

Lyapunov 안정도 이론을 이용한 가변구조모델 추종 제어기 설계방법

A VSMFC Design Method Using the Stability Theory of Lyapunov

安 秀 寬* · 裴 焱 峰** · 朴 鍾 國***
(Sou-Kwan Ann · Jun-Kyung Bae · Chong-Kug Park)

요 약

강체를 가진 매니퓰레이터 제어를 위한 새로운 가변구조 모델추종 제어알고리즘을 제시한다. 기준 모델은 간단한 이중적분기이고 로보트 매니퓰레이터에 대한 가속도입력은 계적추적을 위해 비례. 미분제이기로 구성한다. 제어알고리즘은 현재 가변구조 제어기에서 일반적으로 이용하고 있는 스위칭 표면 도달조건인 $S \cdot \dot{S} < 0$ 대신 Lyapunov함수를 이용한다. 제안된 알고리즘은 관성행렬 매개변수의 정확한 인식을 요구하지 않고, 다수의 링크를 갖는 로보트에 쉽게 확장 적용할 수 있다. 또한 새로운 알고리즘은 역행렬 계산을 요구하지 않기 때문에 계산이 빠르다. 제안된 VSMFC의 성능을 평가하기 위해 모의 실험을 하였다.

Abstract- This paper presents a new variable structure model following control algorithm for control of manipulators. The reference model is a simple double integrators and the acceleration input for the robot manipulator consists of a proportional and derivative controller for the purpose of trajectory tracking. The control algorithm is derived by using Lyapunov stability theory instead of $S \cdot \dot{S} < 0$, as is usual in the current VSS controller design. This proposed control algorithm does not require good knowledge of the parameter in the inertia matrix and is easily extendable to robot manipulators with a higher number of links. Also, the new algorithm is computationally fast because of not requiring the matrix inversion. The computer simulation was carried out to evaluate the performance of the proposed VSMFC.

*正會員：慶熙大 工大 電子工學科 碩士課程
**正會員：慶熙大 工大 電子工學科 博士課程

***正會員：慶熙大 工大 電子工學科 教授 · 工博
接受日字：1989年 7月 6日

1次修正：1989年 9月 23日

2次修正：1989年 11月 7日

1. 서 론

n개의 강체 링크로 구성된 로보트 매니퓰레이터는 고도의 비선형 상호결합 미분방정식으로 표현되는 복잡한 시스템이다. 이와 같은 복잡한 비선형

구조때문에 고전 제어 기법을 매니퓰레이터에 적용할 경우, 매니퓰레이터의 정확한 모델링과 부하에 측을 요구하는 문제점이 발생하여 작업공간에서 성능 저하를 초래한다. 게다가, 비선형 보상은 계산이 복잡하며 구현하는데 많은 비용이 소모된다. 따라서 매니퓰레이터의 비선형 상호결합을 효과적으로 보상해야 한다. 이러한 어려움을 극복하기 위해 가변구조시스템(variable structure control : VSS) 이론을 사용한 제어 알고리즘이 개발되었다.[4, 9, 10, 11]

가변구조시스템의 주된 특징은 소위 슬라이딩모드(sliding mode)가 스위칭표면에 존재한다는 것이다. 가변구조 제어기에서 가변제환이득은 일반적으로 슬라이딩 존재조건인 $S \cdot \dot{S} < 0$ 을 이용하여 설계한다. 시스템 채적이 슬라이딩모드내에 있는 동안 제환시스템은 매개변수 변동과 왜란에 대해 둔감하며, 시스템 채적을 스위칭표면 위에 놓아게 한다. 이러한 VSS 둔감성은 매니퓰레이터 조인트 사이의 비선형 상호작용 제거를 가능하게 한다.

로보트 매니퓰레이터에 VSS 이론을 사용하여 개발된 제어 알고리즘은 판성행렬 사이의 상호결합(cross-coupling)과 역행렬 계산과 같은 난제가 발생하는데, 이러한 문제점을 극복하기 위하여 Young[5]은 hierachcal 방법을 사용하였고, Morgan[6]은 역학결합 보상방법을 도입하였다. 그러나 이를 방법들은 입력토오크가 과도할 경우 만족스럽지 못하다.

한편, 적응 메카니즘을 통하여 목적하는 채적과의 빠른 오차수렴을 하는 적응모델 추종제어(AMFC) 기법의 대안으로 정상상태에서 설정된 목적제적과의 빠른 수렴을 위해 가변구조모델 추종제어(VSMFC) 기법이 Young[5]에 의해 처음으로 제안되어 미지의 매개변수를 가진 선형 플랜트에 적용하였다. 또한 Young[8]은 VSMFC 시스템의 설계에 고이득제환을 이용하여 가변이득을 결정하였다. 이러한 고이득제환은 선택한 이득값에 의해 상태오차의 수렴성은 향상시킬 수 있지만 고이득으로 인해 큰 과도응답이 발생할 수 있으며, 또한 이득의 선택은 반복적인 시행착오를 거친후 최적의 이득값을 결정할 수 있으므로 이득에 대한 안정도 판별이 어렵다. Bailey[1]과 Yeung [3]등은 Lyapunov함수를 이용한 제어기법을 로보트 매니퓰레이터에 적용하였다. Bailey는 모의실험에서 샘플링 주기를 0.0005sec로 설정하였기 때문에 실제 구현하는데 어려움이 있고, 또한 Yeung과 Chen은 역행렬 계산문제를 제거하였지만 SPR(set-point regulation) 문제에 한정하여 다루

었다. [3] SPR은 출발점과 도착점만의 좌표를 고려하고 이동경로는 고려하지 않기 때문에 이동경로에 세약조건이 존재하면 사용하기 곤란하고, 또한 산업용 로보트에 의해 수행되는 대부분의 실제 채적들은 sufficiently rich하므로 로보트 매니퓰레이터에 적용하기는 곤란하다.

본 논문은 이상의 문제점을 극복하기 위하여 Yeung과 Chen의 Lyapunov제어기법을 바탕으로 하여 판성행렬 각 요소에 경계치를 할당하여 로보트 매니퓰레이터 매개변수의 정확한 수치를 요구하지 않고 다수의 링크를 갖는 로보트 매니퓰레이터로 쉽게 확장 적용할 수 있고, 또한 기준모델을 설정하여 매니퓰레이터와 모델사이의 상태오차로 스위칭표면을 선택하여 정상상태에서 상태오차를 감소시키는 VSMFC 제어기를 설계한다. 제안된 VSMFC제어기 설계방법은 현재 일반적인 가변구조 제어기 설계방법에서 슬라이딩모드 존재 조건인 $S \cdot \dot{S} < 0$ 대신 Lyapunov함수를 도입하여 슬라이딩운동을 일으키는 조건을 제시하고, 이 조건을 만족하도록 제어입력을 설계한다. 또한, 기준모델은 간단한 이중적분기로 구성하여, 가속도 입력은 비례, 미분(PD) 제어기에 의해 발생시켰으며 기준모델의 입력으로 사용한다.

본 논문에서 제시한 제어기 설계방법을 두개의 링크를 갖는 로보트에 적용하여 모의실험을 하였다. 또한 모의실험을 통하여 로보트 매니퓰레이터의 채적과 목적제적과의 수렴성, 수렴시간, 오차의 감소에 대하여 논의한다.

2. 로보트 매니퓰레이터 역학모델방정식

n 개의 강체 링크로 구성된 로보트 매니퓰레이터는 일반적으로 비선형 역학특성을 갖는 시스템으로 역학방정식은 Lagrange방법을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\partial L(q)/\partial \dot{q}) - \partial L(q)/\partial q = \tau(t) \quad (1)$$

여기서 q , \dot{q} 는 조인트 좌표계에서 $n \times 1$ 위치, 속도 벡터이고 τ 는 구동기에 의해 로보트 매니퓰레이터에 공급되는 $n \times 1$ 토오크 벡터이다. 식 (1)에서 L 은 Lagragian 함수로 다음과 같다.

$$L(q) = K(q, \dot{q}) - P(q) \quad (2)$$

식 (2)에서 $K(q, \dot{q})$ 는 로보트 매니퓰레이터의 운

동에너지이고 $P(q)$ 는 위치에너지이다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 로보트 매니퓰레이터 역학방정식은 다음과 같다.

$$\tau(t) = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) \quad (3)$$

여기서,

$D(q)$: $n \times n$ 대칭 정정(positive definite)
관성행렬

$H(q, \dot{q})$: $n \times 1$ 코리올리스 및 원심력벡터

$G(q)$: $n \times 1$ 중력벡터

q, \dot{q}, \ddot{q} : $n \times 1$ 조인트 위치, 속도, 가속도
벡터

식 (3)의 $H(q, \dot{q})$ 에서 속도벡터 \dot{q} 를 분리하여,

$$H(q, \dot{q}) = \bar{H}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (4)$$

식 (3)에 대입하면 로보트 매니퓰레이터의 역학방정식 (3)은 다음과 같다.

$$\tau(t) = D(q)\ddot{q} + \bar{H}(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (5)$$

여기서, $\bar{H}(q, \dot{q})$ 는 $n \times n$ 행렬이다.

3. 제어기 설계

VSMFC 시스템의 설계목적은 슬라이딩모드가 스위칭표면 위에서 발생하고 매니퓰레이터의 캐직과 목적캐직 사이의 추적오차가 만족할만한 과도응답을 가지며 정상상태($t \rightarrow \infty$)에서 추적오차가 0에 수렴하도록 스위칭표면 이득행렬과 불연속 채환제어입력을 결정하는 것이다.

3.1절에서는 현재 가변구조제어기 설계에서 이용되고 있는 슬라이딩모드 도달 조건인 $S \cdot \dot{S} < 0$ 을 이용한 VSMFC제어기 설계방법에 대하여 설명한다. 이러한 VSMFC 설계방법은 관성행렬의 상호결합(cross coupling)과 역행렬 문제가 발생하며, 이러한 관성행렬의 특성은 많은 조인트를 갖는 로보트 매니퓰레이터에서는 각 링크의 매개변수와 부하의 정확한 인식을 요구하는 매우 복잡한 문제점을 야기한다.

이와같은 문제점을 해결하기 위하여 Lyapunov 안정도 이론을 도입한 새로운 VSMFC 설계방법을 3.2절에 제시한다. 제시한 VSMFC제어기 설계방법은 관성행렬의 각 요소에 경계치를 할당하여 관성행렬 매개변수의 정확한 수치를 요구하지 않고

많은 조인트를 갖는 로보트 매니퓰레이터에 쉽게 확장하여 적용할 수 있다. 또한 관성행렬의 역행렬이 존재하지 않기 때문에 계산시간이 절약된다.

3.1 일반적인 가변구조 제어기

로보트 매니퓰레이터의 역학 방정식(5)에서 상태 벡터로 q, \dot{q} 를 취하면 로보트 매니퓰레이터의 상태방정식과 기준모델의 상태방정식은 식 (6)과 같다. [2, 7, 11]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_p(t)x(t) + B_p(t)\tau(t) \\ \dot{x}_m(t) &= A_m X_m(t) + B_m r(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_p(t), A_m \in R^{2n \times 2n}, B_p(t), B_m \in R^{2n \times n}, \\ q, \dot{q}, q_m, \dot{q}_m \in R^{n \times 1} \\ X = [q, \dot{q}]^T, X_m = [q_m, \dot{q}_m]^T, \\ X(t), X_m(t) \in R^{2n \times 1} \end{aligned}$$

상태오차방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= X - X_m \\ \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) + (A_m - A_p)X(t) + B_m r(t) \\ &\quad - B_p(t)\tau(t), \varepsilon, \dot{\varepsilon} \in R^{2n \times 1} \end{aligned} \quad (7)$$

가변구조 시스템은 로보트 매니퓰레이터와 기준모델사이의 상태오차캐적이 스위칭표면에 도달하면 스위칭표면에 따라 채환이득이 변화하여 불연속입력을 갖는 특성이 있다. 로보트 매니퓰레이터와 기준모델사이의 상태오차캐적은 스위칭표면에 도달한 후 스위칭표면에 따라 다음과 같은 불연속입력을 갖는다.

$$\tau_i = \begin{cases} \tau_i(X, \varepsilon, r) & s_i(\varepsilon) < 0 \\ \tau_i^+(X, \varepsilon, r) & s_i(\varepsilon) > 0, \quad i=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

식 (8)에서 τ_i 는 τ 의 i 번째 성분이고, $s_i(\varepsilon)$ 는 스위칭표면ベ터 s 의 i 번째 성분이다. 상태오차공간에서 스위칭벡터는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} s(\varepsilon) &= c\varepsilon = 0 \\ C &= \text{diag}[c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 1], \\ c_i &> 0, i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

만약 스위칭표면 $s(\varepsilon)$ 위에서 슬라이딩운동이 일

어난다면, 스위칭표면 각 측(side)에서 상태오차계적의 운동은 스위칭표면으로부터 멀어지지 않는다. 따라서, 상태오차계적은 계속적으로 스위칭표면 $s(\epsilon)=0$ 위에서 슬라이딩하고, 또한 스위칭표면에 잔존한다. i 번째 스위칭표면에서 슬라이딩운동이 일어나기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\lim_{s_i \rightarrow 0^+} \dot{s}_i(\epsilon) < 0, \lim_{s_i \rightarrow 0^-} \dot{s}_i(\epsilon) > 0 \quad (10)$$

식 (10)의 등가적인 표현은 다음과 같다.

$$s_i(\epsilon) \cdot \dot{s}_i(\epsilon) < 0 \quad (11)$$

슬라이딩 운동상태에서 스위칭표면은 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$s_i(\epsilon)=0, \dot{s}_i(\epsilon)=0 \quad (12)$$

슬라이딩운동 동안 로보트 매니퓰레이터의 입력 τ 는 선형 등가입력 τ_{eq} 로 대치된다. τ_{eq} 는 $\dot{s}(\epsilon)=0$ 으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\tau_{eq} = -(CB_p)^{-1}C\{A_m\epsilon + (A_m + A_p)X + B_mr\} \quad (13)$$

시스템이 $s(\epsilon)=0$ 을 만족하지 않을 경우, 즉 슬라이딩 운동이 존재하지 않을 경우 로보트 매니퓰레이터는 불연속입력 τ^+ 와 τ^- 를 갖는데, 이것은 상태오차계적이 스위칭표면에서 멀어지지 않게 하기 위해서이다. 이때 τ^+ 와 τ^- 는 슬라이딩운동이 일어나기 위한 조건식 (11)을 만족하도록 결정한다.

3.2 Lyapunov함수를 이용한 새로운 VSMFC 제어기 설계

일반적으로 기준모델은 선형모델을 선택하는데, 본 논문에서는 기준모델을 다음과 같은 간단한 이중적분기로 구성한다.

$$\frac{d}{dt}q_m = \dot{q}_m, \frac{d}{dt}\dot{q}_m = u \quad (14)$$

식 (14)에서 q_m, \dot{q}_m 은 기준모델의 $n \times 1$ 위치, 속도 벡터이고, u 는 기준입력으로 실제로 측정할 수 없는 매니퓰레이터의 가속도를 위해 CT(Computed Torque) 방법에 의해 비례, 미분(PD)기로 다음과 같이 구성하여 매니퓰레이터의 가속도입력과 기준모델의 입력으로 대치하였다.

$$u(t) = \ddot{q}_d(t) + Kv(\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)) + Kp(q_d(t) - q(t)) \quad (15)$$

식 (15)에서 $q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d$ 는 목적체적의 위치, 속도, 가속도 $n \times 1$ 벡터이다. 이득행렬 Kp 와 Kv 는 $n \times n$ 대각행렬로 다음과 같은 오차특성방정식의 근이 복소수 좌반평면에 존재하도록 선택한다.

$$P^2I + KvP + Kp = 0 \quad (16)$$

여기서, $P = d/dt$ 인 미분연산이다.

로보트 매니퓰레이터와 기준모델사이의 상태오차방정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} e &= q - q_m, \quad \dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_m \\ \ddot{e} &= \ddot{q} - \ddot{q}_m \\ \dot{e} &= D(q)^{-1}(\tau - \bar{H}(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) - u \\ e, \dot{e}, \ddot{e} &\in R^{n \times 1} \end{aligned} \quad (17)$$

스위칭표면은 기준모델과 매니퓰레이터 사이의 상대오차를 사용하여 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} S(q, q_m) &= C(q - q_m) + (\dot{q} - \dot{q}_m) \\ S(e, \dot{e}) &= Ce + \dot{e}, \\ \dot{S}(e, \dot{e}) &= C\dot{e} + \ddot{e}, S \in R^{n \times 1} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)에서 스위칭표면 $\dot{S}(e, \dot{e})$ 양변에 관성행렬을 곱하면 식 (19)와 같다.

$$D(q)\dot{S}(e, \dot{e}) = D(q)Ce + D(q)\dot{e} \quad (19)$$

상태추적오차 $e = q - q_m$ 을 식 (19)에 대입하면 식 (19)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D(q)\dot{S}(e, \dot{e}) &= D(q)Ce + D(q)(\dot{q} - \dot{q}_m) \\ D(q)\dot{S}(e, \dot{e}) &= D(q)Ce + D(q)\dot{q} - D(q)\dot{q}_m \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)에서 기준모델의 가속도 \ddot{q}_m 은 기준입력 u 로 대치되고, $D(q)\dot{q}$ 는 매니퓰레이터 역학방정식 (5)로 대치하면 식 (20)은 다음과 같이 된다.

$$D(q)\dot{S}(e, \dot{e}) = D(q)Ce + \bar{H}(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - D(q)u \quad (21)$$

식 (21)에서 $D(q)C = K, P = [K, -H, -D]$, $Y = [\dot{e}^T, \dot{q}^T, u^T]^T$ 라 정의하면 식 (21)은 아래와

같다.

$$D(q)\dot{S}(\dot{e}, \ddot{e}) = PY + \tau - G(q) \quad (22)$$

Lyapunov안정도 이론을 사용한 스위칭표면에 대한 도달조건을 유도하기 위해 식 (22)의 $D(q)\dot{S}(\dot{e}, \ddot{e})$ 를 다음과 같이 가정한다.

(가정)

$$\begin{aligned} D(q)\dot{S}(\dot{e}, \ddot{e}) &= \begin{bmatrix} -w_1 \operatorname{sgn}(s_1) \\ \cdots \\ -w_n \operatorname{sgn}(s_n) \end{bmatrix} \\ &= -AS(e, \dot{e}) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, $A_{ij} = \operatorname{diag}[w_i(q, \dot{q}) \operatorname{sgn}(s_i)/s_i]$

$$\begin{aligned} w_i(q, \dot{q}) > 0 &\quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \operatorname{sgn}(s_i) = \begin{cases} -1 & s(e, \dot{e})_i < 0 \\ 0 & s(e, \dot{e})_i = 0 \\ +1 & s(e, \dot{e})_i > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

스위칭표면의 점근적 안정성을 증명하기 위하여, Lyapunov함수를 다음과 같이 선택한다.

$$V(t) = S(e, \dot{e})^T D(q) S(e, \dot{e}) \quad (25)$$

식 (25)의 Lyapunov함수를 시간에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{S}(e, \dot{e})^T D(q) S(e, \dot{e}) \\ &\quad + S(e, \dot{e})^T \dot{D}(q, \dot{q}) S(e, \dot{e}) \\ &\quad + S(e, \dot{e})^T D(q) \dot{S}(\dot{e}, \ddot{e}) \\ &= (D(q)^T \dot{S}(\dot{e}, \ddot{e}))^T S(e, \dot{e}) \\ &\quad + S(e, \dot{e})^T \dot{D}(q, \dot{q}) S(e, \dot{e}) \\ &\quad + S(e, \dot{e})^T (D(q) \dot{S}(\dot{e}, \ddot{e})) \\ &= -2S(e, \dot{e})^T (A - \dot{D}(q, \dot{q})/2) S(e, \dot{e}) \end{aligned} \quad (26)$$

Lyapunov안정도 이론에 의해 스위칭표면이 점근적으로 안정하려면 $\dot{V}(t) < 0$ 이어야 하므로 행렬 $A - \dot{D}(q, \dot{q})/2$ 는 정정행렬(positive definite)이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} A_{ij} - \dot{D}_{ij}(q, \dot{q})/2 &> 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (27)$$

로서, Gershgorin's[12] 이론에 의해 식 (27)이 항상 성립하기 위해서는 식 (28)과 같아야 한다.

$$A_{ij} > \sum_{j=1}^n |\dot{D}_{ij}(q, \dot{q})/2| \quad (28)$$

식(24)에서 행렬 A_{ij} 를 식 (28)에 대치하여 Lyapunov안정도 이론을 만족하는 조건식(29)을 사용하면

$$w_i \operatorname{sgn}(s_i) > s_i \sum_{j=1}^n |\dot{D}_{ij}(q, \dot{q})/2| \quad (29)$$

불연속입력을 다음과 같은 방법으로 식 (22)과 식 (23)에서 유도할 수 있다.

$$P_{ij} Y_j - \tau_i - G_i(q) = \begin{bmatrix} -w_1 \operatorname{sgn}(s_1) \\ \cdots \\ -w_n \operatorname{sgn}(s_n) \end{bmatrix} \quad (30)$$

식 (30)에서 행렬 P_{ij} 를 다음과 같이 정의한다.

$$P_{ij} = P_{ij}^0 + \Delta P_{ij} \quad (31)$$

여기서, P_{ij}^0 는 P_{ij} 의 평균값이고(mean value), ΔP_{ij} , $\dot{D}_{ij}(q, \dot{q})$, $G_i(q)$ 는 미지의 값이지만 경계치(boundary value)를 알 수 있는 매개변수에 의해 변화하는 값이다. 경계치를 다음과 같이 정의하여

$$\begin{aligned} |\Delta P_{ij}| &< \bar{P}_{ij}, |\dot{D}_{ij}(q, \dot{q})| < N_{ij}(q, \dot{q}), \\ |G_i(q)| &< \hat{G}_i(q) \end{aligned}$$

식 (31)를 식 (30)에 대입하면 로보트 매니퓰레이터의 입력은 식 (32)와 같다.

$$\begin{aligned} \tau_i &= -P_{ij}^0 Y_j - \Delta P_{ij} Y_{ij} + G_i(q) - w_i \operatorname{sgn}(s_i) \\ \tau_i &= \tau_i^0 + \tau_i' \end{aligned} \quad (32)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tau_i' &= -\Delta P_{ij} Y_j + G_i(q) - w_i \operatorname{sgn}(s_i), \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (33)$$

식 (32)에서 τ_i^0 는 상태오차제적이 스위칭표면에서 슬라이딩운동 동안의 입력이다. 그러나 오차상태제적이 슬라이딩 운동을 하지 않을 경우에는 입력 τ_i' 에 따라 가변한다. 식 (33)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta P_{ij} Y_j - G_i(q) + \tau_i' = \begin{bmatrix} -w_1 \operatorname{sgn}(s_1) \\ \dots \\ -w_n \operatorname{sgn}(s_n) \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

식 (34)에 서, $s_i > 0$ 이면

$$\sum_{j=1}^n \Delta P_{ij} Y_j - G_i(q) + \tau_i' = -w_i \operatorname{sgn}(s_i) \\ < -s_i \sum_{j=1}^n |\dot{D}_{ij}(q, \dot{q})|/2 \quad i = 1, \dots, n \quad (35)$$

이고, $s_i < 0$ 이면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^n \Delta P_{ij} Y_j - G_i(q) + \tau_i' = -w_i \operatorname{sgn}(s_i) \\ > -s_i \sum_{j=1}^n |\dot{D}_{ij}(q, \dot{q})|/2 \quad i = 1, \dots, n \quad (36)$$

식 (35)와 식 (36)을 동시에 만족하는 증가적 표현식은 식 (37)과 같다.

$$\operatorname{sgn}(s_i) \left(\sum_{j=1}^n \Delta P_{ij} Y_j - G_i(q) + \tau_i' \right) \\ < -s_i \sum_{j=1}^n |\dot{D}_{ij}(q, \dot{q})|/2 \quad i = 1, \dots, n \quad (37)$$

식 (37)에서 τ_i' 는 아래와 같다.

$$\tau_i' = -\operatorname{sgn}(s_i) \left(\sum_{j=1}^n \Delta P_{ij} |Y_j| + G_i(q) \right) \\ - s_i \sum_{j=1}^n N_{ij}(q, \dot{q})/2, \quad i = 1, \dots, n \quad (38)$$

결국, 가변입력 τ_i' 를 포함한 로보트 매니퓰레이터 입력도 오크는 다음과 같다.

$$\tau_i' = - \left(\sum_{j=1}^n (K_{ij}^0(q) \dot{e}_j - \bar{H}_{ij}^0(q, \dot{q}) \dot{q}_j \right. \\ \left. - D_{ij}^0(q) u_j \right) - s_i \sum_{j=1}^n N_{ij}(q, \dot{q})/2 \\ - \operatorname{sgn}(s_i) \left[\sum_{j=1}^n \hat{K}_{ij}(q) |\dot{e}_j| \bar{H}_{ij}(q, \dot{q}) |\dot{q}_j| \right. \\ \left. + \hat{D}_{ij}(q) |u_j| + \hat{G}_{ij}(q) + \hat{G}_i(q) \right] \quad i = 1, \dots, n \quad (39)$$

그림 1은 본 논문에서 제안한 가변구조 모델추종 제어기 블럭선도이다.

4. 모의 실험

Lyapunov 안정도 이론을 이용하여 새로운 VSMFC를 그림 2와 같은 두개의 조인트를 갖는

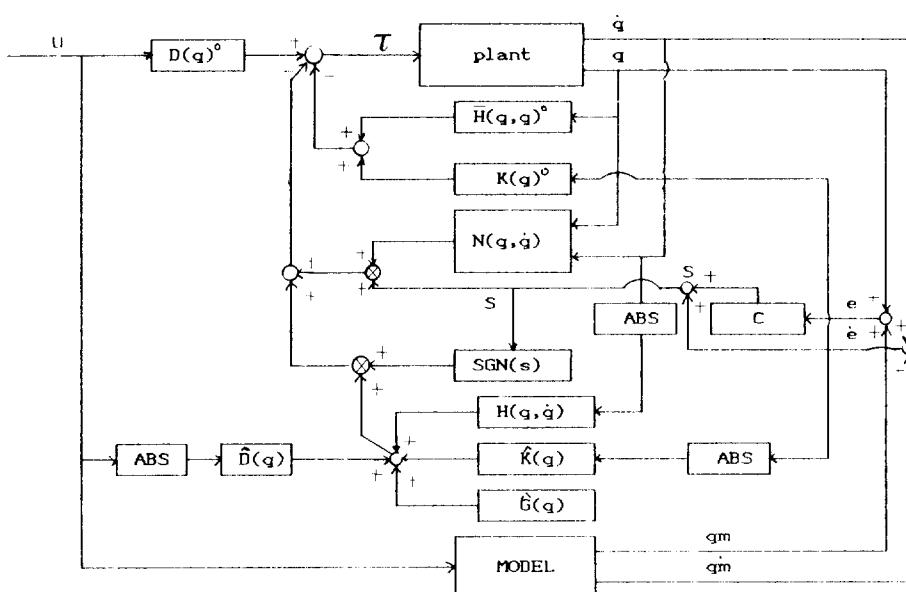


그림 1 VSMFC제어기 블럭선도

Fig. 1 Block diagram of the VSMFC controller

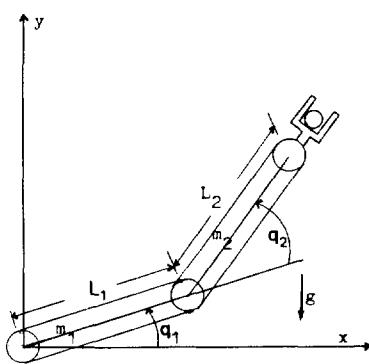


그림 2 두 개의 링크를 갖는 로보트
매니퓰레이터 모델
Fig. 2 Two-link Planar Robot model

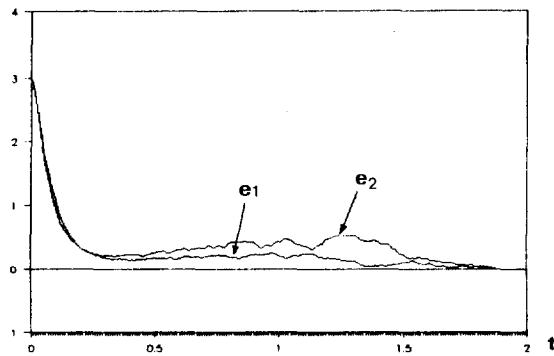


그림 3 예제(1)의 위치오차
Fig. 3 Position error of example 1

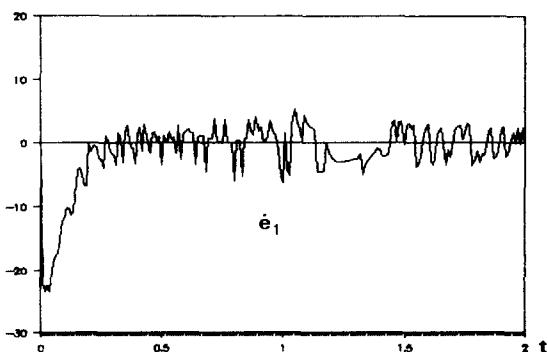
로보트 매니퓰레이터에 적용하여 모의실험 하였다.

두개의 링크를 갖는 로보트 매니퓰레이터의 관성행렬과 코리올리스항, 중력항은 다음과 같다.
[8]

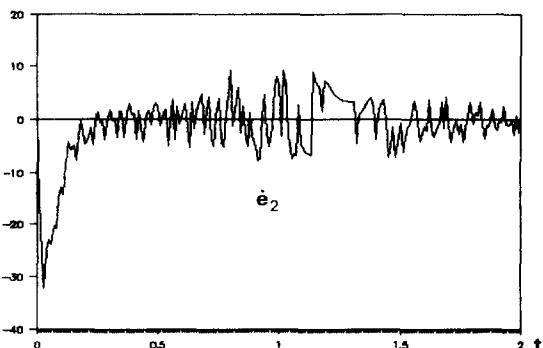
$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$\begin{aligned} D_{11} &= (m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 \\ &\quad + 2m_2r_1r_2\cos(q_2) + J_1, \\ D_{12} &= m_2r_2^2 + m_2r_1r_2\cos(q_2), \quad D_{21} = D_{12}, \end{aligned}$$



(a) 첫 번째 조인트의 속도오차
(a) Velocity error of the first joint



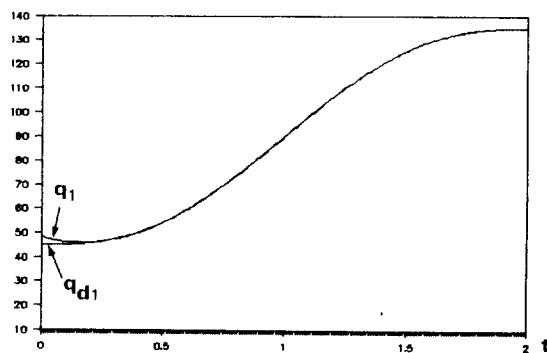
(b) 두 번째 조인트의 속도오차
(b) Velocity error of the second joint

그림 4 예제(1)의 속도오차
Fig. 4 Velocity error of example 1

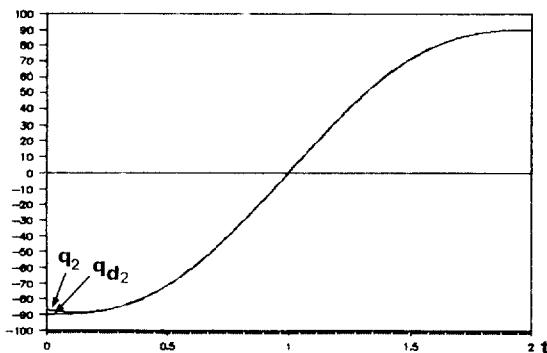
$$\begin{aligned} D_{22} &= m_2r_2^2 + J_2, \\ H_{11} &= m_2r_1r_2\sin(q_2)\dot{q}_1, \\ H_2 &= 2m_2r_1r_2\sin(q_2)\dot{q}_1, \\ H_{21} &= 0, \\ H_{22} &= -m_2r_1r_2\sin(q_2)\dot{q}_2, \\ G_1 &= ((m_1 + m_2)r_1\cos(q_2) \\ &\quad + m_2r_2\cos(q_1 + q_2))g, \\ G_2 &= (-m_2r_2\cos(q_1 + q_2))g. \end{aligned}$$

매니퓰레이터 역학방정식에서 $m_1 = 0.5\text{kg}$, $m_2 = 6.25\text{kg}$, $r_1 = 1\text{m}$, $r_2 = 0.8\text{m}$, $J_1 = 5\text{kg}\cdot\text{m}$, $J_2 = 5\text{kg}\cdot\text{m}$, $g = 9.8\text{N}\cdot\text{m/sec}$ 로 선택하였다. 로보트 매니퓰레이터의 입력 τ_1 과 τ_2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -16.75c_1\dot{e}_1 - 5c_2\dot{e}_2 + 16.75u_1 + 5u_2 \\ &\quad - 7.5s_1|\dot{q}_2| \\ &\quad - \text{sgn}(s_1)(10c_1|\dot{e}_1| + 5c_2|\dot{e}_2| + 5|\dot{q}_1||\dot{q}_2| \\ &\quad + 10|\dot{q}_2||\dot{q}_2| + 10|u_1| + 5|u_2| + 120) \end{aligned}$$



(a) 첫번째 조인트에 대한 2초 동안의 위치수렴
(a) Position convergence during 2sec for the first joint



(b) 두번째 조인트에 대한 2초 동안의 위치수렴
(b) Position convergence during 2sec for the second joint

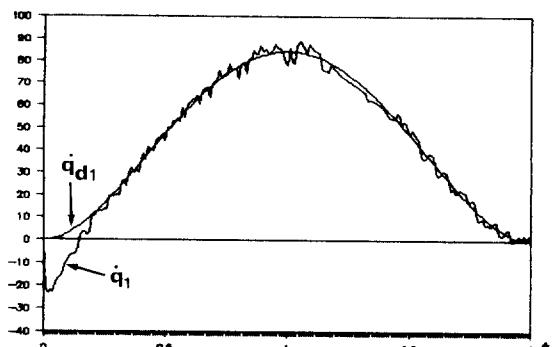
그림 5 예제(1)의 로보트 매니퓰레이터와 목적체적 사이의 위치수렴

Fig. 5 Position convergence between robot manipulator and desired trajectory of example 1

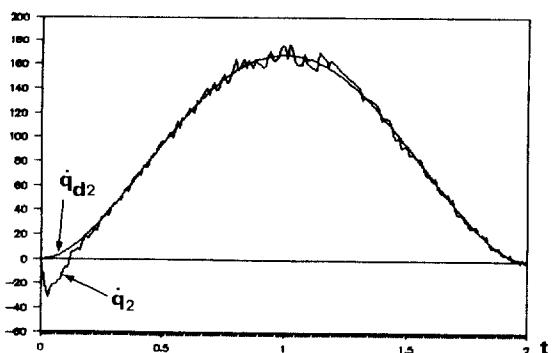
$$\begin{aligned}\tau_2 = & -5c_1\dot{e}_1 - 10c_2\dot{e}_2 + 5u_1 + 10u_2 - 2.5s_2|\dot{q}_2| \\ & - \text{sgn}(s_2)(5c_2\dot{e}_1 + 5|\dot{q}_2||\dot{q}_2| + 5|u_1| + 60)\end{aligned}$$

식 (15)에서 이득행렬 Kp , Kv 는 400I, 40I, 스위치표면 매개변수 c_1 과 c_2 는 각각 5, 5로 선택하였다. 목적 채적은 두 가지의 경우에 대하여 모의실험을 하였다.

예제1) 초기위치(45° , -90°)에서 최종위치(135° , 90°)까지 2sec동안 이동하는 채적을 5차 다항식으로 설계하였으며, 초기위치오차는 $(3^\circ$, -3°), 초기속도 오차는 0으로 선택하였다.



(a) 첫번째 조인트에 대한 2초 동안의 속도수렴
(a) Velocity convergence during 2sec for the first joint



(b) 두번째 조인트에 대한 2초 동안의 속도수렴
(b) Velocity convergence during 2sec for the second joint

그림 6 예제(1)의 로보트 매니퓰레이터와 목적체적 사이의 속도수렴

Fig. 6 Velocity convergence between robot manipulator and desired trajectory of esample 1

$$\begin{aligned}q_{d1} = & 16.875t^5 - 84.375t^4 + 112.5t^3 + 45^\circ \\ q_{d2} = & 33.75t^5 - 168.75t^4 + 225t^3 - 90^\circ\end{aligned}$$

그림 3은 두 조인트에 대한 로보트 매니퓰레이터와 목적체적 사이의 위치오차로서 0.5sec 이후의 첫번째 조인트에 대한 최대오차와 최소오차는 $0.247(\text{deg})$ 와 $0.00094(\text{deg})$ 이다. 또한 두번째 조인트에 대한 최대오차와 최소오차는 $0.53(\text{deg})$ 와 $0.00049(\text{deg})$ 이다. 그림 4의 (a)는 첫번째 조인트에 대한 목적체적과 로보트 매니퓰레이터 사이의 속도오차이고, (b)는 두번째 조인트에 대한 속도

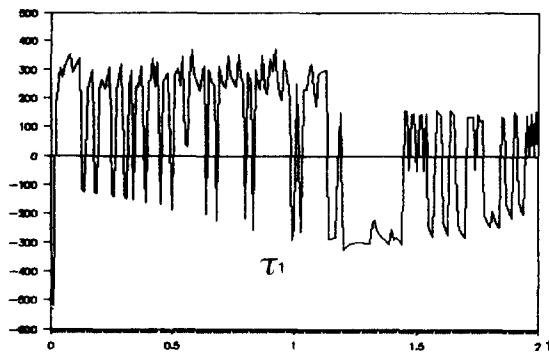


그림 7 예제(1)의 경우 로보트 매니퓰레이터의 첫번째 조인트의 입력토오크
Fig. 7 The input torque of the first joint for robot manipulator of example 1

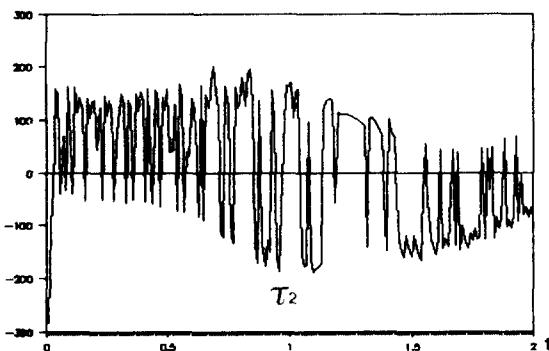


그림 8 예제(1)의 경우 로보트 매니퓰레이터의 두번째 조인트의 입력토오크
Fig. 8 The input torque of the second joint for robot manipulator of example 1

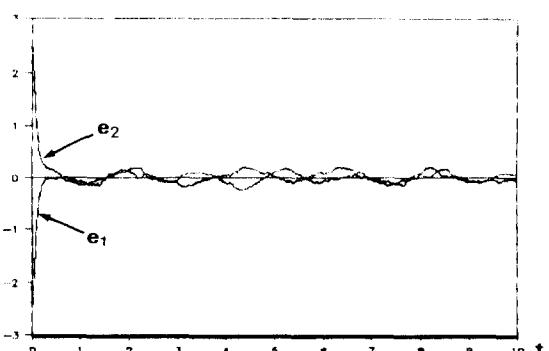
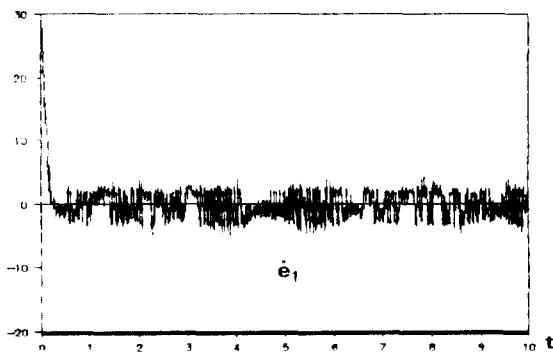
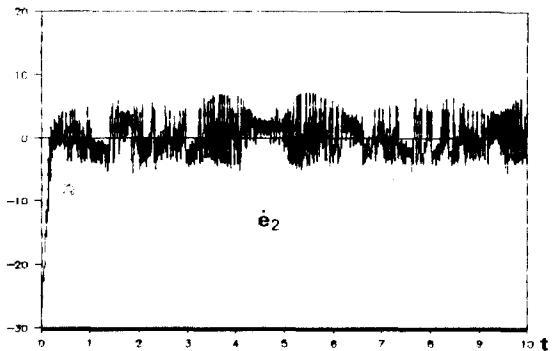


그림 9 예제(2)의 위치오차
Fig. 9 Position error of example 2

오차이다. 그림 5의 (a)는 첫번째 조인트에 대한 2sec동안의 로보트 매니퓰레이터와 목적궤적사이의 위치수렴성을, (b)는 두번째 조인트에 대한 2



(a) 첫번째 조인트의 속도오차
(a) Velocity error of the first joint



(b) 두번째 조인트의 속도오차
(b) Velocity error of the second joint

그림 10 예제(2)의 속도오차
Fig. 10 Velocity error of second joint

sec동안의 위치수렴성이다. 위치에 대한 수렴시간은 0.3sec에서 수렴을 한다. 그림 6의 (a)는 첫번째 조인트에 대한 2sec동안의 로보트 매니퓰레이터와 목적궤적사이의 속도수렴성을, (b)는 두번째 조인트에 대한 2sec동안의 속도수렴성을 보여준다. 그림 7은 첫번째 조인트에 공급되는 불연속 입력토오크이고, 그림 8은 두번째 조인트에 공급되는 불연속 입력토오크이다.

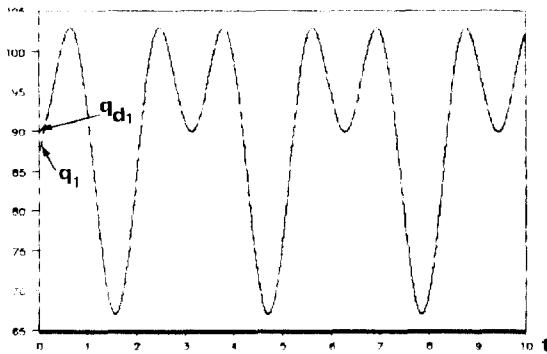
예제2) 목적궤적 변화에 대한 알고리즘의 성능을 조사하기 위해 persistently exciting한 궤적을 다음과 같이 선택을 하였다.

$$q_{d1} = \pi/2 + (\sin(2t) - \cos(4t))/5$$

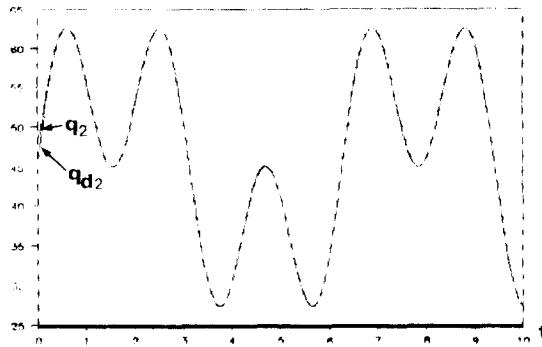
$$q_{d2} = \pi/5 + (\sin(t) - \sin(3t))/5$$

로보트 매니퓰레이터의 초기값은 $(87^\circ, 48^\circ)$ 로, 목적궤적의 초기값은 $(90^\circ, 45^\circ)$ 로 선택하였고, 초기위치오차는 $(-3^\circ, 3^\circ)$ 속도오차는 0으로 선택하였다.

그림 9는 두 조인트에 대한 로보트 매니퓰레이터와 목적궤적사이의 위치오차로서 0.5sec 이후의



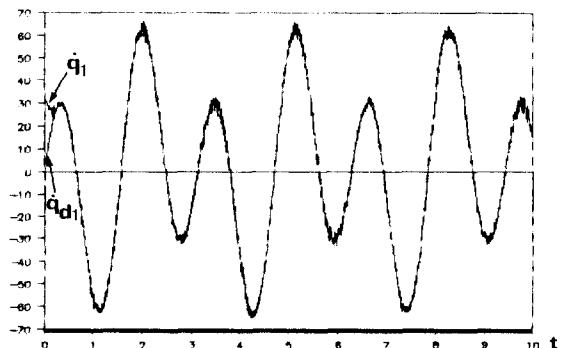
(a) 첫번째 조인트에 대한 10초 동안의 위치수렴
(a) Position convergence during 10sec for the first joint



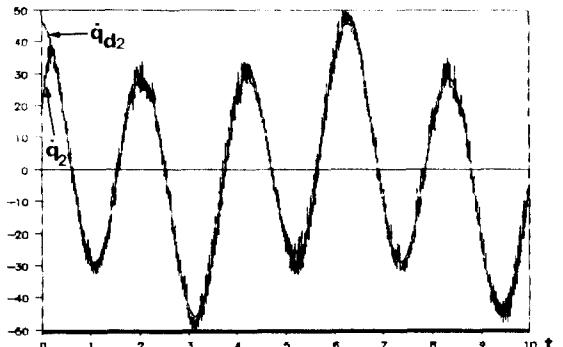
(b) 두번째 조인트에 대한 10초 동안의 위치수렴
(b) Position convergence during 10sec for the second joint

그림 11 예제(2)의 로보트 매니퓰레이터와 목적체적 사이의 위치수렴
Fig. 11 Position convergence between robot manipulator and desired trajectory of example 2

첫번째 조인트에 대한 최대오차와 최소오차는 0.237(deg)와 0.000034(deg)이다. 또한 두번째 조인트에 대한 최대오차와 최소오차는 0.195(deg)와 0.00005(deg)이다. 그림 10의 (a)는 첫번째 조인트에 대한 목적체적과 로보트 매니퓰레이터 사이의 속도오차이고, (b)는 두번째 조인트에 대한 속도오차이다. 그림 11의 (a)는 첫번째 조인트에 대한 10sec동안의 로보트 매니퓰레이터와 목적체적 사이의 위치수렴성을, (b)는 두번째 조인트에 대한 10sec동안의 위치수렴성이다. 위치에 대한 수렴시간은 0.25sec이고 작은 경계치내에서 수렴함



(a) 첫번째 조인트에 대한 10초 동안의 속도수렴
(a) Velocity convergence during 10sec for the first joint



(b) 두번째 조인트에 대한 10초 동안의 속도수렴
(b) Velocity convergence during 10sec for the second joint

그림 12 예제(2)의 로보트 매니퓰레이터와 목적체적 사이의 속도수렴
Fig. 12 Velocity convergence between robot manipulator and desired trajectory of example 2

을 알 수 있다. 그림 12의 (a)는 첫번째 조인트에 대한 10sec동안의 로보트 매니퓰레이터와 목적체적 사이의 속도수렴성을, (b)는 두번째 조인트에 대한 10sec동안의 속도수렴성을 보여준다. 이러한 속도수렴성은 멀림을 일으키면서 목적체적에 수렴한다. 그림 13은 첫번째 조인트에 공급되는 불연속 입력토오크이고, 그림 14는 두번째 조인트에 공급되는 불연속 입력토오크이다.

위의 두 예제에서, 위치오차는 멀림이 발생하지 않으나 속도오차는 멀림이 발생하여 경계치내에서 수렴한다. 로보트 매니퓰레이터의 위치는 목적체

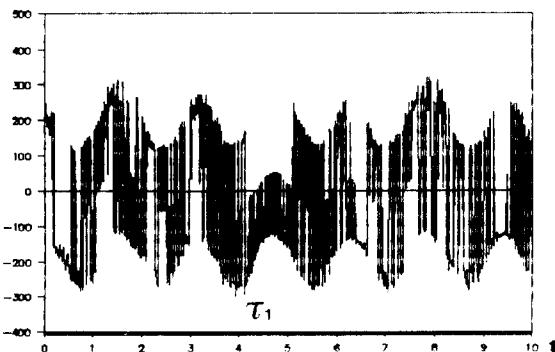


그림 13 예제(2)의 경우 로보트 매니퓰레이터의 첫번째 조인트의 입력토오크
Fig. 13 The input torque of first joint for the robot manipulator of example 2

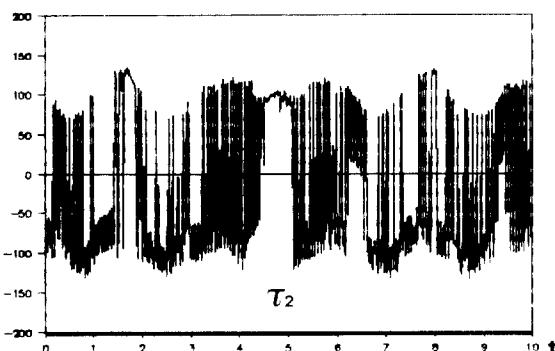


그림 14 예제(2)의 경우 로보트 매니퓰레이터의 두번째 조인트의 입력토오크
Fig. 14 The input torque second joint for the robot manipulator of example 2

적에 매우 빠른 수렴시간을 갖고 수렴하며, 속도는 멸림을 일으키면서 목적궤적에 수렴함을 알 수 있다. 또한 제시한 제어기는 위의 두가지 목적궤적에 대한 모의실험 결과 목적궤적의 변화에 민감하지 않음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서의 제어기 설계방법은 일반적인 가변구조 제어기 설계방법에서 사용하고 있는 스위칭 표면 도달조건인 $S \cdot \dot{S} < 0$ 대신 Lyapunov함수를 이용하여 스위칭 표면이 점근적으로 안정한 조건을 유도하고 이 조건을 만족하도록 제어기를 설계하였다. 기준모델은 간단한 이중직분기로 구성하였고, 매니퓰레이터에 대한 가속도입력을 CT(Computed-Torque) 방법에 의해 발생하였으며

기준모델의 입력으로 사용하였다.

제안된 제어기법은 완성행렬의 상호결합문제와 역행렬 계산문제를 보완하여 계산시간이 절약되며, 또한 보보트 매니퓰레이터 역학방정식의 관성행렬, 코리올리스벡터, 중력벡터에 경계치를 할당하여 정확한 상태와 부하값을 요구하지 않는다.

제어기를 두개의 링크를 갖는 로보트 매니퓰레이터에 적용한 결과 로보트 매니퓰레이터와 목적궤적과의 위치오차는 작은 경계치내에서 수렴하고, 속도오차는 멸림을 일으키면서 감소함을 알 수 있었다. 로보트 매니퓰레이터의 위치는 목적궤적에 빠르게 수렴하지만, 속도는 약간의 멸림을 일으키면서 수렴함을 알 수 있었고, 목적궤적의 변화에 대하여 민감하지 않음을 알 수 있었다.

Bailey와 Arapostathis는 컴퓨터 모의실험에서 샘플링 주기를 0.0005sec로 설정하였고, Yeung과 Chen은 SPR문제에 한정하였기 때문에 실제로 구현하는데 어려움이 있고, 로보트 매니퓰레이터에 적용하기 곤란하다. 그러나 본 논문에서는 컴퓨터 모의실험에서 샘플링 주기를 0.01sec로 설정하였고, 궤적이 sufficiently rich하기 때문에 현재의 컴퓨터 발전을 고려하면 마이크로 컴퓨터를 통하여 산업용 로보트에 적용할 수 있을 것으로 생각된다.

차후의 연구과제로 다른 VSMFC 기법과의 수렴속도, 비교와 부하가 시변이고, 비모형화 역학이나 접음 또는 왜란이 존재할 경우 제어기의 강건성에 대한 연구가 진행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] E. Bailey and A. Arapostathis, "A Sliding Mode Control for Robot Manipulator," Conference On Applied Motion Control, pp. 199-240, 1986.
- [2] L. Guzzella and H.P. Geering, "Model Following Variable Structure Control for A Class of Uncertain Mechanical System," IEEE PROC., pp. 312-316, 1986.
- [3] K.S. Yeung and Y.P. Chen, "A New Controller Design for Manipulators Using the theory of Variable Structure System," IEEE Trans. Autom. Contr., vol. 33, pp. 212-221, Feb, 1988.
- [4] K-K.D. Young, "Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure System," IEEE Trans. System,

- Man, and Cybernetic, vol. SMC-8, pp. 101-109, 1978.
- [5] K-K.D. Young, "Design of Variable Structure Model Following Control System," IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-23, pp. 1079-1085, 1978.
- [6] R.G. Morgan and U.O. Ozguner, "A Decentralized Variable Structure Control Algorighm for Robotic Manipulator," IEEE J. Robotics Automat., Vol. RA-1, pp. 57-65, Mar 1985.
- [7] A.S.I. Zinober and S.A. Billing, "Multivariable Variable-Structure Adaptive Model Following Control System," IEEE PROC. vol. 129, pp. 6-13, January 1982.
- [8] K.D. Young, "A Variable Structure Model Following Control Design for Robotics Application," IEEE Int. Cont. Robotics and Automa., vol. 3, pp. 540-545, 1986.
- [9] J.E. Slotine, "The Robust Control of Robot Manipulator," Int. J. Robotics Reserach, vol. 4, pp. 49-63, 1985.
- [10] V.I. Utkin, "Variable Structure System with Sliding Mode," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp. 212-221, Apr. 1977.
- [11] K-K.D. Young, "Asymptotic Stability of Model Reference System with Variable Structure Control," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp. 279-281, Apr. 1977.
- [12] P.K. Sinha, "Multivariable Control," University of Warwick Coventry, England.