

---

 論 文
 

---

大韓造船學會誌  
 第26卷 第3號 1989年 9月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 26, No.3, September 1989

## 최적 적층구조를 위한 보강된 복합적층판의 좌굴강도 해석

김 학 른\*, 이 재 욱\*\*

 Buckling Strength Analysis of Stiffened Composite Plates for the Optimum  
 Laminate Structure

by

H.R. Kim\* and J.W. Lee\*\*

## 요 약

좌굴강도의 관점에서 보강된 복합 적층판의 최적 적층 구조를 해석하였다. 복합 적층판의 해석에서는 판 두께 방향의 전단 변형 효과를 고려한 유한요소법이 적용되었고, 보강 평판의 모델은 판과 비임 요소로 구성되었으며 판의 적층 두께는 동일한 두께의 적층과 대칭으로 이루어졌다. 유리 섬유 방향을 변화시킴으로써 적층 두께의 최적 구조를 얻었는데,  $[-45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 을 갖는 적층판의 경우 가장 큰 좌굴 하중을 얻었다. 이 경우 적층수는 8층 이상이었고, 특기할 사항은 같은 방향의 유리 섬유층을 모두 함께 모아서 전술한 최적 적층의 구성에 따른 적층판이 가장 큰 좌굴 강도를 나타내었다.

## Abstract

The optimum laminated composition of the stiffened composite plates is studied from the view point of buckling strength. The finite element method is applied to the buckling analysis of the composite plates taking into account the effect of shear deformation through the plate thickness. The stiffened plate model is discretized using plate thickness and symmetrically stacked. Parametric study is carried out for the selection of the optimum laminate structure; optimum fiber angle sequence through the thickness. Laminate structure of  $[-45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , is found to give the best buckling strength. For the case of that layer number is more than eight, best result is obtained when layers of the same fiber angle are put together, leaving the laminate has the same fiber angle sequence as a whole.

## 1. 서 론

고강도 섬유(Glass, Boron, Graphite, Kevlar, Sic,

알루미늄)로 보강된 복합재료는 단일재료에 비해 뛰어난 무게비, 강도 및 강성, 내식성, 내피로성 등의 재료 특성과 복잡한 형상도 일체성형기법을 이용하면 제작이 용이하는 등 많은 장점을 가지고 있으며 또한 예나

본 논문은 1988년도 대한조선학회 추계 연구발표회에서 발표된 논문임.  
 접수일자: 1989년 2월 16일, 게재수일자: 1989년 4월 28일

\* 학생회원, 인하대학교 대학원

\*\* 정회원, 인하대학교 공과대학

지 절약이라는 시대적 요구의 관점에서 기존 경금속 재료를 대체하고 있다. 신소재 중에서도 복합재료는 이미 기본 연구단계를 지나 선박, 해양구조물, 자동차 우주항공 및 스포츠 레저산업 등 본격적인 응용단계에 들어섰으며, 매년 관련산업이 빠른 속도로 확대되고 있다. 일반적으로 복합재료의 기계적 거동은 등방성 재료와는 크게 다르기 때문에 구조물에 사용하기에 앞서 이들 재료의 기계적 성질을 정확히 파악하고, 이방성 재료의 성질을 이용한 적층구조를 변화시킴으로써 최적구조 설계가 가능하다.

이 경우 구조물의 극한 하중상태에서의 붕괴기구는 층간응력등에 의한 파괴형태 이외에는 좌굴 모드에 의하여 결정되며, 보강된 복합적층판의 좌굴강도 해석은 이들 구조물의 강도해석에 있어 기본적인 문제이다.

본 논문에서는 복합적층판과 적층구조보의 변형에 따른 energy를 각각 독립적으로 계산하여 이들을 합한 total potential energy에 최소 potential energy 원리를 적용하여 보강된 복합적층판의 좌굴강도를 해석하였다.

이와 같이 변분이론에 기초를 둔 유한요소법에 의하여 좌굴하중값을 계산하였고, 적층구조에 의한 좌굴강도 해석은 하중조건과 경계조건에서 최적의 적층순서를 갖는 구조물을 구하는데 목적을 두었다.

## 2. 섬유강화 적층판의 좌굴해석 이론

### 2.1 단층판 이론

#### 2.1.1 응력-변형을 관계식 [1].

섬유강화 복합재료와 같은 직교이방성 재료는 재료 성질이 대칭인 서로 직교하는 3개의 평면을 갖고 있으며 단층판의 주재료방향(principal material direction)은 Fig. 1.과 같다.

또한 단층판에 대한 응력-변형을 관계식을 재료상수를 이용하여 표현하면 식 (1), (2), (3)과 같다. 여기

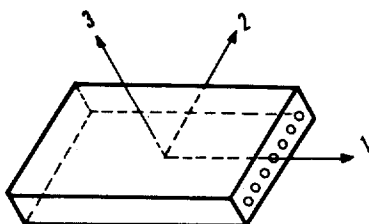


Fig. 1 Principal material direction of lamina

서  $\sigma_x$ 는 무시한다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $S_{ij}$ 는 compliance 행렬을, 이의 역행렬  $Q_{ij}$ 는 강성행렬을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{33} &= \frac{1}{G_{12}} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} \\ S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} \\ Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{33} &= G_{12} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \right\} (3)$$

#### 2.1.2 섬유방향에 따른 응력과 변형율의 변환

복합재료는 사용용도에 따라 섬유(fiber) 방향을 여러 가지로 변화시키면서 적층할 필요성이 있으며, 기하학적 좌표와 섬유의 방향이 일치하지 않은 경우에는

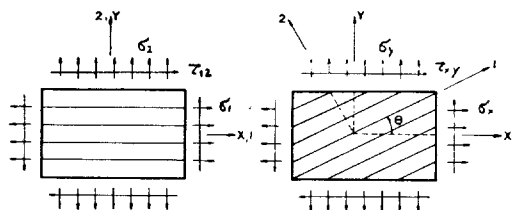


Fig. 2 Positive rotation of principal material axes from arbitrary XY axes

Fig. 2와 같이 나타낼 수 있다.

X, Y 방향의 응력과 1, 2 방향의 응력은 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12/2} \\ \gamma_{23/2} \\ \gamma_{13/2} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

단  $[T]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

윗 식을 이용하여 X, Y 방향의 응력-변형률 관계식을 유도하면 식 (6)으로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서,  $[\bar{Q}_{ij}] = [T]^{-1} [Q_{ij}] [T]^{-T}$   
 $\bar{Q}_{ij}$ 는 변환된 감소강성행렬이라 하고, 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4\theta + Q_{22} \sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{33}) \sin^2\theta \cos^2\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{12} - 4Q_{33}) \sin^2\theta \cos^2\theta \\ &\quad + Q_{12} (\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{33}) \sin^2\theta \cos^2\theta + Q_{22} \cos^4\theta \\ \bar{Q}_{13} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin\theta \cos^3\theta \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33}) \sin^3\theta \cos\theta \\ \bar{Q}_{23} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin^3\theta \cos\theta \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33}) \sin\theta \cos^3\theta \\ \bar{Q}_{33} &= (Q_{11} + Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin^2\theta \cos^2\theta \\ &\quad + Q_{33} (\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2\theta + Q_{55} \sin^2\theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{44} - Q_{55}) \sin\theta \cos\theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2\theta + Q_{55} \cos^2\theta \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.2 보강된 복합적층판 이론

#### 2.2.1. 가정

- 1) 각 층의 적층판은 거시적으로 균질(homogeneous)이고, 직교이방성(orthotropic)이며 연속적이다.
- 2) 적층판의 두께는 폭이나 길이에 비해 작다.
- 3) 적층된 구조물은 대칭이며 적층판과 보강재의 굽힘에 의한 처짐은 같다.

힘에 의한 처짐은 같다.

4) 접착층은 매우 얇고, 전단변형을 일으키지 않는다.

5) 변형은 비등방재의 고전적 탄성이론에 적용될 수 있을만큼 작고 그 재료는 일반적인 Hook의 법칙에 따른다.

#### 2.2.2. 기초방정식

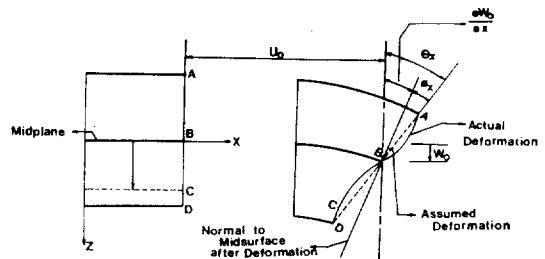
(1) 복합적층판 이론[1], [2], [3].

i) 변형률-변위 관계식

적층판의 두께에 따른 변형률을 구하는 식을 유도하면 각 단층에 작용하는 응력 및 적층판의 강성행렬을 나타내는 식을 얻을 수 있다. Fig. 3에서 X, Y, Z 방향의 변위 U, V, W를 구하면 다음과 같다.

$$U = U_0 - Z\theta_x \quad V = V_0 - Z\theta_y \quad W = W_0$$

$$\text{여기서, } \theta_x = \frac{\partial W_0}{\partial x} + \phi_x \quad \theta_y = \frac{\partial W_0}{\partial y} + \phi_y \quad (8)$$



(a) INITIAL CROSS-SECTION (b) DEFORMED CROSS-SECTION

Fig. 3. Geometry of deformation in the XZ plane

변형률 성분을 변위로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \end{aligned} \quad (9)$$

따라서, 변형률과 변위의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \cdot \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V_0}{\partial z} \\ \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\phi_y \\ -\phi_x \end{Bmatrix}$$

여기서,  $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ 는 굽힘에 대한 중립면의 변형률 성분이고,  $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ 는 굽힘에 대한 곡률성분이며,  $\phi_x, \phi_y$ 는 X, Y 방향에 대한 평균전단변형을 나타낸다.

ii) 응력-모우먼트 관계식

응력-변형을 관계식 (6)을 다음과 같이 분리하여 표시할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

식 (10)을 (11)에 대입하면  $k$ 번째 층에서의 응력을 표시할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}_K \cdot \left\{ \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \cdot \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_K \cdot \left\{ \begin{Bmatrix} \partial V_0 / \partial Z \\ \partial U_0 / \partial Z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \right\}$$

$N$ 개의 층으로 구성된 적층판에서의 힘과 모우먼트, 그리고 전단력은 각 층에서 응력을 적분함으로써 얻을 수 있으며 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_K \cdot dx = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_K \cdot dx \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot dz \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot z \cdot dz$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot z \cdot dz$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k \cdot dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k \cdot dz$$

또한 간단하게 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

(14)

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{44} & B_{45} \\ B_{45} & B_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial U_0 / \partial z \\ \partial V_0 / \partial z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}$$

여기서,  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) & (i, j=1, 2, 3) \\ \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1}) & (i, j=4, 5) \end{cases}$$

여기서,  $A_{ij}$ 는 인장강성(extensional stiffness),  $B_{ij}$ 는 연성강성(coupling stiffness), 그리고  $D_{ij}$ 는 굽힘강성(bending stiffness)이라고 한다.

(2) 적층구조 보의 이론

i) 변형률-변위 관계식

$$\epsilon_x = -zw''(x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (15)$$

ii) 응력-변형을 관계식

$$\sigma_x = \bar{Q}_{11} \epsilon_x$$

$$\tau_{xy} = \bar{Q}_{33} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \bar{Q}_{55} \gamma_{xz}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

iii) 모우먼트-변위 관계식

$$M_x = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

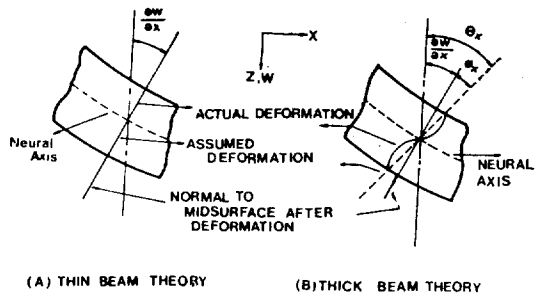


Fig. 4 Deformation of cross section

$$M_{xy} = \int_{-d/2}^{d/2} \tau_{xy} z dz = -D_{33} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (16)$$

$$Q_x = \int_{-d/2}^{d/2} \tau_{xz} dz = -D_{44} \left( \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

비임의 단면 변형은 Fig. 4와 같다.

2.2.3. Energy method

(1) 복합적층판

외력 potential energy  $V_p$ 와 변형에너지  $U_p$ 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$U_p = \frac{1}{2} \iint \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{21} D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{33} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$V_p = -\frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (17)$$

따라서 total potential energy  $\pi_p$ 는 다음과 같다.

$$\pi_p = U_p + V_p \quad (18)$$

(2) 적층구조 비임

굽힘과 비틀림을 동시에 받는 경우 전단변형효과를 고려한 변형에너지  $U_s$ 와 외력 potential energy  $V_s$ 는 다음과 같이 표시할 수 있고,

$$U_s = \frac{1}{2} \int \left[ D_{11} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + D_{13} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + D_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 \right] dx$$

$$V_s = -\frac{1}{2} \int P_x \left[ \theta_x^2 + \frac{J}{A} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (19)$$

따라서 total potential energy  $\pi_s$ 는 다음과 같다.

$$\pi_s = U_s + V_s \quad (20)$$

(3) 보강된 복합적층판

Total potential energy  $\pi$ 는 다음과 같다.

$$\pi = \pi_p + \pi_s \quad (21)$$

식 (21)로 부터 좌굴하중을 얻기 위하여 최소 potential energy 원리를 이용하고 변위  $w$ 에 대해서 변분을 위하여 고유방정식 해를 구하면 된다. 즉,

$$\delta \pi = 0$$

3. 유한요소법에 의한 해석

복합적층판과 적층구조 보 요소에 대한 굽힘강성행렬과 기하학적 강성행렬을 전 요소에 대하여 모두 합함으로써 보강된 복합적층판에 대한 전체 굽힘강성행

렬과 전체 기하학적 강성행렬을 구할 수 있다.

$$\pi = (U_P + U_S) + (V_P + V_S)$$

$$= \frac{1}{2} \{q\}^T [K_B] \{q\} - \frac{1}{2} \lambda \{q\}^T [K_G] \{q\} \quad (22)$$

여기서,  $[K_B] = [K_{BP} + K_{BS}]$ ,  $[K_G] = [K_{GP} + K_{GS}]$ 로서 전체 굽힘 강성행렬과 전체기하학적 강성행렬을 나타낸다. 보강된 복합적층판의 좌굴하중 값은 모두 변위량  $\{q\}$ 에 대하여 변분을 취해 얻어진 고유치 문제를 풀어서 계산된다.

$$\delta \pi = [\delta U_P + \delta U_S] + [\delta V_P + \delta V_S]$$

$$= [K_{BP} + K_{BS}] \{q\} - \lambda [K_{GP} + K_{GS}] \{q\}$$

$$= \{[K_B] - \lambda [K_G]\} \{q\} = 0 \quad (23)$$

고유방정식 (23)식의 해는 다음 식에 의해 얻어진다.

$$|[K_B] - \lambda [K_G]| = 0$$

이와 같이 구한 고유치  $\lambda$ 는 좌굴하중값을 결정하는 좌굴하중계수가 되므로 본 문제에서는  $\lambda$ 의 값중 제일 작은 값만이 필요하게 된다. 본 논문에서는 고유치 문제를 푸는 방법으로서 subspace iteration method를 사용하였다[4].

4. 해석결과

4.1. 해석 모델의 선정

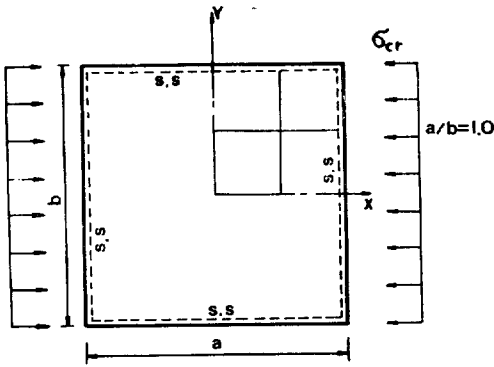
Fig. 5와 같은 해석모델을 택하고 재료로서 섬유 (fiber)는 graphite, 모재(matrix)는 epoxy로 구성된 graphite/epoxy이며 이들 재료의 특성치는 Table 1에 제시된 바와 같다.

Table 1 Material characteristics of graphite/epoxy

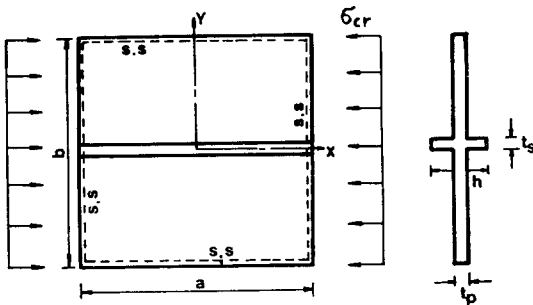
Graphite/Epoxy		Unit
Number of Layers( $n$ )	8	
Layer Thickness( $t$ )	0.4	mm
Layer Moduli( $E_1$ )	$1.847 \times 10^4$	kg/mm
( $E_2 = E_3$ )	$1.051 \times 10^3$	kg/mm
Shear Modulus( $G_{12} = G_{23} = G_{31}$ )	$0.7316 \times 10^3$	kg/mm
Length( $a$ )	500	mm
Width( $b$ )	500	mm
Poission Ratio( $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31}$ )	0.28	
Stiffener Thickness( $t$ )	3.20	mm

4.2. 해석결과

본 논문에서는 복합적층판의 경우 두께변화에 따른 전단변형효과를 보기 위하여 thickness ratio( $t/b$ )를 변화시키면서 좌굴계수를 계산하였고 해석결과는 Table 2에 제시한 바와 같다.



(1) Composite plate —simply supported condition—



(2) Stiffened composite plate —simply supported condition—

Fig. 5 Configuration of analytical model

Table 2 Buckling coefficient for variation of thickness ratio

단순지지복합적층판					
$t_p/b$	0.005	0.01	0.03	0.05	0.075
$K$	8.706	8.553	8.208	7.818	7.237
고정지지복합적층판					
$t_p/b$	0.005	0.01	0.03	0.05	0.075
$K$	20.163	18.047	14.39	12.587	11.59

Table 3 Comparison of buckling coefficients of stiffened composite plates with those of stiffened plates of the same weight

강판 Ref [10]	단순지지 복합적층판		고정지지 복합적층판			평 판( $a \times b \times t_p'$ )	보강판( $a \times b \times t_p + (t_s \times h \times a)$ )
	평 판	보강판	강판 Ref [10]	평 판	보강판		
4.0	8.557	15.542	10.08	19.073	59.703	500×500×3.328	500×500×3.2+3.2×20×500
4.0	8.631	17.997	10.08	19.127	69.151	500×500×3.3408	500×500×3.2+3.2×22×500
4.0	8.578	20.812	10.08	19.057	78.579	500×500×3.3536	500×500×3.2+3.2×24×500
4.0	8.604	23.806	10.08	19.077	87.588	500×500×3.3664	500×500×3.2+3.2×26×500

여기서, 단순지지와 고정지지 복합적층판의 최적 적층순서인 경우에 대하여 계산을 수행하였다.

Table. 3에서 알 수 있듯이 판의 두께가 증가할수록 전단변형에 대한 영향이 크게 나타난다.

또한 동일중량을 갖는 보강된 복합적층판과 복합적층판의 좌굴계수를 계산함으로써 보강효과를 알 수 있으며 결과는 Table. 3과 같다. 본 논문에서 사용한 적층순서와 적층구조는 Table. 4에 표시한 바와 같다.

하중상태와 경계조건의 변화에 따른 좌굴계수를 도시하면 Fig. 6, 7, 8, 9와 같다.

Fig. 6의 결과는 단순지지된 복합적층판으로 균일하중을 받는 경우  $[-45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$  적층구조에서 최대좌굴계수를 가지며  $[45^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ]_s$  적층구조에서 최소좌굴계수를 갖는다.

Fig. 7은 고정지지된 복합적층판으로 균일압축을 받을 때  $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$  적층구조에서 최대좌굴 계수를 갖고  $[90/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$  적층구조에서 최소좌굴 계수를 갖는다.

Fig. 8은 단순지지의 보강된 복합적층판으로 균일압축하중을 받을때 적층구조는  $[0^\circ/-45^\circ/90^\circ/45^\circ]_s$ 에서 최대좌굴계수를 나타내며 최소좌굴계수는  $[90^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$ 의 적층구조에서 나타난다.

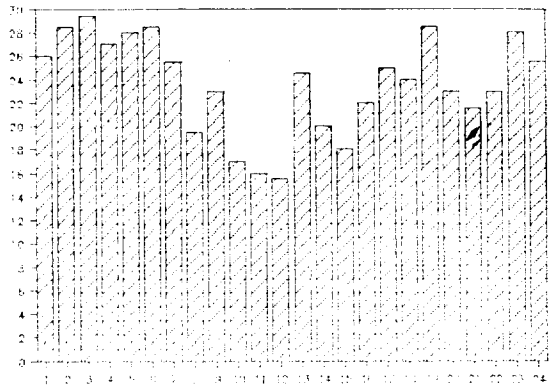
Fig. 9는 고정지지의 보강된 복합적층판으로 균일압축하중을 받을 때 최대좌굴계수를 갖는 적층구조는  $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ 이며 최소좌굴 계수를 보이는 적층구조는  $[90^\circ/-45^\circ/45^\circ/0^\circ]_s$ 이다.

그리고 최적 적층구조를 이루는 layer를 대칭으로 순차 적층함에 따른 복합적층판의 좌굴강도를 살펴보면 Fig. 10과 같다. 단순지지의 경우 복합적층판의 적층구조가 최대좌굴계수를 갖는  $[-45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$ 과 최대좌굴계수를 갖는  $[45^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ]_s$ 인 두 경우에 대하여 좌굴강도의 변화를 알아보았다.

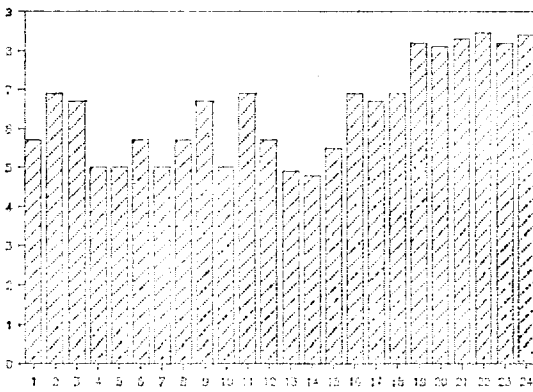
최적구조를 갖는 복합적층판의 좌굴강도는 Fig. 11과 같다. Fig. 11은 두께가 두꺼워져서 층판의 수가

**Table 4** Stacking sequences and it's composition

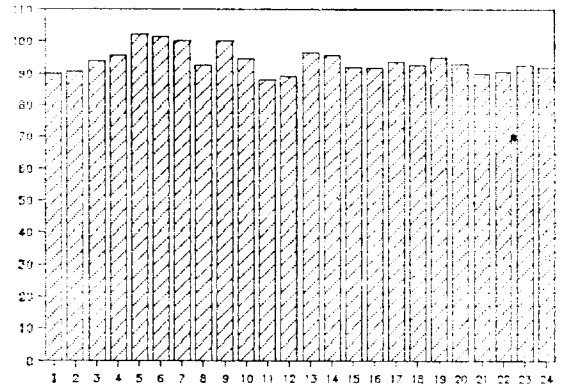
적층번호	적층구조	적층번호	적층구조
1	$[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$	13	$[45^\circ/0^\circ/90^\circ/-45^\circ]_s$
2	$[0^\circ/-45^\circ/45^\circ/90^\circ]_s$	14	$[45^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ]_s$
3	$[0^\circ/-45^\circ/90^\circ/45^\circ]_s$	15	$[45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$
4	$[0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ]_s$	16	$[45^\circ/-45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$
5	$[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$	17	$[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$
6	$[0^\circ/90^\circ-45^\circ/45^\circ]_s$	18	$[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$
7	$[90^\circ/0^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$	19	$[-45^\circ/0^\circ/90^\circ/45^\circ]_s$
8	$[90^\circ/0^\circ-45^\circ/45^\circ]_s$	20	$[-45^\circ/90^\circ/0^\circ/45^\circ]_s$
9	$[90^\circ/-45^\circ/0^\circ/45^\circ]_s$	21	$[-45^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ]_s$
10	$[90^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ]_s$	22	$[-45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$
11	$[90^\circ/-45^\circ/45^\circ/0^\circ]_s$	23	$[-45^\circ/0^\circ/45^\circ/90^\circ]_s$
12	$[90^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$	24	$[-45^\circ/45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$



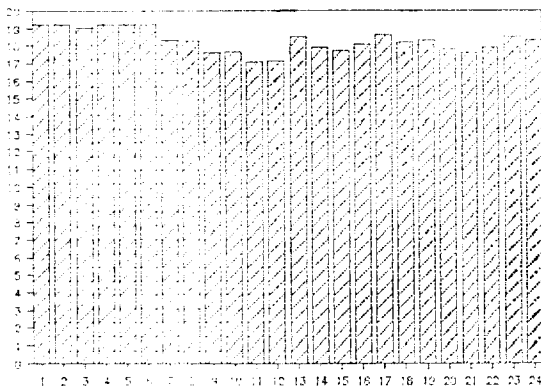
**Fig. 8** Buckling coefficients of stiffened composite plates according to stacking sequences —simply supported conditions—



**Fig. 6** Buckling coefficients of composite plates according to stacking sequences —simply supported conditions—



**Fig. 9** Buckling coefficients of stiffened composite plates according to stacking sequence —fixed conditions—



**Fig. 7** Buckling coefficients of composite plates according to stacking sequences —fixed conditions—

증가할 때 같은 방향의 유리 섬유층을 모두 함께 모아서 전체적으로 최적 적층구조를 유지하는 것이 좌굴강도상 유리하다는 결과를 나타내고 있다. 이것은 비록 하나의 적층단위가 최적적층구조라고 하여도 이것이 반복될 경우 적층구조가 전체적으로 균일해지는 결과가 되기 때문인 것으로 판단된다. 그리고 실제 적층과정에서도  $[-45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$ 의 적층구조가 바람직하다고 보여지는데 이것과 다른 두 경우는 층판마다 다른 섬유 각도의 변화를 주면서 적층하는 것이므로 너무 복잡하고 작업상으로도 비능률적이다. 따라서 optimum laminate 구조를 유지하면서 적층하는 것이 좌굴강도에서도 크게 나타나며 제작하는데 능률적이다.

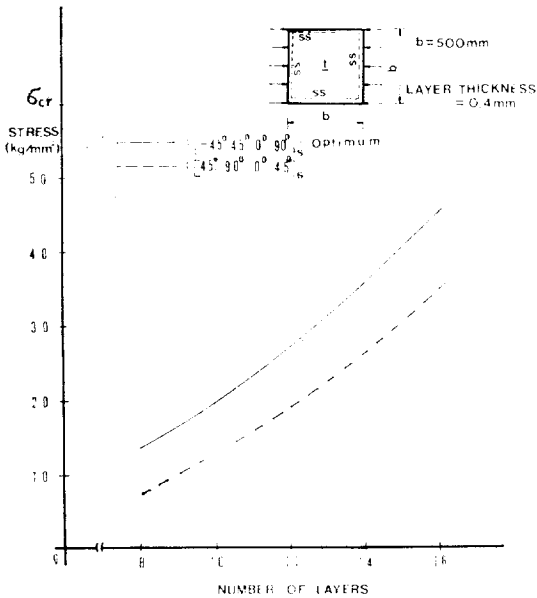


Fig. 10 Buckling stress of laminated plates according to number of layers

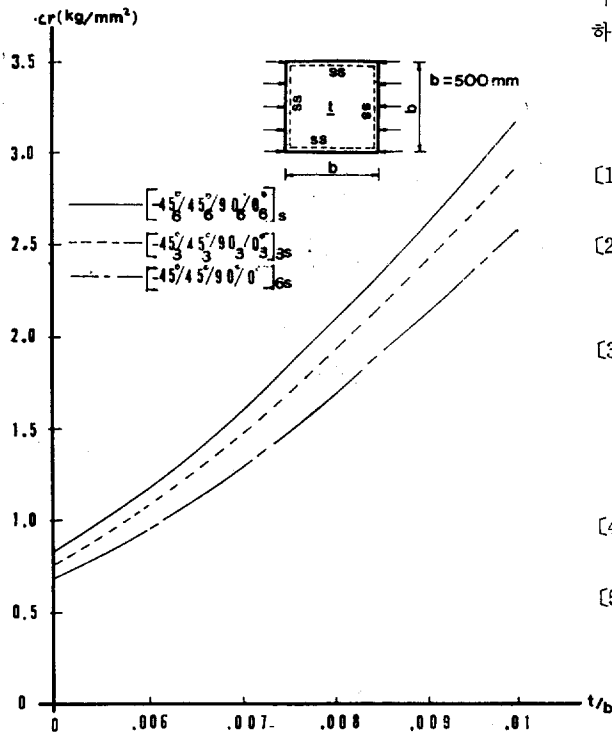


Fig. 11 Buckling stress of optimum laminated plate

5. 결 론

본 논문에서는 보강된 복합적층판의 좌굴강도 해석으로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 두꺼운 복합적층판 좌굴강도해석에서는 굽힘강성에 전단변형효과를 반드시 고려해야 한다.

(2) 동일층량을 갖는 보강된 복합적층판과 복합적층판의 좌굴계수 비교에서 보강재 1개를 배치할 때 좌굴강도는 단순지지 경우에 약 2배의 값을 준다.

(3) 복합적층판이 균일면내 압축하중을 받을때 단순지지인 경우는  $[-45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$ 의 적층구조에서 최대좌굴계수를 가지며 고정된 복합적층판인 경우에는  $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ 의 적층구조에서 최대좌굴계수를 갖는다.

(4) 보강된 복합적층판이 균일면내 압축하중을 받을 때 단순지지인 경우  $[0^\circ/-45^\circ/90^\circ/45^\circ]_s$ 의 적층구조에서 최대좌굴계수를 가지며 고정된 경우에는  $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ 에서 최대좌굴계수를 갖는다.

(5) 두꺼운 적층판의 경우 같은 각도의 fiber를 모아서 적층하고 전체 두께는 최적 적층구조를 갖도록 하는 것이 좌굴강도 및 제작면에서 유리하다.

참 고 문 헌

- [1] R.M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", Scripta Book Co., 1975.
- [2] S.R. Calcote, "The Analysis of Laminated Composite Structure", Van Nostrand Reinhold, 1969.
- [3] A.V. Viswanatban, Tsai-Chen Soong, and R.E. Miller, Jr. "Buckling Analysis for Axially Compressed Flat Plates, Structural Sections, and stiffened Plates Reinforced with laminated Composites", NASA. CR-1887, 1971.
- [4] E. Hinton and D.R.J. Owen, "Finite Element Programming", Academic, 1975.
- [5] 홍창선, "복합재료의 구조설계를 위한 용력해석", 한국과학기술원 연구보고서, 1984.