論 文
38~2~9

N-포오트 抵抗回路에서의 競爭的인 電力需給

Competitive Power Extraction from Resistive n-Ports

裵 晋 鎬* · 盧 澈 均**
(Jin-Ho Bae · Chul-Kyun Ro)

요 약

저항과 동일주파수의 독립전원으로 구성된 선형 n-포오트에서의 경쟁적인 전력수급문제를 풀어 보았다. 이 문제를 풀기 위하여 2-포오트의 영상임피이던스 개념을 n-포오트로 확장시켰고, n-포오트의 경쟁적인 전력수급문제는 결국 각 포오트의 저항이 영상저항이 될 때까지 조정됨을 나타내고 있다. 조정과정에 있는 모든 부하저항의 값은 단락콘덕턴스의 역수와 개방회로저항 사이에 있음을 보였다.

Abstrct-The competitive power extraction problem in a linear n-port network consisting of resistances and independent sources with the same frequency is solved. For solving the problem, the definition of the two-port image impedances is extended to the n-port image impedances. In a competitive power extraction from an n-port network, the load resistances eventually approach the image resistances of the n-port network. All the load resistances in the adjustment process have been found to be between the reciprocal of the short circuit conductance and the open circuit resistance.

1. 서 론

최대전력전달에 관한 문제는 회로이론에서 관심의 대상이 되어 왔다. 독립전원을 포함하는 선형 1-포오트에서 가변수동부하를 연결하여 최대전력을 얻으려고 할 때 부하임피이던스를 어떻게 조정해야 하는가라는 문제는 간단한 미적분 지식으로 풀 수 있다. 이 결과를 Nambiar[1]가 1969년에 n-포오트로 확장을 시도하였고 그후 여러 학자들의[2)~10)] 연구결과가 발표되었다. 또한 비선형회로에서의 최대전력전달 문제[11)]도 제시되었고 태양전지의 설계에 응용[12)]하는 연구도 있었다.

최대전력전달 문제에 있어서, n-포오트는 1-포오트와는 달라서 전체전력의 최대화(Cooperative power extraction)를 목표로 하느냐 또는 각 포오트 자신의 전력최대화만을 목표로 하느냐라는 서로 다른 문제를 생각할 수 있다. 후자를 경쟁적인 전력수급(competitive power extraction)이라 칭하고

*正 會 員 : 嶺南大 工大 電氣工學科 敎授 · 工博
**正 會 員 : 慶北産業大學 電氣工學科 副敎授
接受日字 : 1988年 1月 27日
1次修正 : 1988年 4月 4日
2次修正 : 1988年 6月 3日

Lin[13]에 의해 처음으로 제시되었으며 다음과 같다.

문제 :

"동일 주파수의 독립전원과 임피이던스로 구성된 선형 n-포오트에서 각 포오트마다 1명의 사람이 가변저항기를 사용하여 지정된 포오트에서 최대전력을 얻으려고 한다. 이 때 각 포오트에서 최종의 전력은 얼마나? 단, n-포오트의 임피이던스 **Z**와 테브난의 등가전압 **E**는 지정되어 있으나 각 포오트에 있는 사람은 이 값을 모른다. 그러나 자기 포오트의 구동점임피이던스는 구할 수 있다. 가변저항가의 조정은 동시에 하는 것이 아니고 각 포오트가 순서대로 시행하며 조정할 필요가 없을 때까지 반복한다.

이 문제에서 2-포오트의 해는 다음과 같다.

a) 독립전원과 저항으로 구성된 회로에서는 부하저항은 영상저항이 된다.

b) 독립전원과 리액턴스로 구성된 회로에서는 부하저항은 영상임피이던스의 절대치가 된다.

한편 경제학에서의 과점(oligopoly)[15]을 생각해 보면 둘 이상의 업체가 서로 경쟁을 한다. 이때 가격은 생산량에 의해 결정되고, 각 업체는 이익을 최대로 하기 위해 어떤 전략에 따라 생산량을 결정한다. 이것은 경쟁적인 전력수급과 유사하다. 경제학의 모델링에 전기회로를 사용한 연구[18]도 있었으므로 Lin은 경제학과의 유사성에 상당한 기대를 나타내고 있다.

본 논문에서는 n-포오트의 영상임피이던스에 대해 고찰해 보고 독립전원과 저항으로 구성된 n-포오트에서의 경쟁적인 전력수급문제를 해결하여, 좀 더 일반적인 회로 및 경제학과의 유사성에 관한 기초를 다질까 한다.

2. n-포오트의 영상 임피이던스

2-포오트의 영상 임피이던스 개념을 확장하여 n-포오트의 영상 임피이던스를 생각해 본다. 그림 1에 나타낸 바와 같이 포오트 1, 포오트 2, …, 포오트 n에 각각 Zo_1, Zo_2, …, Zo_n을 연결하여 각 포오트에서 좌우로 본 임피이던스가 각각 같을 때, Zo_1, Zo_2, …, Zo_n을 n-포오트의 영상 임피이던스라고 하자.

이때 포오트 1에서 우측으로 본 임피이던스 V_1/I_1이 Zo_1과 같아야 하므로 다음 식이 성립한다.

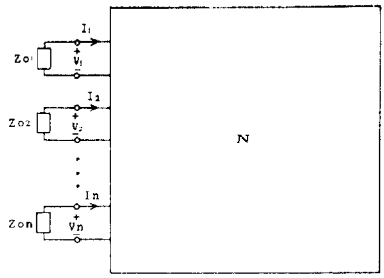

그림 1 n-포오트
Fig. 1 n-Port.

$$
\begin{aligned}
V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + \cdots\cdots + z_{1n}I_n = Zo_1 I_1 \\
V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 + \cdots\cdots + z_{2n}I_n = -Zo_2 I_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_n &= z_{n1}I_1 + z_{n2}I_2 + \cdots\cdots + z_{nn}I_n = -Zo_n I_n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

식(1)을 벡터형으로 표시하면

$$
\mathbf{Z}_1 \mathbf{I} = 0 \tag{2}
$$

여기서

$$
\mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} z_{11} - z o_1 & z_{12} & \cdots\cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} + Zo_2 & \cdots\cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots\cdots & z_{nn} + Zo_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}
$$

이 되고 식(2)가 **I**=0이 아닌 해를 가지기 위해서는

$$
|\mathbf{Z}_1| = 0 \tag{3}
$$

이 된다. 또한 포오트 2에서 포오트 n까지도 마찬가지로 하면 다음과 같다.

$$
|\mathbf{Z}_1| = |\mathbf{Z}_2| = \cdots\cdots = |\mathbf{Z}_m| = \cdots\cdots = |\mathbf{Z}_n| = 0 \tag{4}
$$

여기서

$$
\mathbf{Z}m = \begin{bmatrix} z_{11}+Zo_1 & z_{12} & \cdots & z_{1m} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22}+Zo_2 \cdots & & z_{2m} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mm}-Zo_m \cdots & & z_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nm} & \cdots & z_{nn}+Zo_n \end{bmatrix}
$$

식(4)는 비선형 연립방정식이고 $n \geq 3$일 때의 양해(explicit solution)를 구하기는 어려운 문제이다.

3. 저항과 독립전원으로 구성된 n-포오트 에서의 전력수급

저항과 동일주파수의 독립전원으로 구성된 n-포오트에서의 전력수급문제를 생각한다.

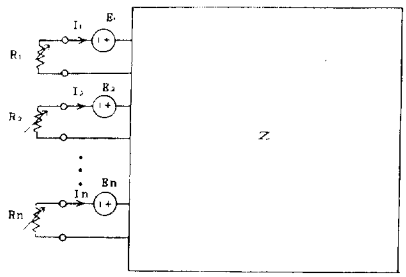

그림 2 n-포오트
Fig. 2 n-Port.

그림 2와 같이 각 포오트에 부하저항을 연결하여 각기 자기 포오트에서의 전력이 최대가 되도록 Lin이 제시한 전략에 의해 자기 포오트의 부하저항을 조정한다. 그림 2에서 $\mathbf{R}_o$는 개방회로저항행렬, Em (m=1, 2, …, n)는 테브난의 등가전압 그리고 Rm (m=1, 2, …, n)는 부하저항이다. 포오트m의 전력이 최대가 되도록 k번째 조정한 포오트m의 저항을 Rm(k)라고 하자. 먼저 포오트2에서 포오트n 까지 개방시켜 두고 포오트 1의 전력이 최대가 되도록 포오트 1의 저항을 $R_1(1)$으로 조정한다. 다음 포오트 2의 전력이 최대가 되도록 포오트 2의 저항을 $R_2(1)$으로 조정한다. 계속해서 $R_3(1)$, $R_4(1)$, … , $R_n(1)$ (1)의 순서로 조정한다. 다음으로 $R_1(2)$, $R_2(2)$ …, $R_n(2)$, …, $R_1(k)$, $R_2(k)$, …, $R_n(k)$, $R_1(k+1)$의 순서로 조정을 해 나간다면 $R_1(k+1)$을 구하기 위해 다음 식을 세울 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\{r_{11}+R_1(k+1)\}I_1+ r_{12}I_2+\cdots\cdots+r_{1n}I_n=E_1\\
&r_{21}\ I_1+\{r_{22}+R_2(k)\}I_2+\cdots\cdots\cdots+r_{2n}I_n=E_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_{n1}\ I_1+r_{n2}\ I_2+\cdots\cdots\cdots+\{r_{nn}+R_n(k)\}I_n=E_n
\end{aligned}
\tag{5}
$$

식(5)에서 Cramer의 공식을 이용하여 I_1을 구하면,

$$I_1=\frac{D_1}{|\mathbf{R}_o+\mathbf{R}|} \tag{6}$$

여기서,

$$D_1=\begin{vmatrix} E_1 & r_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots r_{1n} \\ E_2 & r_{22}+R_2(k)\cdots r_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n & r_{n2}\cdots\cdots\cdots\cdots r_{nn}+R_n(k) \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R}_o=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\cdots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22}\cdots r_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ r_{n1} & r_{n2}\cdots r_{nn}\end{bmatrix} \quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} R_1(k+1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2(k) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_n(k)\end{bmatrix}$$

이 되고 포오트 1에서의 전력을 구하면

$$P_1=I_1^2R_1(k+1)=\frac{D_1^2}{|\mathbf{R}_o+\mathbf{R}|^2}R_1(k+1) \tag{7}$$

이 되어 P_1이 최대가 되려면 다음과 같다.*

$$\frac{\partial P_1}{\partial R_1(k+1)}=0 \tag{8}$$

식(8)에서

$$\frac{|\mathbf{R}_o+\mathbf{R}|-2R_1(k+1)\dfrac{\partial|\mathbf{R}_o+\mathbf{R}|}{\partial R_1(k+1)}}{|\mathbf{R}_o+\mathbf{R}|^3}=0 \tag{9}$$

이 되고 식(9)를 정리하면(부록참조)

$$\begin{vmatrix} r_{11}-R_1(k+1) & r_{12} & \cdots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22}+R_2(k) & \cdots r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots r_{nn}+R_n(k)\end{vmatrix}=0 \tag{10}$$

이 되어 영상 임피이던스를 구하는 식(3)과 같은 모양이다.

식(10)에서 $R_1(k+1)$을 구하기 위해

$$\left|\begin{array}{c|cc} r_{11}-R_1(k+1) & r_{12} & \cdots\quad r_{1n} \\ \hline r_{21} & r_{22}+R_2(k)\cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots r_{nn}+R_n(k)\end{array}\right|$$

$$=\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right|=0$$

로 두면

** $D_1=0$ 즉 $I_1=0$일 때는 무의미하나 역시 식(8)을 만족하게 $R_1(k+1)$을 조정한다.

$$\begin{bmatrix} AB \\ CD \end{bmatrix} \mathbf{I} = 0 \tag{11}$$

을 만족하는

$\mathbf{I} = [I_1\ I_2 \cdots\cdots I_n]^T = [I_1\ \mathbf{I}_{2,n}]^T \neq 0$,

여기서, $\mathbf{I}_{2,n} = [I_2 I_3 \cdots I_n]$

가 존재한다. 식(11)을 풀어 쓰면,

$$\begin{aligned} AI_1 + \mathbf{B}\mathbf{I}_{2,n}^T = 0 \\ \mathbf{C}I_1 + \mathbf{D}\mathbf{I}_{2,n}^T = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

이 되고 식(12)에서

$$\begin{aligned} A = -\frac{1}{I_1}\mathbf{B}\mathbf{I}_{2,n}^T \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}I_1 + \mathbf{I}_{2,n}^T = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

이 된다. 식(13)에서 A를 구하면

$$A = \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} \tag{14}$$

이 되어 다음과 같은 $R_1(k+1)$을 구할 수 있다.

$$R_1(k+1) = r_{11} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} \tag{15}$$

또한 저항회로는 가역회로이므로 $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$이 되어

$$R_1(k+1) = r_{11} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^T \tag{16}$$

이 되고, 마찬가지로 하면 $R_2(k+1), \cdots, R_n(k+1)$도 구할 수 있다.

이제 $R_1(k+1)$, $k \geq 0$의 범위를 생각해 보자. 행렬 $\mathbf{D}$는 정치행렬(positive definite matrix)이므로 $\mathbf{D}^{-1}$도 정치행렬이고 식(16)에서 $R_1(k+1) \leq r_{11}$이다. 또한 식(16)을 $R_m(k)$ [$m = 2, 3, \cdots, n$]로 미분하면,

$$\frac{\partial R_1(k+1)}{\partial Rm(k)} = \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial Rm(k)}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^T =$$

$$(\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1})\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial Rm(k)}(\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1})^T \geq 0 \tag{17}$$

이 되어 $R_1(k+1)$의 값은,

$$R_2(k) = R_3(k) = \cdots\cdots = Rn(k) = 0$$

일 때의 값, 즉 단락컨덕턴스의 역수 $1/g_{11}$보다 작을 수는 없다. 즉,

$$1/g_{11} \leq R_1(k+1) \leq r_{11} \tag{18}$$

마찬가지로 하면 다음과 같다.

$$1/g_{mm} \leq Rm(k) \leq r_{mm} \tag{19}$$

여기서 $k \geq 1$, $m = 1, 2, \cdots, n$

정리 :

저항과 독립전원으로 구성된 n-포오트의 경쟁적인 전력수급 문제에서 조정과정에 있는 포오트 m의 부하저항 $Rm(k)$는 $1/g_{mm} \leq Rm(k) \leq r_{mm}$이며, 결국 영상저항에 수렴한다.

증명 :

$Rm(k)$의 범위는 식(19)에서 나타났으며 수렴성만 보이면 된다.

$R_2(0) = R_3(0) = \cdots\cdots = Rn(0) = \infty$로 두면 $R_1(1) = r_{11}$, $R_2(1) \leq r_{22} < R_2(0)$, $\cdots$, $R_n(1) \leq r_{nn} < R_n(0)$가 되고, 식(16), (17)을 참고하면 $R_1(2) \leq R_1(1)$, $R_2(2) \leq R_2(1)$, $\cdots\cdots$, $R_n(2) \leq R_n(1)$이며 계속해서, $R_1(k+1) \leq R_1(k)$이고 포오트m에 대해서

$$Rm(k+1) \leq Rm(k) \tag{20}$$

이 성립되어 단조감소한다.

식(19), (20)에서 수열{Rm}는 유계(bounded)이고 단조감소하므로 수렴한다.[17] 〈증명 끝〉

4. 예제 및 검토

저항과 독립전원으로 구성된 n-포오트에서의 경쟁적인 전력수급 문제는 영상저항을 구하는 문제가 되며 비선형연립방정식이 되어 양해를 구하기는 곤란하나 식(16)과 같은 형태로 되어 수치해석에서의 고정점반복법(fixed point iteration)[16]과 같고 근사해를 구하기 위해서는 역행렬과 행렬의 곱 연산이 필요하다.

앞의 정리에서는 초기치를 모두 ∞로 두고 생각하였는데 초기치를 임의로 둘 경우 단조감소성이 없어진다. 그러나 수치해석 결과 초기치의 변화에 따라서 수렴하지 않거나 그 값이 달라지는 경우는 발견하지 못했으며, 이에 대한 이론적인 근거는 앞으로 규명되어야 할 과제이다.

이제 $\mathbf{R}_o$가 정치행렬 또는 준정치행렬인 몇 가지 예를 들어 보겠다.

예제 1)

$$\mathbf{R}_o = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1/g_{11} = 1/g_{22} = 1/g_{33} = 0$$

$R_1 = R_2 = R_3 = 1$이 식(4)의 해가 됨을 알 수 있으며 영상저항이 된다. 이 때의 전력은 $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{3}{16}E^2$이다.

또한 $R_1 = R_2 = R_3 = 0$도 식(4)의 해가 되나 이는 $\mathbf{R}_o$가 준정치행렬이기 때문에 나타나는 현상으로 초기치 $R_1(0) = R_2(0) = R_3(0) = 0$일 때를 제외하고는

$$\lim_{k\to\infty} R_1(k) = \lim_{k\to\infty} R_2(k) = \lim_{k\to\infty} R_3(k) = 1$$

이 된다. 전체전력이 최대(cooperative power extraction)로 될 조건은 $R_1 = R_2 = R_3 = 3$이고 이때 전력은 $P_1 = P_2 = P_3 = E^2/4$이다. 예상한 바이지만 경쟁시에는 협력시 보다 얻을 수 있는 전력이 작다.

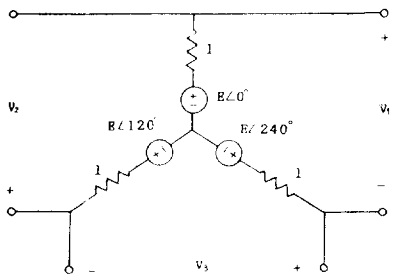

그림 3. 3-포오트
Fig. 3 3-Port.

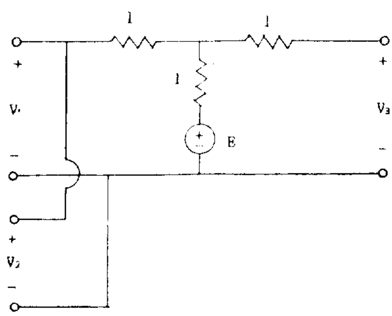

그림 4 3-포오트
Fig. 4 3-Port.

예제 2)

그림 4 의 R_o는 준정치행렬이고 $R_1 = R_2 = 0$,

$$R_o = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 1/g_{11} = 1/g_{22} = 0, \; 1/g_{33} = \frac{3}{2}$$

$R_3 = 1/g_{33} = 3/2$가 식(4)의 해이며 포오트 1, 2는 같은 포오트인데 서로 경쟁을 하게 되므로 전력이 각각 0[w]에 수렴한다.

예제 3)

R_o는 정치행렬이며 5개의 독립된 포오트를 가지고 있다. 표 1에 4가지 경우의 초기치에 대한 수치해석 결과를 나타내었는데, 각 포오트 모두 초기치에 관계없이 각각 같은 값, 즉 영상저항에 수렴하고 있다.

$$R_o = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 20 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & 15 & 30 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} 1/g_{11} &= 4.165751 \\ 1/g_{22} &= 3.964865 \\ 1/g_{33} &= 5.469587 \\ 1/g_{44} &= 11.71445 \\ 1/g_{55} &= 16.82221 \end{aligned}$$

또한 조정과정에 있는 모든 부하저항 $Rm(k)$의 값은,

$1/g_{mm} \leqq R_m(k) \leqq r_{mm}$, $k \geqq 1$을 만족하고, 2번째 경우, 즉

$R_1(0) = R_2(0) = \cdots = R_5(0) = 1000$

일 때

$R_m(k+1) < R_m(k)$

이 성립되어 단조감소함을 나타내고 있다.

5. 결 론

이상에서 살펴본 바와 같이 저항과 독립전원으로 구성된 선형 n-포오트에서의 경쟁적인 전력수급문제에서는, 각 포오트의 부하저항이 영상저항에 수렴할 때까지 조정되고 있다.

영상저항의 값을 구하기 위해서는 비선형연립방정식을 풀어야 되므로 특이한 경우를 제외하고는 양해를 구할 수 없고 고정점 반복법을 사용하여 근사해를 구한다. 조정과정에 있는 각 포오트의 부하저항은 고정점 반복법에서 나타나는 값이며, 모두 단락컨덕턴스의 역수와 개방회로저항 사이에 있다.

리액턴스 또는 종속전원이 포함된 회로에 대해서는 좀 더 연구하여야 할 과제이며, 경제학과의 유사성[14),15)]에 대해서도 훨씬 더 많은 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

1) K.K. Nambiar, "A Generalization of the Maximum Power Transfer Theorem," Proc. IEEE, vol. 57, pp. 1339-1340, July 1969.

2) H. Baudrand, "On the Generalization of the Maximum Power Transfer Theorem," Proc. IEEE, vol. 58, pp. 1780-1781, Oct. 1970.

3) F. Spinei, "On the Generalization of the Maximum Power Transfer Problem," Proc. IEEE, vol. 60, pp. 903-904, July 1972.

4) P.M. Lin, "Determination of Available Power from

표 1 각 포오트의 부하조정과정

Table 1 Load resistances in the adjustment process.

R 1 (0)=0	R 2 (0)=0	R 3 (0)=0	R 4 (0)=0	R 5 (0)=0
R 1 (1)=4.165751	R 2 (1)=5.298797	R 3 (1)=5.727393	R 4 (1)=12.03697	R 5 (1)=21.93505
R 1 (2)=6.224969	R 2 (2)=5.796881	R 3 (2)=6.12396	R 4 (2)=15.21969	R 5 (2)=22.58919
R 1 (3)=6.341224	R 2 (3)=5.82885	R 3 (3)=6.131972	R 4 (3)=15.27339	R 5 (3)=22.59963
R 1 (4)=6.347894	R 2 (4)=5.830169	R 3 (4)=6.132219	R 4 (4)=15.27426	R 5 (4)=22.59983
R 1 (5)=6.348166	R 2 (5)=5.830219	R 3 (5)=6.132227	R 4 (5)=15.27428	R 5 (5)=22.59983
R 1 (6)=6.348176	R 2 (6)=5.83022	R 3 (6)=6.132228	R 4 (6)=15.27428	R 5 (6)=22.59983
R 1 = 6.348176	R 2 = 5.83022	R 3 = 6.132228	R 4 = 15.27428	R 5 = 22.59983
R 1 (0)=1000	R 2 (0)=1000	R 3 (0)=1000	R 4 (0)=1000	R 5 (0)=1000
R 1 (1)=9.937885	R 2 (1)=6.53378	R 3 (1)=6.466316	R 4 (1)=19.17051	R 5 (1)=23.24511
R 1 (2)=6.493661	R 2 (2)=5.866446	R 3 (2)=6.140602	R 4 (2)=15.3261	R 5 (2)=22.61004
R 1 (3)=6.355677	R 2 (3)=5.831674	R 3 (3)=6.132494	R 4 (3)=15.27514	R 5 (3)=22.60003
R 1 (4)=6.348476	R 2 (4)=5.830275	R 3 (4)=6.132237	R 4 (4)=15.2743	R 5 (4)=22.59984
R 1 (5)=6.348188	R 2 (5)=5.830222	R 3 (5)=6.132228	R 4 (5)=15.27428	R 5 (5)=22.59983
R 1 (6)=6.348177	R 2 (6)=5.83022	R 3 (6)=6.132228	R 4 (6)=15.27428	R 5 (6)=22.59983
R 1 = 6.348177	R 2 = 5.83022	R 3 = 6.132228	R 4 = 15.27428	R 5 = 22.59983
R 1 (0)=6	R 2 (0)=5	R 3 (0)=6	R 4 (0)=100	R 5 (0)=100
R 1 (1)=6.180819	R 2 (1)=5.885855	R 3 (1)=6.295374	R 4 (1)=17.72611	R 5 (1)=23.01064
R 1 (2)=6.364731	R 2 (2)=5.840582	R 3 (2)=6.135693	R 4 (2)=15.30695	R 5 (2)=22.60586
R 1 (3)=6.350363	R 2 (3)=5.830702	R 3 (3)=6.132328	R 4 (3)=15.27478	R 5 (3)=22.59993
R 1 (4)=6.348275	R 2 (4)=5.830239	R 3 (4)=6.132231	R 4 (4)=15.27429	R 5 (4)=22.59983
R 1 (5)=6.348181	R 2 (5)=5.830221	R 3 (5)=6.132228	R 4 (5)=15.27428	R 5 (5)=22.59983
R 1 (6)=6.348177	R 2 (6)=5.83022	R 3 (6)=6.132228	R 4 (6)=15.27428	R 5 (6)=22.59983
R 1 = 6.348177	R 2 = 5.83022	R 3 = 6.132228	R 4 = 15.27428	R 5 = 22.59983
R 1 (0)=1	R 2 (0)=2	R 3 (0)=0	R 4 (0)=20	R 5 (0)=1000
R 1 (1)=5.094441	R 2 (1)=5.593362	R 3 (1)=6.35275	R 4 (1)=19.13469	R 5 (1)=23.21651
R 1 (2)=6.307144	R 2 (2)=5.83458	R 3 (2)=6.135724	R 4 (2)=15.32272	R 5 (2)=22.60839
R 1 (3)=6.349168	R 2 (3)=5.830549	R 3 (3)=6.132318	R 4 (3)=15.27497	R 5 (3)=22.59996
R 1 (4)=6.348245	R 2 (4)=5.830235	R 3 (4)=6.13223	R 4 (4)=15.27429	R 5 (4)=22.59983
R 1 (5)=6.34818	R 2 (5)=5.83022	R 3 (5)=6.132228	R 4 (5)=15.27428	R 5 (5)=22.59983
R 1 = 6.34818	R 2 = 5.83022	R 3 = 6.132228	R 4 = 15.27428	R 5 = 22.59983

Resistive Multiports," IEEE Trans. CT, vol. CT-19, pp.385-386, July 1972.

5) C.A. Desoer, "The Maximum Power Transfer for n-Ports," IEEE, Trans. CT, vol. CT-20, pp.328-329, May 1973.

6) M. Vidyasagar, "Maximum Power Transfer in n-Ports with Passive Loads," IEEE Trans. CAS, vol. CAS-21, pp.327-330, May 1974.

7) H. Flanders, "On the Maximal Power Transfer Theorem for n-Ports," Circuit Theory and Appl., vol.4, pp.319-344, Oct. 1976.

8) A.J. Calvaer, "On the Maximum Loading of Active Linear Electric Multiports," Proc. IEEE, vol. 71, pp. 282-283, Feb. 1983.

9) C.A. Desoer, "A Maximum Power Transfer Problem," IEEE Trans. CAS, vol. CAS-30, pp.757-758, Oct. 1983.

10) H. Flanders, "Note on Maximal Power Transfer," IEEE Trans. CAS, vol. CAS-32, Jan. 1985.

11) T. Kouno, "Maximum Power Obtainable in a Non-linear System," Proc. IEEE vol. 66, pp.1085-1086,

Sept. 1978.
12) J.L. Wyatt, Jr. and L.O. Chua, "Nonlinear Maximum Power Theorem with Solar Cell Application," IEEE Trans. CAS, pp.824-828, Nov. 1983.
13) P.M. Lin, "Competitive Power Extraction from Linear n-Ports," IEEE, Trans. CAS, vol. CAS-32, pp.185-191, Feb. 1985.
14) G. Owen, "Game Theory," Academic Press Inc. 1982.
15) G. Gandolfo, "Economic Dynamics: Methods and Models," North-Holland Pub. Co., 1979.
16) K. Atkinson, "An Introduction to Numerical Analysis," John Wiley and Sons Inc., 1978.
17) W. Kaplan, "Advanced Calculs," p.305, Addison-Wesley Pub. Co. 1969.
18) A.H. Zemanian, "Market Network: An Electrical Analog," IEEE Trans. CAS, vol. CAS-24, pp.736-744, Dec. 1977.

《부 록》

행렬식 $|\mathbf{R}_0+\mathbf{R}|$을 $\mathrm{R}_1(k+1)$에 대해 미분하면

$$\frac{\partial|\mathbf{R}_0+\mathbf{R}|}{\partial \mathrm{R}_1(k+1)}=\begin{vmatrix} r_{22}+R_2(k) & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ r_{32} & r_{33}+R_3(k) & \cdots & r_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n2} & r_{n3} & \cdots & r_{nn}+R_n(k) \end{vmatrix}$$

이고, 또한 (A1)

$$|\mathbf{R}_0+\mathbf{R}|=\begin{vmatrix} r_{11}+R_1(k+1) & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22}+R_2(k) & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}+R_n(k) \end{vmatrix}$$

$$=2R_1(k+1)\begin{vmatrix} r_{22}+R_2(k) & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ r_{32} & r_{33}+R_3(k) & \cdots & r_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n2} & r_{n3} & \cdots & r_{nn}+R_n(k) \end{vmatrix} \qquad \text{(A2)}$$

이므로 식(A1)을 식(A2)에 대입하면

$$|\mathbf{R}_0+\mathbf{R}|-2R_1(k+1)\frac{\partial|\mathbf{R}_0+\mathbf{R}|}{\partial R_1(k+1)}$$

$$=\begin{vmatrix} r_{11}-R_1(k+1) & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22}+R_2(k) & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}+R_n(k) \end{vmatrix}$$

즉 식(9)에서 식(10)을 얻을 수 있다.