

선박유체역학에서의 유한요소법

배 광 준*

최근 선박유체역학분야에서 응용되는 수치해법의 하나인 유한요소법의 응용에 대한 연구결과를 검토하고 이 수치해법에 대한 개관과 앞으로의 연구방향에 대하여 서술하고자 한다. 선형화 문제로서는 선박운동, 항만내 파도응답, 자유 표면파의 고유치 문제, 내면파 (Internal wave) 문제 및 조파저항문제를 다루고, 비선형화 문제로서는 슬로싱 문제 및 저항문제에 대하여 토의하고자 한다.

1. 서 론

대형 전자계산기의 출현과 더불어 조선공학분야에서도 수치해법의 개발이 질실히 요구되고 있다. 특히 대형 전자계산기의 용량과 연산속도가 계속 증가하면서 최근에는 보다 현실적인 3차원 문제들도 수치계산이 가능하게 되었다. 이런 추세에 따라 보다 현실적인 문제를 위한 수치해법 개발에 많은 연구가 활발히 진행 중에 있다. 본 논문에서는 선박유체역학분야중 특히 자유표면파 문제를 위한 유한요소법의 응용에 대하여 서술하고자 한다.

수치해법으로서의 유한요소법의 응용을 설명하기 전에 우선 선박유체역학에서의 수치방법을 열거하자면, Green 함수에 근거를 둔 적분방정식 방법이 선형화된 비점성 유체 모델에 많이 응용되어 왔다. 그의 영역방법(field method)으로서 유한차분법 및 유한요소법을 들 수 있겠다. 특히 유한차분법은 점성유체 모델에 많이 응용되어 왔으며, 유한요소법의 응용은 보다 최근이고 그 응용이 유한 차분법보다 많지 않은 편이다. 그러나 비점성 유체 모델로서 자유표면파 문제를 다루는 데는 유한요소법의 응용이 유한차분법보다 비교적 많다.

유한요소법의 주된 장점은 타원형 미분방정식으로 주어진 문제를 다루는데 있다. 특히 수파문제는 전형적인 타원형일뿐만 아니라 유한요소법의 기본인 범함수이나 약형(weak form)으로서 대등한 문제로 치환하였을 때 자유표면 경계조건 및 그의 경계조건들이 자연조건(natural condition)으로서 처리되기에 경계조건의

처리가 비교적 용이한 점이라 하겠다.

선박유체역학분야에서의 유동문제는 주로 자유표면을 가진 무한 유체속에 있는 선박이나 기타 물체에 의한 유체 동역학적 정보의 필요성에 기인하므로, 주위의 유체 운동에 대하여 풀어야 한다. 그런데 이 유체를 비점성, 비압축성이라고 가정하였을 때는 지배방정식이 타원형이 되어 무한대인 유체영역에서 라프라스 방정식의 해를 구하여야 된다. 즉 우리가 당면한 문제는 자유표면을 가진 유체영역에서 정의된 라프라스 방정식의 해를 구하는 문제이다.

앞으로 언급할 타원형 미분방정식은 근본적으로는 전 경계면에서 적절한 경계조건이 주어짐으로서 유일해가 존재하는 특성이 있는 반면 자유표면 경계조건은 특이하게도 중력과(gravity wave)가 존재하는 경계조건이다. 따라서 당면한 자유표면파 문제를 유한요소법이나 유한차분법으로 풀 때에는 무한영역을 유한한 자유도 문제로 치환하는 것이 우선되어야 한다. 어떤 수치해법의 성패는 수치모델로 만들어진 계산영역(computation domain)의 대소에 결정된다고 하여도 과언이 아니다. 따라서 계산영역을 줄이는 노력으로 극소 유체 요소법이 개발응용되고 있다.

본 논문에서는 그동안 연구개발된 유한요소법의 자유표면파 문제에의 응용에 대하여 검토하고 앞으로의 연구방향에 대하여도 토론하고자 한다. 특히 선형문제와 비선형 문제로 나누어서 서술하기로 한다.

2. 선형 자유표면파 문제

선형문제를 다루는 데는 앞에서 언급한 Green 함수에 의한 적분방정식이 많이 응용되고 있으나, 보다 복잡한 해지형상이나 선박이나 부유체의 기하학적 형상에 대해서는 유한요소법의 응용이 보다 효율적이 될 수도 있다. 계속 증가되는 전산기의 용량과 전산처리속도에 힘입어 보다 복잡한 기하형상도 수치계산이 가능하게 되었다. 이 장에서는 선박운동의 대표적인 문제인 시간조화운동 문제를 다루고 또 항주하는 선박저항문제에서의 유한요소법의 응용을 다룬다.

본 내용은 1988년도 대한조선학회 추계특별강연회에서 발표된 내용임

* 정회원, 서울대학교 공과대학

2.1. 시간조화운동 문제

유체는 비점성 비압축성이라 가정하고 비회전운동을 가정한다. 그리고 표면장력은 무시하고 자유표면파를 기울기는 적다고 가정하여 선형화하면 잘 알려진 장 이론에서의 경계치문제를 얻게된다. 본 논문에서는 편의상 2차원 문제를 다루기로 한다. 속도장 함수 $\phi(x, y)$ 를 전 유체영역 R 에서 정의하고 경계면에서 일반적인 경계조건을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, y) &= 0 \quad \text{in } R & (1a, b) \\ \phi_n + \alpha \phi &= \beta \quad \text{on } \partial R \end{aligned}$$

여기서 α, β 는 아는 함수라고 가정한다.

위의 경계치 문제는 이와 등가인 변분 범함수나 약형(weak form)을 이용하여 근사해를 구할수 있다. 여기서 변분 범함수 $J(\phi)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$J(\phi) = \iint_R \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{\partial R} \alpha \phi^2 ds - \int_{\partial R} \beta \phi ds \quad (2)$$

경계치 문제 (1a, b)는 이와 등가인 다음의 변분법 문제로 치환된다.

$$\delta J(\phi) = 0 \quad (3)$$

본래의 경계치 문제를 푸는 것 보다 이와 등가인 식 (3)에 주어진 변분법 문제를 수치 계산하는 것이 다음과 같이 장점이 있다. 첫째, 경계조건 식 (1b)는 자연 조건(natural condition)으로 식 (2)의 범함수속에 이미 포함되어 있어 별도로 경계조건(속박조건, constraints)을 부과해야 하는 번거로움이 없고, 둘째, 근사해를 구하는 과정에서 근사해의 후보함수(candidate function)로서 일차 도함수만 자승적분 가능하면 되기 때문에 본래의 방정식 식(1a)에서 요구하는 해 함수에 대한 조건 보다 완화된 조건이 된다.

위에 정의된 범함수를 이용한 근사해법에서는 방사 조건을 잘라버린 유한 위치에 적용하기 때문에 수치모델에서 이미 오차를 내포하게 되며, 이로 인하여 계산영역이 충분히 커야 하는 단점이 있다. 앞에서 이미 언급한 바와 같이 수치계산의 성패는 계산영역의 대소에 좌우되기 때문에 이 결점을 보완하기 위하여 다음과 같은 국소유한요소법을 소개한다.

국소유한요소법의 개념은 우선 전 유체영역을 국소영역 R_1 과 잘라버린 무한영역(truncated infinite subdomain) R_2 로 나누고 잘라버린 무한영역에서의 해를 완전한 해석해(complete solution)인 ϕ_2 로 가정한다. 전 유체영역을 두영역(subdomain)으로 나눌때 생기는 공동 경계면(common or juncture boundary)을 J 라 표기 한다. 그리고 국소유한요소 영역(localized finite-element subdomain)에서는 구하는 포텐셜 함수를 ϕ_1 이라 가정한다. 여기서 두 영역에서 정의된 ϕ_1 과 ϕ_2 를

이용하여 범함수를 다음과 같이 정의한다.

$$J(\phi_1, \phi_2) = \iint_{R_1} \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{\partial R_1} \alpha \phi_1^2 ds - \int_{\partial R_1} \beta \phi_1 ds + \int_J \left(\phi_1 - \frac{1}{2} \phi_2 \right) \phi_2 ds \quad (4)$$

여기서 $\frac{\partial}{\partial n}$ 은 각 유체영역(R_1, R_2)에서 각각 바깥 방향의 법선방향의 미분을 뜻하고 $\partial R = \partial R_1 + \partial R_2$ 이다. 위의 범함수를 이용하여

$$\delta J(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (5)$$

의 해를 구하면 식(1a, b)에 주어진 원래의 경계치 문제의 근사해가 될을 쉽게 증명할 수 있으나 여기서는 생략한다[1][2].

수치해법으로서 식(3)에 근거한 유한요소법과 식(5)에 근거한 국소유한요소법을 비교하면, 국소유한요소법에서는 계산영역을 최소한으로 줄일 수 있기에 보다

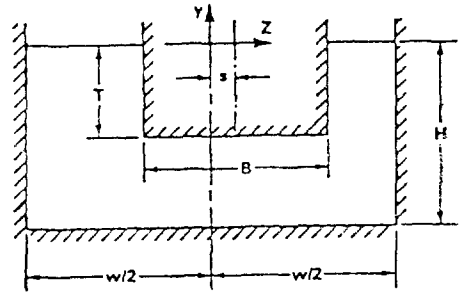


Fig. 1 (a) Cross-section of the computed model at $x=0$

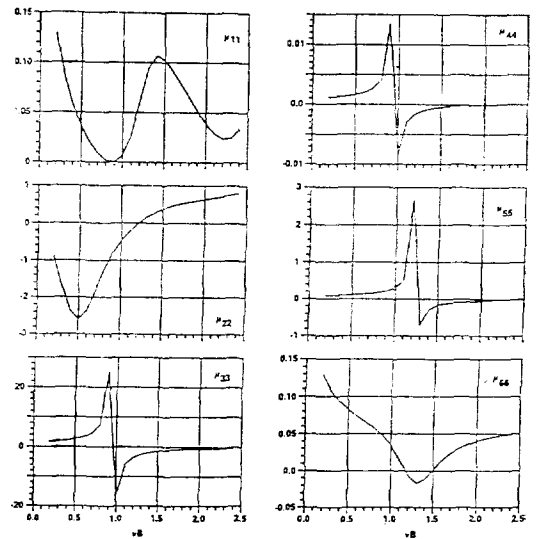


Fig. 1 (b) Added masses and moments of inertia of added mass μ_1 , versus νB for $W/B=H/T=W/H=B/T=2, L/T=10$ and $s/B=0$

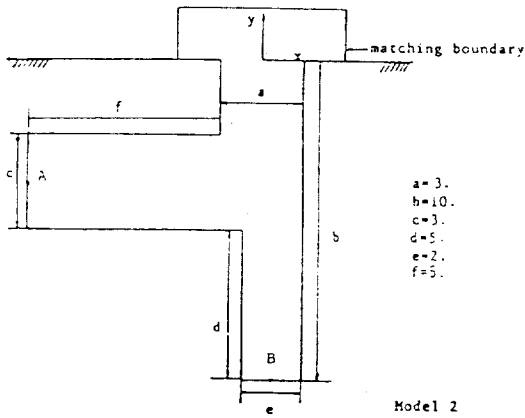


Fig. 2 (a) Sketch of the computed harbor geometry (Incheon harbor)

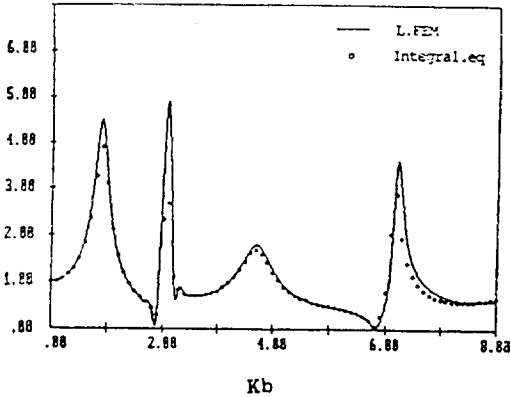


Fig. 2 (b) Amplification factor R at point A versus wave number Kb

효율적이다. 대부분의 선형문제에서 잘라버린 무한영역 R_2 에서의 일반해가 완전한 고유함수의 집합으로나 또는 Green함수로 이미 해석적으로 잘 알려진 경우에는 식 (5)에 근거한 국소유한요소법이 훨씬 효율적이다 다음은 본 국소유한요소법을 응용한 수치계산예를 보여준다. Fig. 1은 3차원 사각단면 바아의 시험수조 내에서의 6자유도 운동에 의한 유체 동력학계수 및 파기진력의 계산예중 부가질량 α_i ($i=1, \dots, 6$)를 보여준다[3]. 여기서 $i=1, \dots, 6$ 은 각각 surge, heave, sway, roll, yaw and pitch운동이다.

이와 유사한 문제로서 해양으로 부터의 입사파에 의한 항만내의 파도응답에 대한 문제도 3차원 문제로서도 처리할 수 있으나 통례적으로 간단히 하기 위하여 수심에 대한 입사파의 파장이 충분히 크다고 가정하여 수심변화가 계수로 들어간 2차원 Helmholtz 방정식을

얻는다[4][5]. 이 수학 모델을 삼기한 국한유한요소법을 응용하여 얻은 계산예가 Fig. 2에 주어져 있다. Fig. 2의 결과는 인천항에 있는 소항만을 모델로 한 결과로서 항만내의 파도응답을 보여준다[5].

2.2. 내면파 문제 (Internal wave problem)

선박유체역학 분야에서 관심이 있는 내면파 문제는 유체의 밀도가 수직방향(y 축)의 연속함수가 아니고 몇 층의 유체가 각기 다른 일정한 밀도를 가지고 있다고 가정한 경우이다. 실제 바다의 밀도분포는 위의 가정과는 달리 엄밀하게는 연속적인 밀도 분포이나 실제 관측결과에서는 아주 얇은 유체층(thin horizontal layer)에 국한된 경우가 많기 때문에, 위와 같이 간단한 모델로 가정하게 된다. 여기서는 밀도가 다른 두층의 유체가 안정하게 분포(stably stratified) 하였다고 가정하고, 위 유체와 아래 유체의 밀도를 각각 ρ_1 및 ρ_2 라고 표기하고 유동은 각진동수(circular frequency) ω 인 시간조화운동이라 가정하면 내면 경계면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{1n} - \nu\alpha_1\phi_1 &= -\nu\alpha_2\phi_2 \\ \phi_{2n} - \nu\alpha_2\phi_2 &= -\nu\alpha_1\phi_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\nu = \frac{\omega^2}{g}, \quad \alpha_i = \frac{\rho_i}{\rho_2 - \rho_1} \quad (i=1, 2) \text{ 이고 } \phi_1 \text{ 및 } \phi_2 \text{ 는 각각}$$

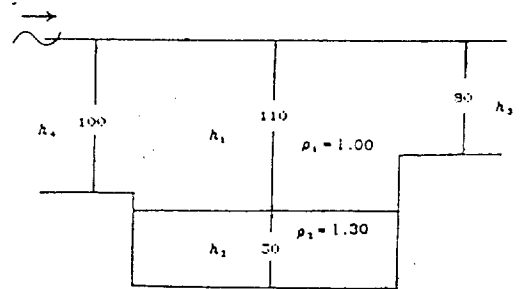


Fig. 3 (a) A schematic geometry of the computed model (incident wave is propagating from left to right)

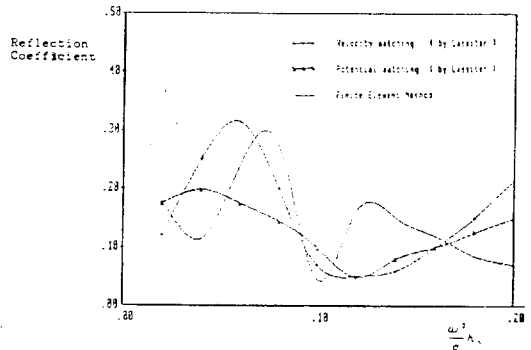


Fig. 3 (b) Reflection coefficient

윗 유체층 및 아래 유체층에서 정의되는 속도장 함수이다. 여기서 윗유체의 자유표면 경계조건은 잘 알려진 단일 유체의 경우와 같다.

Fig. 3은 위의 내면과문제에 국한 유한요소법을 응용한 계산예를 보여주고 있다. 이 수치모델의 물리적인 모델은 2차원 문제로서, 입사파가 있는 일정수심을 갖는 유한수심에 국부적으로 sediment pocket 혹은 submarine trench가 있고 여기에 밀도가 큰 유체가 trap되어 있는 경우이다. Fig. 3에서는 반사계수(reflection coefficient)의 계산결과를 보여주고 있다.

2.3. 고유치 문제 (Eigenvalue problem)

선박유체역학에서 관심있는 문제중의 하나인 자유표면과 공진 문제로서 언제나 무한유체영역 문제가 아니고 슬로싱(sloshing) 문제와 같이 자유표면을 갖는 유한유체영역에 대한 유동현상을 다룰때만 발생한다 특히 슬로싱(sloshing) 문제나 자유표면을 갖는 anti-roll tank등의 설계에 필수적인 정보로서 그 고유진동주기를 알아야 한다. 이 경우에는 자유표면 $y=0$ 에서의 경계조건을 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉,

$$\phi_x - \lambda\phi = 0 \tag{7}$$

여기서 λ 는 고유치(eigenvalue)이고, 식(1b)에 주어진 일반적인 경계조건에서 자유표면경계에서만 $\alpha = -\lambda$, $\beta = 0$ 인 특수한 경우가 되어 앞에서 설명한 유한요소법을 직접 응용하여 최종적으로 얻은 행렬식의 고유치 문제로 귀착된다. 단지 여기서 흥미로운 것은, 일반적인 고유치 문제는 고유치가 전체의 행렬함에 나타나는 반면, 당면한 자유표면과 문제에서는 수치계산에서 자유표면에 나타나는 절점(node)에 해당하는 행 벡터(row vector)에 만 고유치가 나타나며 그의 행벡터에는 고유치가 전혀 나타나지 않는다. 따라서 행렬식의 특수성을 이용하던 부분적으로 행렬식을 간단히하여 최종 고유치 문제를 푸는 행렬의 크기는 매우 적어지는 장점이 있다.

2.4. 선박 조파저항 문제

선박 조파저항 문제에서의 유한요소법의 응용도 위의 선박운동문제와 대체적으로 비슷하나 특히 다른 부분은 다음의 자유표면경계조건과 방사조건(radiation condition)이다. 여기서도 편의상 2차원 문제로 가정하고 직각좌표계에서 $y=0$ 가 자유표면이라고 가정한다. 선박에 고정된 좌표계에서 교란속도장함수 $\phi(x, y)$ 에 대하여 자유표면 경계조건은 다음과 같다.

$$U^2\phi_{xx} + g\phi_y = 0, \quad y=0 \tag{8}$$

여기서 U 는 정상속도이고 g 는 중력가속도이다. 그리고 이경우의 방사조건은 앞절에서 다룬 선박운동의

경우와 매우 달라, 선박의 진행방향의 먼 전방(far upstream)은 교란이 없고 후방(downstream)에만 교란이 존재한다. 여기서는 고전적인 범함수 대신 약형(weak form)인 양선형 범함수(bilinear functional)를 이용한다. 따라서 이 경우에는 유한요소법의 응용에 있어서 무엇보다도 자유표면 경계조건의 처리가 특이하다. 즉, 자유표면을 따라 부분적분을 한번 해주어 자유표면 경계조건이 trial과 test함수를 일차 미분항의

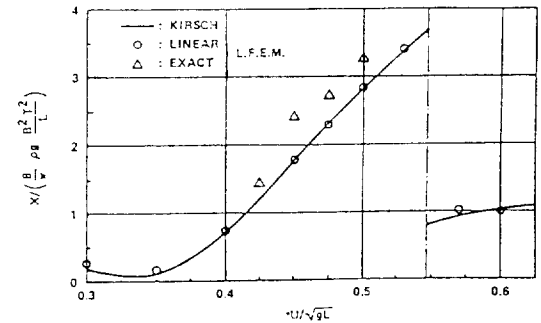


Fig. 4 Wave resistance of a parabolic ship in a canal
 (H : water depth W : canal width
 L : ship length B : beam T : draft
 $B/L=0.2, T/L=0.1, H/L=0.3, W/L=1.$)

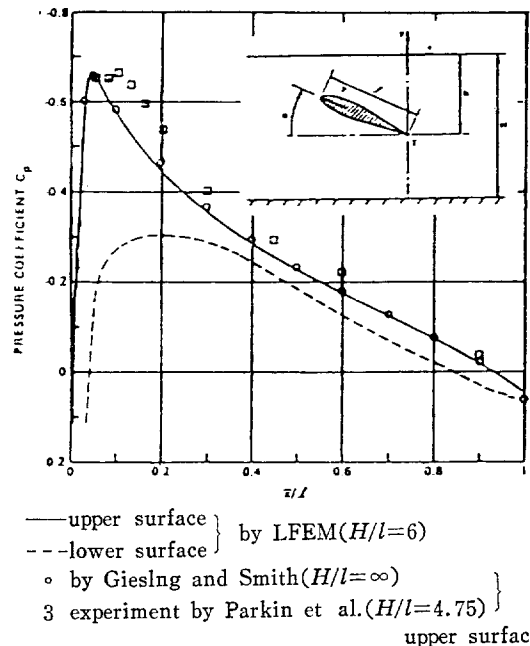


Fig. 5 Pressure distributions on the hydrofoil of $h/l=0.5, \alpha=5$ deg. and $F_4=0.95$ (Froude number based on 1)

양선형(bilinear)인 적분항으로 나타난다. 또한 전방 및 후방의 유동이 대칭이 아님으로 trial and test function basis가 비대칭인 함수를 택해야 한다. 따라서 최종 행렬방정식은 비대칭이 되어 위에서 다룬 2.1절의 경우와는 판이하게 된다. 이 문제에 국소유한요소법 응용의 한 예로서 선형수조에서의 조파저항 시험을 simulate한 수치계산결과를 Fig. 4에 보여준다[6].

조파저항 문제의 하나로서 수중익(hydrofoil) 문제도 다룰수 있다. 단지 이 경우에는 Kutta condition의 처리가 미지의 circulation에 대한 조건으로 대치되는 점이 위의 문제와 틀리는 점이다. Fig. 5는 수중익이 양각 α 를 갖고 정상 운동을 할때의 수중익 표면의 압력 계수를 보여주고 있다[7].

3. 비선형 문제

비선형 자유표면파 문제로서 여기서는 두가지 물리적인 문제를 다룬다. 즉, 슬로싱 문제 및 선박조파저항 문제로서 각각 3.1절 및 3.2절에 다루기로 한다.

3.1. 슬로싱 문제(sloshing problem)

비선형 슬로싱 문제에 유한요소법을 응용하기 위해서는 우선 적절한 범함수를 정의하여야 한다. 즉, 비선형 자유표면파 경계조건을 엄밀히 만족하고 그의 다른 경계조건도 엄밀히 만족하는 범함수는 Luke에 의해 이미 잘 알려져 있다. 즉 Luke의 변분범에서 정의한 범함수는 간단한 2차원 문제에서는 다음과 같이 주어진다[8].

$$J(\phi) = \int_0^t dt \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{R(x,t)} \left(\frac{1}{2} (F\phi)^2 + \phi_t + gy \right) dy dx \quad (9)$$

여기서 유체영역 R 은 $0 < y < h(x, t)$ 이고 $x_1 < x < x_2$ 이다 가정하고 자유표면방정식은 $y=h(x, t)$ 이다. 실제 슬로싱 문제에서 계산에의 편의를 위하여 속도 및 가속도를 가진 용기에 고정된 좌표계로 좌표변환하여 가속좌표계에서 유한요소법을 적용하였다. 2차원 직사각 단면내의 슬로싱 문제를 계산한 예는 Fig. 6에서 보여준다[9]. 여기서는 운동이 정지상태에서 시작하여 시간영역에 대한 계산을 수행하였으며, 용기의 운동이 시간조화운동이더라도 초기상태의 영향이 계속 존재하여 일반적으로 두 파성분이 존재함을 보여준다. 이는 본 계산에서 비점성 유체 모델을 가정하였기에 에너지의 소산이 불가능하기 때문이다.

3.2. 조파저항 문제

앞의 3.1절에서 개발한 시간영역에서의 유한요소법을 응용한 비선형 조파저항 문제의 처리는 원칙적으로

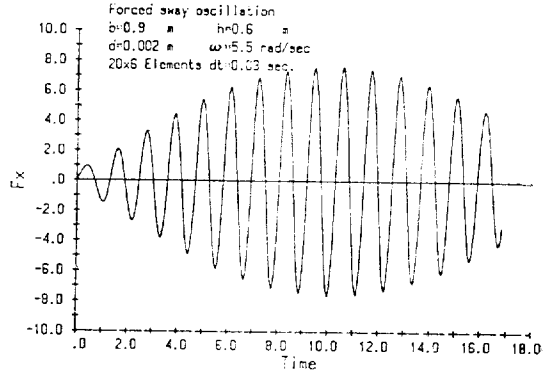


Fig. 6 Sway force on the rectangular tank in sway motion

- (b: breadth h: depth of tank
- d: amplitude of sway motion
- ω : circular frequency of sway motion
- dt: time step
- F_x : sway force nondimensionalized by $\rho b h d \omega^2$)

가능하나 비효율적인 점, 즉 예를 들면 계산영역을 크게 잡아 나가야 하는 점등이 있기에 2차원 문제에서는 그렇게 성공적이 못된다고 생각된다. 그러나 3차원 문제에서는 선체주변에서의 비선형이나 선체로부터 충분히 떨어진 유체영역에서는 선형으로 가정하여 이 문제를 위한 수치해법을 현재 개발중에 있다.

4. 결 론

앞에서 유한요소법 및 국소유한요소법의 응용으로 선형 자유표면파 문제 및 극히 제한된 비선형 문제를 다루었다.

장래, 유한요소법에 근거한 수치해법의 연구개발이 바람직하다고 생각되는 관심 있는 문제들을 열거하면 서 이 강연을 끝내기로 한다.

- 1) 복잡한 기하학적 형상에 대한 선형문제 : 단일 유체 및 내면파 문제
- 2) adaptive finite element method : a posteriori 계산 오차 추정 및 계산 효율 향상[10]
- 3) 비선형 조파저항 문제 및 양력문제
- 4) 점성 유체 유동 문제

참 고 문 헌

[1] Bai, K.J & Yeung R.W., "Numerical Solutions

- to Free Surface Flow Problem.," The 10th ONR Symposium, Cambridge, Mass., 1974.
- [2] 배광준, 김세은, "3차원 자유표면파 문제에서의 국소유한 요소법의 응용", 대한조선학회지, 제24권, 제 3호, 1987.
- [3] Bai, K.J., "A localized finite-element method for three dimensional ship motion problem", The 3rd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Paris, France, 1981.
- [4] Chen, H.S. & Mei, C.C., "Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea", The 10th ONR Symposium, Cambridge, Mass., 1974.
- [5] 김대준, 배광준, "항만내의 파도응답에 관한 수치계산", 대한조선학회지, 제25권 3호, 1988(계재 예정)
- [6] Bai, K.J., "A localized finite-element method for steady three dimensional free-surface flow problems", The 2nd Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Berkeley, California, 1977.
- [7] Bai, K.J., "A localized finite-element method for two-dimensional steady potential flows with a free surface", *J. Ship Research*, Vol. 22, No. 4, 1978.
- [8] Luke, J.C., "A variational principle for a fluid with a free surface", *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, Pt. 2, pp.395-397, 1967.
- [9] 배광준, 김장환, "슬로싱문제의 이론 및 실험적 연구(제 1 차년도)", 현대선박해양 연구소 용역 연구보고서, 1988.
- [10] 배광준, "An Adaptive Finite Element Computation for the Added Mass of a Rectangular Cylinder in a Canal", 대한조선학회, 제23권, 제 2호, 1986.