

# 정자력 계산을 위한 적응 유한요소법

## An Adaptive Finite Element Method for Magnetostatic Force Computations

朴 龍 圭\* · 朴 日 韓\*\* · 金 炯 碩\*\* · 鄭 炫 教<sup>§</sup> · 李 基 植<sup>§§</sup> · 韓 松 晔<sup>†</sup>  
 (Yong-gyu Park · Il-Han Park · Hyeong-Seok Kim · Hyun-Kyo Jung · Ki-Sik Lee · Song-yop Hahn)

### 요 약

본 논문에서는 정자장에서 맥스웰의 스트레스 텐서법으로 힘을 효율적으로 계산하기 위한 적응유한요소법을 연구하였다. 자속밀도의 추정오차와 요소별 힘의크기를 기준으로 하여 요소를 자동적으로 세분함으로써 불필요한 요소분할을 최대한 줄였으며 따라서 힘 계산시의 효율을 극대화 하였다. 정확한 힘 계산을 위하여 여러개의 서로 다른 적분경로를 선택하였고 각각의 적분경로에서 계산된 결과가 초기 요소일때는 서로 일치하지 않았으나 적응유한 요소법으로 요소를 세분하여 감에따라 한 값으로 수렴하여 감을 볼수있었으며 이론적인 해를 가지고 있는 모델에 적용하여 본결과 계산치와 이론치가 잘 일치함을 알수있었다.

**Abstract-**This paper presents an adaptive finite element method for magnetostatic force computation using Maxwell's stress tensor. Mesh refinements are performed automatically by interelement magnetic field intensity discontinuity errors and element force errors. In initial mesh, the computed forces for different integration paths give great differences, but converge to a certain value as mesh division is performed by the adaptive scheme. We obtained good agreement between analytic solutions and numerical values in typical examples.

### 1. 서 론

유한 요소법을 사용하여 힘을 계산할 경우 정확한 해를 얻기 위해서는 매우 세밀한 요소분할이 필요한데, 어느 부분을 세분할 것인가에 대해서는 많

은 경험이 요구된다. 경우에 따라서는 필요이상의 과도한 요소분할로 컴퓨터 메모리나 계산시간에 있어 낭비를 초래하기도 한다. 본 연구에서는 맥스웰 스트레스 텐서(Maxwell stress tensor)를 사용하여 힘을 계산하였는데 정확한 힘 계산을 위하여 어느 정도 세밀한 요소분할이 필요한가를 모르기 때문에 적응 요소법을 도입하였다.<sup>1)2)3)</sup> 처음에는 아주 거친 요소망에서 힘을 구하고, 그 결과에서 힘의 크기가 크게 나타나는 요소를 세분하여 새로운 요소망에서 힘을 계산해 나가는 알고리즘을 도입하였다. 이와 같은 과정을 반복하여 가는 과정에서 힘의 계산치가 수렴하게 되는데 이것이 힘의 참값이며 여

\*正 會 員: 서울대 大學院 電氣工學科 碩士課程  
 \*\*正 會 員: 서울대 大學院 電氣工學科 博士課程  
 § 正 會 員: 江原대 工大 電氣工學科 助教授 · 工博  
 §§ 正 會 員: 檀國대 工大 電氣工學科 副教授 · 工博  
 † 正 會 員: 서울대 工大 電氣工學科 教授 · 工博  
 接受日字: 1988年 10月19日  
 1次修正: 1989年 1月17日

기서 계산을 종료하게 된다. 맥스웰 스트레스 텐서 방법에서는 힘이 발생하는 물체가 그 내부에 완전히 포함된다면 적분 경로에 관계없이 힘의 크기가 일정 하여야 하는데, 수치적으로 확인하여 본 알고리즘의 유용성을 입증 하였다.

## 2. 정자력 방정식

### 2.1 맥스웰 스트레스 텐서(Maxwell stress tensor)

자기력 밀도는 전류 밀도와 자속 밀도에 의하여 다음과 같이 표시된다.<sup>5)</sup>

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

정자장에서는

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (2)$$

이므로 식(1)은

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (3)$$

가 된다. 따라서 체적 V인 물체가 자기장에 의해 작용받는 힘 F는

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} \, dv \quad (4)$$

로 된다. 그런데

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \quad (5)$$

이므로 식(4)는

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \, dv - \int_S \frac{1}{2} B^2 \hat{\mathbf{n}} \, ds \right] \quad (6)$$

가 된다. 여기서 S는 체적 V의 표면이고  $\hat{\mathbf{n}}$ 은 S에 수직인 외향단위 벡터이다.

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \, dv = \int_S \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \, ds \quad (7)$$

의 관계가 성립하므로 식(6)은

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} \, dv = \int_S \mathbf{P} \, ds \quad (8)$$

로 되고 여기서

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_0} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (9)$$

이고 이것을 맥스웰의 스트레스 텐서라 한다. 식(4)와 식(8)을 비교할때 체적 V인 물체에 작용하는 힘은 그 물체 표면 S에 작용하는 스트레스 텐서 P를 면적분한 것과 같음을 알수있다.

### 2.2 요소별 정자력 계산

본 연구에서는 2차원(X-Y 평면) 문제만을 다루므로 적분경로가 X-Y 평면에서 선으로 된다. 요소는 삼각형 요소를 사용하고 시험함수(trial function)는 1차함수이고 자기 벡터포텐셜을 이용하였다. 그러므로 한 요소내에서는 자속밀도가 일정하게 된다. 그림 1은 자속밀도가 B<sub>x</sub> 및 B<sub>y</sub>인 요소에 적분경로가 a-b가 걸쳐있는 경우이다. 자속밀도가 일정하기 때문에 구간(a, b)에서 p값은 일정하게 된다. 점a 및 b의 좌표를 각각 (X<sub>a</sub>, Y<sub>a</sub>), (X<sub>b</sub>, Y<sub>b</sub>)라 하고 p의 X성분 및 Y성분을 각각 P<sub>x</sub> 및 P<sub>y</sub>라 하면

$$P_x = \frac{1}{2\mu_0} ((B_x^2 - B_y^2)n_x + 2n_y B_x B_y) \quad (10)$$

$$P_y = \frac{1}{2\mu_0} (-(B_x^2 - B_y^2)n_y + 2n_x B_x B_y) \quad (11)$$

그러므로 경로 a-b(Δ)에 작용하는 힘 ΔF는

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{P} \Delta S \quad (12)$$

이고 X성분 및 Y성분 ΔF<sub>x</sub> 및 ΔF<sub>y</sub>는 각각

$$\Delta F_x = \frac{\Delta S}{2\mu_0} ((B_x^2 - B_y^2)n_x + 2n_y B_x B_y) \quad (13)$$

$$\Delta F_y = \frac{\Delta S}{2\mu_0} (-(B_x^2 - B_y^2)n_y + 2n_x B_x B_y) \quad (14)$$

여기서 ΔS = Z · Δl

이고 Z는 Z축 방향의 길이, n<sub>x</sub>, n<sub>y</sub>는 각각  $\hat{\mathbf{n}}$ 의 X성분 및 Y성분이다. 위와같이 요소별 힘이 계산되면 전체 힘 F는

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^e \Delta \mathbf{F}_k \quad (15)$$

로 계산된다. 여기서  $\Delta F_k$ 는 식(12)로 계산되는 요소별 힘이고  $e$ 는 적분경로에 포함되는 요소수이다.

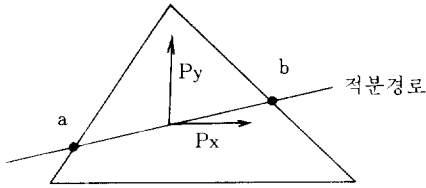


그림 1 삼각형 요소 및 적분경로  
Fig.1 Triangular element and intergration path.

### 3. 적응 요소 분할

식(12)에서 보는 바와같이 힘  $\Delta F$ 가 정확히 계산 되려면  $p$ 가 정확히 계산되고  $\Delta l$ 이 충분히 적어야 한다. 그런데  $p$ 는  $B$ 의 함수이므로  $B$ 를 정확히 계산하기 위해 적응 요소분할 기법을 적용하였다. 우선 전 계산 영역에 걸쳐  $B$ 의 오차가 큰 곳의 요소를 세분하고 다음으로는 적분 경로를 따라  $\Delta F$ 의 값이 큰 곳의 요소를 세분한다. 이것은 계산영역 전체에 걸쳐  $B$ 의 값을 정확히 계산하면서 적분 경로에서의  $B$ 값이 큰 곳 또는  $\Delta l$ 이 큰곳을 세분하여  $\Delta F$ 의 값을 정확히 계산하는 효과를 주게된다.

#### 3.1 자속밀도 오차에 의한 요소분할

각 요소 경계에서  $B_n$ 과  $H_t$ 가 연속이 되어야 한다는 조건을 이용하여 유한요소 법으로 계산된 자속 밀도의 오차를 추정하고 이 오차가 큰 요소부터 요소를 4분, 3분 또는 2분하는 방법을 사용한다."

#### 3.2 $\Delta F$ 크기에 따른 요소분할

힘 계산을 위한 적분경로를 따라 요소별로  $\Delta F$ 를 계산한다. 이것들의 평균치를 구한다음 각 요소별  $\Delta F$ 가 이 평균치 보다 큰 요소는 그 차이가 큰것부터 4분, 3분 또는 2분 한다.

그림 2은 본 연구에서 사용한 적응요소분할 알고리즘의 흐름도를 나타낸다.

### 4. 사례 연구

#### 4.1 평행도선 사이의 힘

그림 3과 같이 반경  $a$ [m]인 두 평행한 도선이 거

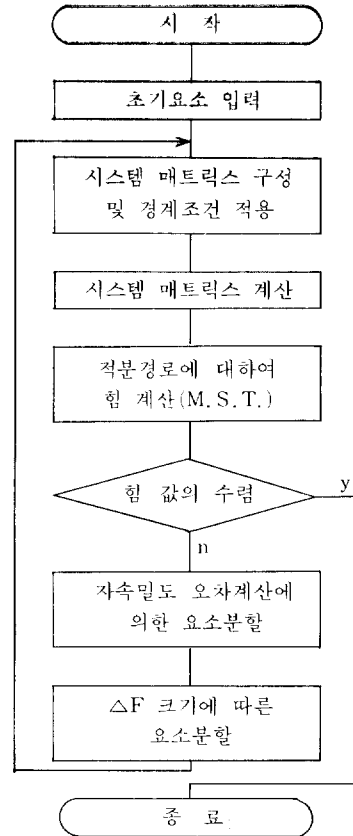


그림 2 적응 유한요소분할 알고리즘  
Fig. 2 Adaptive mesh generation algorithm.

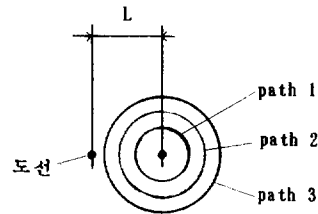


그림 3 평행도선 모델 및 적분경로  
Fig. 3 Parallel lines model and integration paths.

리  $L$ [m] 만큼 떨어져 있는 경우를  $a \ll L$ 이고 이 도체에 각각  $I$ [A]의 전류가 흐르면 두 도체에 작용하는 힘  $F$  [N/m]는

$$F = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot L} \text{ [N/m]}$$

이다. 이 모델을 본 연구에서 제시한 적응요소 분할 알고리즘으로 계산하여 보자. 여기서는 적응요소를 분할함에 따라 적분 경로에 관계없이 힘이 같게 된다는 것을 보여주기 위하여 3개의 적분 경로를 선택하였다. 그림 4는 초기 요소망으로서 511개의 요소를 되어있으며, 그림 5는 적응 요소 분할을 하여 만들어진 최종 요소로 4451요소로 분할된 결과이다. 그림 6은  $L=1$  [m],  $I=1$  [A]인 경우 적응 요소분할을 하여감에 따라 적분경로별로 힘을 계산한 것인데 요소가 약3000개 정도에서 힘의 값이 참값에 2%의 오차로 수렴함을 볼 수 있다. 이 그림을 보면 적분 경로에 관계없이 힘의 참값을 얻을 수 있음을 보여준다. 또한 그림 8에서 각 3개의 경로에서 계산된 힘의 평균치도 나타내었는데 평균치는 약 2000 요소에서 이론치에 오차가 2% 이내로 도달함을 알 수 있어서 평균치를 사용하면 계산시간이 매우 단축됨을 알 수 있다.

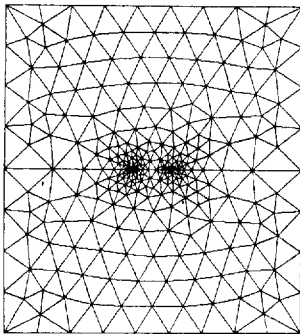


그림 4 초기 요소(511 요소)  
Fig. 4 Initial mesh(511 elements).

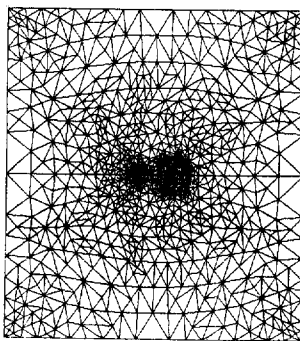


그림 5 최종 요소(4451 요소)  
Fig. 5 Final mesh(4451 elements).

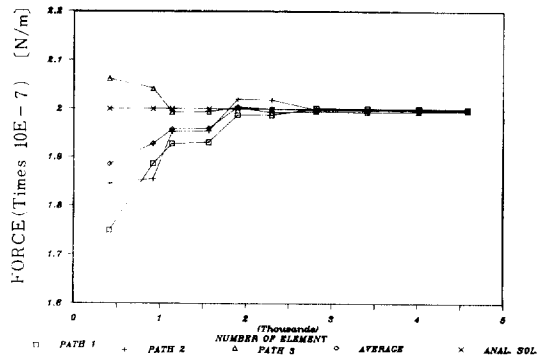


그림 6 요소수의 증가에 따른 각 경로별 힘 계산 결과의 수렴.

Fig. 6 Force convergence in each path according to increasing of meshes.

#### 4.2 U형 전자석의 힘

그림 7은 U형 전자석 회로에 작용하는 힘  $F_y$ 를 구하기 위한 모델이다. 여기서도 3개의 힘적분 경로를 택하였다. 그림 8은 초기 요소망으로서 요소수가 567개이다. 이때의 적분경로별 힘을 구하여 보면 그림 10과 같이 된다. 초기 요소망에서는 적분 경로에 따라 힘의 크기가 매우 다르다가 적응 요소

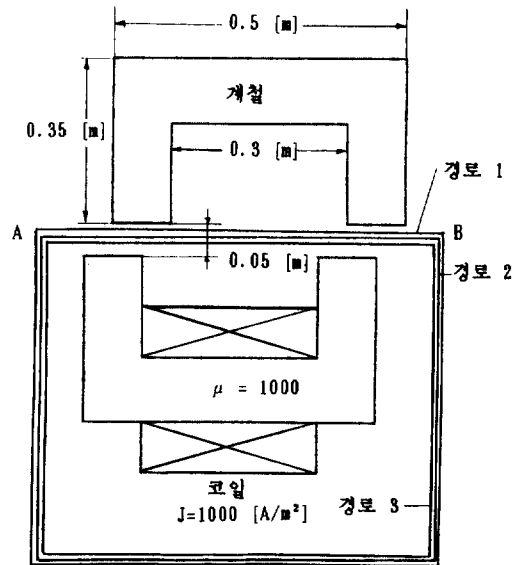


그림 7 U형 전자석 모델  
Fig. 7 U type magnet model.

분할이 시작 되면서 3 개의 힘이 같은 값으로 수렴 하여감을 알수있다. 그림 9는 요소 4675 개의 최종요소이며, 그림 10에서 약 3700 요소 이상으로 세분하여야 정확한 계산이 됨을 알수있으며 평균치는 2000 요소 정도에서 수렴함을 알수있어서 평균치로 계산함이 효율적임을 알수있다. 그림 9에서 자속밀도가 높고 힘이 큰 부분이 집중적으로 세분 되었음을 알수있다.

그림11은 그림 7에서 경로 2의 힘의 분포를 보여 준다. a 는 초기요소일 경우인데 매우 거친 분포를 보여준다. b c는 적응 유한 요소법으로 요소를 세분하여 감에 따른 힘의 분포를 나타내고있는데 a보다 힘의 분포가 완만하여짐을 알수있다.

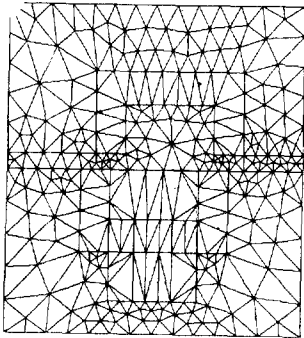


그림 8 초기 요소 (567 요소)  
Fig. 8 Initial mesh (567 elements).

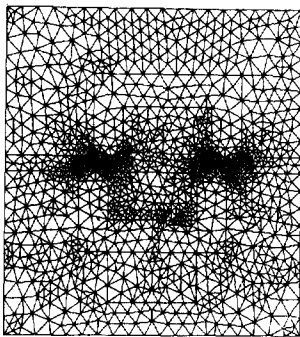


그림 9 최종 요소 (4675 요소)  
Fig. 9 Final mesh (4675 elements).

### 5. 결론

유한 요소법을 이용하여 정자력을 계산 하는 경우 계산된 힘의 정확도를 높이기 위하여 적응 유한 요소법을 도입 하였다. 요소 수가 적을 때는 적분 경로에 따라 힘의 값이 다르게 나타났으나 적응 요소 분할을 하여 감에 따라 힘의 값이 적분 경로에 관계없이 참값에 수렴함을 알았다.

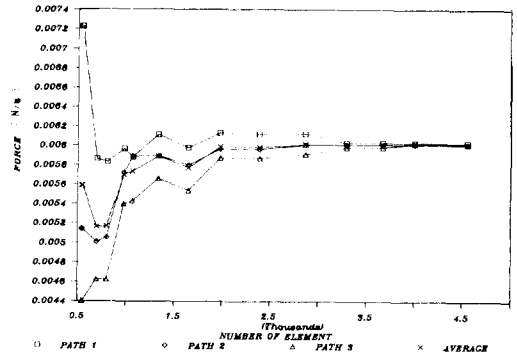


그림 10 요소수 증가에 따른 각 경로별 계산결과 의 수렴  
Fig. 10 Force convergence in each path according to increasing of meshes.

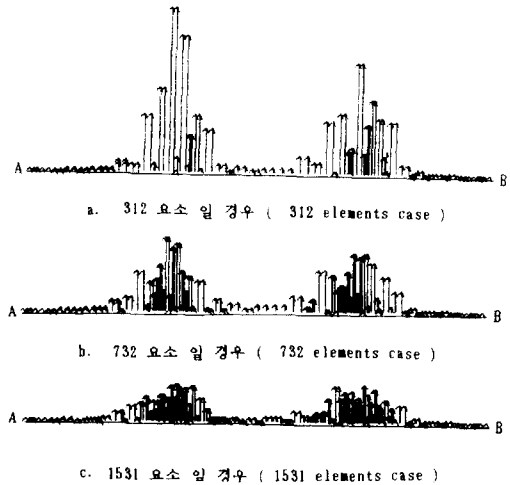


그림 11 요소분할에 따른 힘의 분포  
Fig. 11 Force distribution according to mesh division.

힘의 참값을 찾기 위하여 적분 경로를 3개 택하고 각각의 경로에 대하여 힘을 계산하고 이들 값이 어느 오차 범위내에 들어가면 이들의 평균치로 부터 힘의 참값을 얻는 방법이 계산 시간을 40%정도 단축할수 있었다.

적용 요소 분할을 사용하였기 때문에 필요한 부분만 요소가 세분되어 컴퓨터의 기억용량이나 계산 시간을 절약할수있었다.

본 연구에서는 힘 계산만을 다루었는데 이 알고리즘은 토오크계산에는 물론 교류 전자력 계산에도 확장 가능하다.

### 참 고 문 헌

- 1) Song-yop Hahn et al., "A Posteriori Error Estimate for Adaptive Finite Element Mesh Generation," IEEE Trans. on Magnetics, vol.MAG-24, no.1 pp.315-317, January 1988.
- 2) A.R.Pinchuk and P.P.Silvester, "Error Estimation for Automatic Adaptive Finite Element Mesh Generation," IEEE Trans. on Magnetics, vol.MAG-21, no.6,pp.2551-2554, November 1985.
- 3) Z.J.Cendes and D.N.Shenton, "Adaptive Mesh Refinement in the Finite Element Computation of Magnetic Field," IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-21, no.2,pp.1811-1816, September 1985.
- 4) K.Reichert, H. Freundl and W.Vogt, "The Calculation of Force and Torque Within Numerical Magnetic Field Calculation Method," Proceedings on COM-PUMAG, pp.64-74, 1976.
- 5) Durney and Johnson, Introduction to Modern Electromagnetics, McGrawhill, pp. 163-167, 1984.
- 6) I.Babuska and A.Miller, "The Post Processing Approach in the Finite Element Method Part 3:A Posteriori Error Estimate and Adaptive Mesh Selection," IJNME, vol.20, pp.745-756, 1984.