콘테이너 운항경로 문제를 모형화 하고 0-1 혼합 정수계획법을 이용한 수리모형을 제시한 후, 최소비용 흐름문제와 분지한계 기법을 이용한 최적해법을 제시하였다.

본 논문에서 제시한 해법에서는 먼저, 기항하기로 한 항구의 집합에 따라 부분문제를 정의한다. 그리고 분해된 각 부분문제를 최소비용 흐름문제를 이용하여 풀어서 하한값을 구한다. 또한 분해된 부분문제에서, 추가로 기항할 항구들에 대한 운항구간의 적재한계와 운항비용을 완화시킨 문제를 정의하고 그것을 다시 최소비용 흐름문제를 이용하여 풀어서 상한값을 구한다. 이와 같은 방법으로 각 부분문제의 하한값과 상한값을 계산하고 그것을 이용하여 분지를 절단하고, 또한 상한값이 높은 부분문제를 우선적으로 선택하여 분지하여 감으로써 최적해를 구한다.

참고문헌

[1] L.H. Appelgren, Integer Programming Methods for a Vessel Scheduling Problem, Transp. Sci. 5, pp.64-78, 1971.

[2] L.H. Appelgren, A Column Generation Algorithm for a Ship Scheduling Problem, Transp. Sci. 3, pp.53-68, 1969.

[3] M. Bellmore, G. Bennington and S. Lubore, A Maximum Utility Solution to Vehicle Constrained Tanker Scheduling Problem, Naval. Res. Logist. Q. 15, pp.404-411, 1968.

[4] M. Bellmore, G. Bennington and S. Lubore, A Multivehicle Tanker Scheduling Problem, Transp. Sci. 5, pp.36-47, 1971.

[5] L. Bodin, B. Golden, A. Assad and M. Ball, Routing and Scheduling of Vehicles and Crews-the State of the Art, Comput. OR. 10, pp.67-211, 1983.

[6] R.F. Boykin, R.R. Levary, An Interactive Decision Support System for Analyzing Ship Voyage Alternatives, Interfaces. 15, pp.81-84, 1985.

[7] L.E. Briskin, Selecting Delivery Dates in the Tanker Scheduling Problem, MGMT. Sci. 12, B224-233, 1966.

[8] G.G. Brown, G.W. Graves and D. Ronen, Scheduling Ocean Transportation of Crude Oil, MGMT. Sci. 33, pp.335-346, 1987.

[9] N. Christofides, J.E. Beasley, The Period Routing Problem, Networks. 14, pp. 237-256, 1984.

[10] E.M. Claessens, Optimization Procedures in Maritime Fleet Management, Marit. Pol. MGMT. 14, pp.27-28, 1987.

[11] J. Current, H. Min, Multiobjective Design of Transportation Networks: Taxonomy and Annotation, Euro. J. Oper. Res. 26, pp.187-201, 1986.

[12] J.G. Debanne, J.N. Lavier, Management Science in the Public Sector-The Estevan Case, Interface. 9, pp.66-67, 1979.

[13] G.B. Danzig and D.R. Fulkerson, Minimizaing the Number of Takers to Meet a Fixed Schedule, Naval Res. Logist. Q. 1,

pp.217-222, 1954.

[14] M.M. Flood, Application of Transportation Theory to Scheduling a Military Tanker Fleet, Oper. Res. 2, pp.150-162, 1954.

[15] J. Laderman, L. Gleiberman and J.F. Egan, Vessel Allocation by Linear Programming, Naval. Res. Logist. Q. 13, pp. 315-320, 1966.

[16] D.E. Lane, T.D. Heaver, D.Uyeno, Planning and Scheduling for Efficiency in Liner Shipping, Marit. Pol. MGMT. 14, pp. 109-125, 1987.

[17] L.S. Lasdon, Optimization Theory for Large Systems, Macmillan, 1970.

[18] E.L. Lawer, Combinatorial Optimization: Networks and Metroids, Holt. Rinehart and Winston, 1976.

[19] D.M. Miller, An Interactive, Computer-Aided Ship Scheduling System, Euro. J. Oper. Res. 32, pp.363-379, 1987.

[20] M.D. Mckay and H.O. Hartley, Computerized Scheduling of Seagoing Takers, Naval. Res. Logist. Q. 21, pp.254-264.

[21] G.L. Nemhauser, P.L. Yu, A Problem in Bulk Service Scheduling, Opr. Res. 20, pp.813-819, 1972.

[22] M. Rao and S. Zionts. Allocation of Transperation Units-A Column Generation Scheme sith out-of-kilter Subproblems, Oper. Res. 16, pp.52-63, 1968.

[23] K. Rana and R.G. Vickson, A Model and Solution Algorithm for Optimal Routing of Time-Charactered Containership, Transp. Sci. 22, pp.83-95, 1988.

[24] D. Ronen, Cargo Ships Routing and Scheduling: Survey of Models and Problems, Euro. J. Oper. Res. 12, pp.119-126, 1983.