

〈論 文〉

정사각형 관내의 전개 중인 난류 유동 해석

신승주* · 박승오** · 김의택***

(1988년 7월 22일 접수)

Calculation of Developing Turbulent Flow in a Square Duct

Seung Joo Shin, Seung O Park and Eui Taeg Kim

Key Words : Non-Linear $k-\epsilon$ Turbulent Model(비선형 $k-\epsilon$ 난류 모형), Turbulence-Driven Secondary Flow(난류에 의한 2차 유동), Partially-Parabolized Navier-Stokes Equation(부분 포물형 Navier-Stokes 방정식)

Abstract

The non-linear $k-\epsilon$ model developed by Speziale was employed for the prediction of developing turbulent flow in a square duct. The numerical procedure incorporated a finite volume method using a strong conservation form of the partially-parabolized Navier-Stokes equation. Results of the calculation were compared with available experimental data on the mean velocity field and turbulent kinetic energy, and was found to be in favorable agreement.

기 호 설 명

- D_h : 수력 직경
- E : 표면 조도 상수
- G : 난류 운동에너지의 생성률
- k : 난류 운동에너지
- l : 길이 척도
- P : 평균 압력
- Re : 레이놀즈 수($Dh \cdot Wb/\nu$)
- S^* : 원천항
- U^T : 마찰속도
- $U(U_1), V(U_2), W(U_3) : X(X1), Y(X2), Z(X3)$ 방향의 평균 속도
- Γ : 확산계수
- ϵ : 난류 운동에너지 소산률
- κ : von Karman 상수
- μ : 층류 점성 계수
- ν : 층류 동점성 계수

- μ_t : 와점성 계수
- ν_t : 와동점성 계수
- τ : 전단 응력
- τ_w : 벽면 전단 응력

1. 서 론

임의의 단면을 갖는 관내에서의 유동은 열, 유체 기계의 설계에서 자주 발생하는 문제로서 각종 열 교환기나 터보 기계의 공기 흡입구, 압축기의 유로 등이 그 예이다. 이와 같은 관내 유동은 주 흐름방향에 수직인 단면에서 나타나는 2차 유동을 갖고 있는데 이것은 다른 두 종류의 원인에 의해 발생한다. 첫째, 주 흐름 방향에 수직으로 작용하는 원심력이 있는 곡관에서는 압력에 의해 2차유동(pressure-induced secondary velocity)이 발생하고 2차 유동의 속도 크기는 주흐름 방향의 평균 속도의 20%~30%에 달한다⁽¹⁾. 이와 같은 2차 유동은 휘어진 원형관의 층류 유동에서도 볼 수 있다. 둘째, 또 다른 2차 유동은 비원형 직관에서 나타나는

* 한국과학기술원

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

*** 한국과학기술원, 현재(주)삼성항공

데 이때는 난류 유동일 때만 볼 수 있으며 2차 유동의 크기는 주흐름 방향의 평균 속도의 2%~3%⁽¹⁾이지만, 2차 유동 때문에 발생하는 벽면 전단 응력의 변화로 인한 부식(erosion)의 문제, 혹은 그로 인한 직관에서의 열전달 문제등 공학적 측면에서 중요한 의미를 가질 수 있으므로 본 논문은 정사각형 단면을 갖는 3차원 직관에서의 난류에 의한 2차 유동(turbulence-driven secondary flow)을 수치적으로 보다 정확히 예측하는데 그 목적을 둔다.

비원형 직관에서의 2차 유동에 관한 계산은 Launder와 Ying[참고문헌 (1) 참조]에 의해 최초로 행해졌는데 이들은 완전히 전개된 유동(fully developed flow)일 때 사각형 단면의 유동 예측을 위해 대수 응력 모형과 1-방정식(one equation) 모형을 연결시켜서 평균 속도장을 구했다. 그 후에 전개 중인 유동(developing flow) 해석을 위해 Gessner와 Emery⁽²⁾는 이 모형을 수정하여 사용하였다. 좀 더 복잡한 비원형 관의 해석에서는 직각 좌표계가 경계 조건을 처리하는 것이 부정확하므로 Nakayama 등⁽³⁾은 비직교 좌표계에서 대수 응력 모형과 2-방정식($k-\epsilon$) 모형을 연결시켜서 완전히 전개된 유동을 계산했다. 비원형 직관에서의 2차 유동은 축 방향에 수직인 단면에서 나타나는 난류 수직 응력의 차이와 난류 전단 응력의 확산에 의해 발생하는 것으로 알려져 있다⁽¹⁾. 그러나 위에서 기술한 방법들은 난류 전단 응력에 영향을 미치는 2차 유동의 속도 구배를 무시함으로써 2차 유동의 물리적 현상보다는 수치적 기법에 의해 2차 유동을 예측하였다. Demuren과 Rodi는 2차 유동의 속도 구배를 대수 응력 모형에 포함시켜서 정사각형 단면을 갖는 관의 완전히 전개된 유동, 전개 중인 유동 등에 적용함으로써 비교적 향상된 결과를 얻었다. 난류에 의한 2차 유동은 등방성 와점성 계수를 사용하는 난류 모형으로는 예측할 수 없으므로⁽⁴⁾ 많은 연구가 대수 응력 모형에 근간을 두고 이루어져 왔다. 최근의 연구에서는 Yoshizawa⁽⁵⁾에 의해 비등방성 $k-\epsilon$ 모형이 개발되었고 Speziale⁽⁶⁾은 Yoshizawa와는 다른 접근 방법을 통해 좀 더 간단한 비선형 $k-\epsilon$ 난류 모형을 제시한 바 있다.

본 연구에서는 부분 포물형 Navier-Stokes 방정식에 Speziale이 제안한 비선형 $k-\epsilon$ 난류 모형을 적용하여 비직교 좌표계에서 전개 중인 유동의 평균 속도와 난류 운동에너지 등을 예측하였다.

2. 지배 방정식

직각 좌표에서 정상, 비압축성, 난류 유동에 대한 연속 방정식과 운동량 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(\rho U_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_j}(\rho U_j U_i) = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j} \right] \quad (2)$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

여기서 ρ 는 평균 밀도, U_i 는 평균 속도, μ 는 층류 점성 계수 그리고 P 는 평균 압력이다. Boussinesq의 제안에 의하면 레이놀즈 응력은 아래와 같이 근사될 수 있다.

$$-\rho \overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} \rho \chi \delta_{ij} + \mu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right] \quad (3)$$

여기서 μ_t 는 와점성 계수로 Prantl-Kolmogorov 관계에 의해

$$\mu_t = \rho \chi^{1/2} l \quad (4)$$

의 형태로 주어지고 난류 길이 척도(l)는 난류 운동에너지(turbulent kinetic energy, k)와 이의 소산률(dissipation, ϵ)에 의해 다음과 같은 형태를 취한다.

$$l = C_\mu \chi^{3/2} / \epsilon \quad (5)$$

또한, 와점성 계수는 다음과 같이 표현된다.

$$\mu_t = \rho C_\mu \chi^2 / \epsilon \quad (6)$$

여기서 C_μ 는 실험으로 결정된 상수다.

난류 운동에너지와 난류 운동에너지 소산율의 전달 방정식을 이용하여 와점성 계수를 구하는 $k-\epsilon$ 난류 모형은 많은 논문에서 사용되어 왔다. 와점성 모형을 사용하여 난류 점성 계수를 표현하면 충분히 큰 레이놀즈 수에서 다음과 같이 표시할 수 있다.

난류 운동 에너지 방정식 :

$$\frac{\partial}{\partial X_j}(\rho U_j k) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial X_j} \right] + \rho G - \rho \epsilon$$

난류 운동에너지 소산율 방정식 :

$$\frac{\partial}{\partial X_j}(\rho U_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial X_j} \right] + \rho \frac{\epsilon^2}{\chi} [C_{1\epsilon} G / \epsilon - C_{2\epsilon}] \quad (8)$$

여기서 난류 에너지 생성률(production rate, G)은

$$G = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \quad (9)$$

이며 모형 상수는

$$C_\mu=0.09, C_{1\epsilon}=1.44, C_{2\epsilon}=1.92$$

$$\sigma_\kappa=1.0, \sigma_\epsilon=1.3$$

을 사용한다⁽⁶⁾.

지배 방정식 (2), (7), (8)을 임의의 스칼라 종속 변수(ϕ)와 확산계수(Γ)에 관해 하나의 일반적인 표현을 갖는 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial X_j}(\rho U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial X_j}[\Gamma(\frac{\partial \phi}{\partial X_j})] + S^* \quad (10)$$

여기서 S^* 는 원천항(source term)이다.

3. 난류 모형

현재 널리 사용되고 있는 k - ϵ 모형은 (이후 표준 k - ϵ 모형이라 함) 모형의 등방성으로 인하여 비원형 관에서의 2차 유동을 묘사할 수 없는 것으로 알려져 있다⁽⁴⁾. 이를 개선하기 위하여 Speziale⁽⁴⁾은 아래에 설명되는 비선형 k - ϵ 모형을 제안하였다. 그는 난류 응력이 평균 속도 구배의 2차적(quadratic)항의 함수로도 표현되어야 한다고 생각하여 아래와 같은 함수형태를 가정하였다.

$$-\rho \overline{u_i u_j} = F[\nabla \overline{U}, \frac{D(\nabla \overline{U})}{Dt}, \kappa, l, \rho] \quad (11)$$

위 식을 만족하는 간단한 함수를 얻을 뿐 아니라 Navier-Stokes 방정식의 일반적인 성질과도 일치시키기 위해 일반 좌표계와 차원의 불변성(general coordinate and dimensional invariance), 레이놀즈 응력의 실현성(realizability of Reynolds stresses) 그리고 2차원 난류의 극한에서의 물질 좌표계의 비의존성(material frame indifference in the limit of two-dimensional turbulence) 등의 구속 조건을 사용하면 식 (11)은 아래와 같은 형태가 되어야 한다.

$$-\rho \overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3}\rho\kappa\delta_{ij} + {}_D F_{ij}[\overline{D}, \overline{D}, \kappa, l, \rho] \quad (12)$$

여기서 ${}_D F_{ij}$ 는 traceless 텐서이고 ${}_D F_{ii}=0$ 이다. 그리고 \overline{D} 와 $\dot{\overline{D}}$ 는 위에서 기술한 세번째 조건을 만족하기 위한 $\nabla \overline{U}$ 와 $D(\nabla \overline{U})/Dt$ 의 계 불변부(frame indifferent part)로서 다음과 같다.

$$\overline{D}_{ij} = \frac{1}{2}[\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}] \quad (13)$$

$$\dot{\overline{D}}_{ij} = U_n \frac{\partial}{\partial X_n} \overline{D}_{ij} - (\frac{\partial U_i}{\partial X_n}) \overline{D}_{nj} - (\frac{\partial U_j}{\partial X_n}) \overline{D}_{ni}$$

$$(i, j, m, n=1, 2, 3) \quad (14)$$

\overline{D} 가 평균 속도 구배에 2차적이므로 식(12)의 선형 근사인 식 (3), (4)에 의한 표준 k - l 모형이 됨을 알 수 있고 속도 구배에 2차적 관계를 갖는 비선형 k - ϵ 모형은 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} -\rho \overline{u_i u_j} = & -\frac{2}{3}\rho\kappa\delta_{ij} + 2\mu_t \overline{D}_{ij} \\ & + 4\rho C_\mu^2 (\kappa^3/\epsilon^2) [C_D (\overline{D}_{im} \overline{D}_{mj} \\ & - \overline{D}_{mn} \overline{D}_{mn} \delta_{ij}/3) \\ & + C_E (\dot{\overline{D}}_{ij} - \dot{\overline{D}}_{mn} \delta_{ij}/3)] \end{aligned} \quad (15)$$

C_D 와 C_E 는 무차원 상수로 똑같이 1.68 이다. 본 연구에서는 Speziale이 제안한 비선형 k - ϵ 모형을 사용하여 사각형 관에서 발생하는 2차 유동을 예측하였다.

식 (15)의 비선형 k - ϵ 모형을 사용할 경우 표준 k - ϵ 모형과의 차이는 식 (10)과 같이 표현했을 때 원천항에서만 나타난다. 비선형 k - ϵ 모형에 의한 확산 계수와 원천항은 다음과 같다.

운동량 방정식 :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mu + \mu_t \\ S^* &= -\partial P/\partial X_i + (\partial/\partial X_j) \left[(\mu + \mu_t) \partial U_j/\partial X_i \right. \\ & - (2/3)\rho k \delta_{ij} + 4C_\mu^2 \rho k^3/\epsilon^2 [C_D (\overline{D}_{im} \overline{D}_{mj} \\ & - \overline{D}_{mn} \delta_{ij}/3) + C_E \rho \{\overline{U} \cdot \nabla \overline{D}_{ij} \\ & - (\partial U_i/\partial X_m) \overline{D}_{mj} - (\partial U_j/\partial X_m) \overline{D}_{mi} \\ & \left. - (\overline{U} \cdot \nabla \overline{D}_{mm} - 2\overline{D}_{im} \partial U_m/\partial X_i) \delta_{ij}/3\}] \right] \\ (\phi &= U, V, W) \end{aligned} \quad (16)$$

난류 운동 에너지 방정식 :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \\ S^* &= \rho(G - \epsilon) \end{aligned} \quad (17)$$

난류 운동 에너지 소산율 방정식 :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \\ S^* &= \rho \frac{\epsilon}{k} (C_{1\epsilon} G - C_{2\epsilon} \epsilon) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$\begin{aligned} G &= -\overline{u_i u_j} (\partial U_i/\partial X_j) \\ &= \nu_t (\partial U_j/\partial X_i + \partial U_i/\partial X_j) (\partial U_i/\partial X_j) \\ &+ 4C_\mu^2 k^3/\epsilon^2 [C_D (\overline{D}_{im} \overline{D}_{mj} - \overline{D}_{mn} \overline{D}_{mn} \delta_{ij}/3) \\ &+ C_E (\dot{\overline{D}}_{ij} - \dot{\overline{D}}_{mn} \delta_{ij}/3)] (\partial U_i/\partial X_j) \end{aligned} \quad (19)$$

4. 계산 방법과 경계 조건

4.1 계산 방법

3차원 관 유동은 대류 효과(convective influence)는 후류 방향으로만, 확산 효과(diffusive influence)는 유선에 수직 방향으로만 작용하고, 오직 압력에 의해서만 하류의 영향이 상류로 전달되는 부분 포물형(partially parabolic) 성격을 갖는다⁽⁷⁾. 압력은 3차원 배열을 갖지만 다른 종속 변수는 2차원 배열을 갖게 되어 타원형에 비해 경계적이므로 본 논문에서는 전장에서 유도된 모든 미분 방정식을 주 흐름 방향의 확산항을 무시한 다음과 같은 부분 포물형 Navier-Stokes 방정식을 사용하였다.

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\rho U_1 \phi) + \frac{\partial}{\partial X_2}(\rho U_2 \phi) + \frac{\partial}{\partial X_3}(\rho U_3 \phi) = \frac{\partial}{\partial X_1}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X_1}) + \frac{\partial}{\partial X_2}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X_2}) + S^{\phi} \quad (20)$$

위의 방정식을 Fig.1의 제어 체적에서 적분한 후 Patankar 등⁽⁸⁾이 제안한 Hybrid 방법에 의해 이산화하여 다음의 유한 차분식을 얻는다.

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_D \phi_D + A_U \phi_U + SO \quad (21)$$

가정한 압력 분포(P^*)로 운동량 방정식을 계산하여 얻은 속도 분포(U_1^*, U_2^*, U_3^*)는 연속 방정식을 만족하지 못하므로 속도와 압력을 보정한다. 속도에 대한 보정식은 연속 방정식을 만족하는 운동량 방정식으로부터 다음과 같은 식을 구할 수 있다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned} U_1' &= BP_{X_1} \\ U_2' &= CP_{X_2} \\ U_3' &= DP_{X_3} \end{aligned} \quad (22)$$

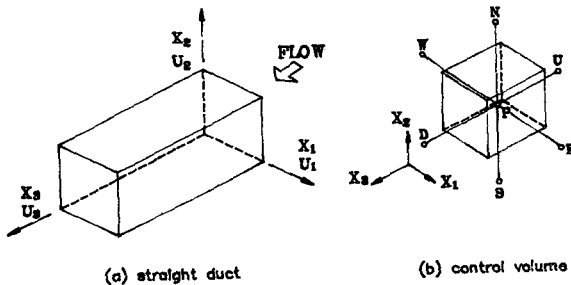


Fig. 1 Computational geometry and control volume

여기서 B, C, D 는 밀도, 대류, 확산, 면적 등을 포함한다. 보정압력(P')은 주 흐름 방향(X_3)과 단면 방향(X_1, X_2)으로 나누어 구하는데 먼저 주 흐름 방향의 연속성을 만족시키기 위한 다음 식을 이용한다.

$$\begin{aligned} U_3' &= D \bar{P}'_{X_3} \\ \bar{P}'_{X_3} &= (M_{in} - \sum \rho U_3 \Delta X_1 \Delta X_2) / (\sum \rho D \Delta X_1 \Delta X_2) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\dot{M} = [\sum \rho U_3 \Delta X_1 \Delta X_2]_{inlet \ plane}$$

여기서 \bar{P} 는 단면에서의 평균값을 의미한다. 또한, 단면 방향의 압력보정은 연속 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_p P'_p &= A_E P'_E + A_W P'_W + A_N P'_N + A_S P'_S \\ &+ A_D P'_D + A_U P'_U + SO \end{aligned} \quad (24)$$

위 방정식을 $P'_D = P'_U = 0$ 로 가정하여 2차원의 타원형 방정식으로 만들어 압력 보정값을 구하고 식 (23), (24)에 의해 구한 보정 압력을 식 (22)에 대입하여 보정 속도를 구한다.

모든 종속 변수는 유동의 주흐름 방향으로 전진하면서 완전히 전개된(fully developed)운동을 얻을 때까지 각 단면에서 계산한 후 연속 방정식과 운동량 방정식을 만족하도록 전 유동장을 반복하여 계산한다. 난류 모형을 위해 사용한 비선형 $k-\epsilon$ 모형으로는 처음에는 발산하였기 때문에 이를 해결하기 위해 표준 $k-\epsilon$ 모형을 이용하여 어느 정도 계산한 후에 비선형 $k-\epsilon$ 모형을 사용함으로써 수렴된 값을 얻을 수 있었다.

수치해는 각 단면에 불균일하게 분포한 21×21 개의 격자점에서 구해지며 속도 구배가 큰 벽면 근처에서 보다 정확한 계산을 위해 다음 식을 이용하여 Stretching시킨다.

$$\Delta y = \frac{1}{NJ-1} \quad (25)$$

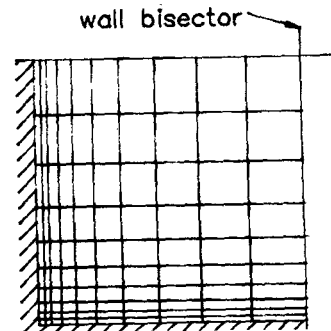


Fig. 2 Grid system at cross section

$$y = \frac{(\beta+1) - (\beta-1) \{ (\beta+1)/(\beta-1) \}^{1-(n-1)dy}}{[(\beta+1)/(\beta-1)]^{1-(n-1)dy} + 1}$$

여기서 NJ 는 Y 방향의 격자점의 수이고 n 은 정수로 0과 NJ 사이의 값을 갖는다. 또한 β 값은 1에 가까울 수록 벽면 근처에 많은 격자를 두게되는데 본 논문에서는 다음 절에서 설명하는 벽면 함수법의 적용을 위해 $Re=42000$ 인 경우는 $\beta=1.10$, $Re=83000$ 인 경우는 $\beta=1.04$ 를 택하였고 $\beta=1.04$ 일 때의 격자계를 Fig.2에 나타낸다. 이것은 벽면에 가장 근접한 격자점이 대수 영역에 있도록 β 값을 선택한 것이다.

4.2 초기 조건과 경계 조건

초기 조건은 관 입구에서 $U=0.0, V=0.0, W=1.0$ 과 $P=0.0$ 인 균일한 흐름을 주며 k 와 ϵ 은 실험식을 이용하여 작은 값으로 균일하게 준다. 벽면에서의 경계 조건은 난류가 국부적 평형(local equilibrium)을 이루어 벽면의 대수 법칙이 유효한 영역에서 경계 조건을 주는 벽면 함수법(wall function method)을 사용한다⁽⁶⁾. 벽면에 가장 근접한 격자점 p 가 대수 영역에 있을 때 다음과 같은 벽면 법칙을 가정할 수 있다.

$$\frac{U_p}{(\tau/\rho)_w} C_\mu^{1/4} \chi_p^{1/2} = \frac{1}{k} \ln \left[E y_p \frac{C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\nu} \right] \quad (26)$$

여기서 U_p 는 p 점에서 벽면에 평행한 속도이고 벽면에서의 전단 응력은 U_p 와 같은 방향으로 작용한다. y_p 는 p 점과 벽과의 수직 거리이고 E 는 9.0, χ 는 von Karman 상수로 0.41이다.

x 와 ϵ 에 관한 경계 조건은 p 점에서 국부적 평형을 이루고 이영역에서는 전단 응력이 거의 일정하므로 벽면 전단 응력과 같다고 가정하여 얻은 다음 식을 사용한다.

$$\chi_p = (\tau/\rho)_w / C_\mu^{1/2} \quad (27)$$

$$\epsilon_p = C_\mu^{3/4} \chi_p^{3/2} / k y_p \quad (28)$$

5. 수치 해석 결과 및 분석

난류에 의한 이차 유동 해석은 레이놀즈 수가 약 40000~250000의 범위에서 실험과 계산이 연구되어 왔다. 본 연구에서는 Melling과 Whitelaw⁽⁹⁾의 실험과 같은 $Re=42000$, 또한 Brundrett와 Baines⁽¹⁰⁾와 같은 $Re=83000$ 인 두 경우에 대하여 계산을 행하였다.

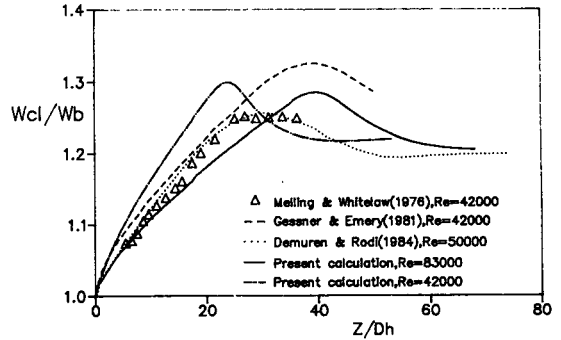


Fig. 3 Axial centerline velocity distribution

5.1 평균 속도

관의 중심축을 따른 주 흐름 방향의 속도 (Wcl) 변화를 Fig. 3에 나타내고 있다. Wb 는 주 흐름 방향의 평균 속도이고, Dh 는 수력 직경(hydraulic diameter)으로서 정사각형에서는 한 변의 길이가 된다. 실험값으로는 $Re=42000$ 의 Melling 등⁽⁹⁾의 결과를 선택했고, 다른 계산 결과들은 길이 척도 모형과 대수 응력 모형을 연결 시킨 Gessner와 Emery⁽²⁾, 대수응력 모형을 이용한 Demuren과 Rodi의 결과를 함께 비교했다. $Re=42000$ 일 경우 본 논문의 계산 결과, 축을 따른 속도는 실험값보다 속도의 증가율이 크지만 관의 입구에서 점차 증가하여 최대치에 도달한 후 감소하여 완전히 전개된 유동이 되면 일정한 값을 유지한다. Melling등의 실험은 완전히 전개된 유동을 얻지 못하였으므로 이런 경향을 보이지 않으나 $Re=250000$ 일 때의 실험 결과⁽¹¹⁾에 의하면 본 논문과 같은 경향을 보여준다. $Re=42000$ 과 $Re=83000$ 일 경우를 비교하면 레이놀즈 수가 클수록 최대 속도는 후류쪽에서 나타나고 최대 속도의 크기는 작아지는데 이는 실험 결과와도 일치한다⁽¹¹⁾.

Fig. 4는 $Re=83000$ 일 때 벽면 수직 이등분선(wall bisector)을 따른 속도 분포를 5개의 단면에서 나타내는데 동일한 레이놀즈 수의 실험결과를 얻지 못하여 $Re=250000$ 인 Gessner[참고문헌(2) 참조]와 Po[참고문헌(1) 참조]의 실험값들과 비교한다. 여기서 a 는 정사각형 한 변 길이의 절반이다 이들의 실험은 유사한 조건과 같은 실험 장치로 얻어졌으나 결과값들이 그림에서 보듯이 흩어져 있는 것은 실험의 부정확성을 보여준다. $24Dh$ 까지는 특히 Gessner의 실험과 잘 일치하지만 $40Dh$ 에서는 과대 예측하는데 이것은 Fig. 3의 축을 따른 속

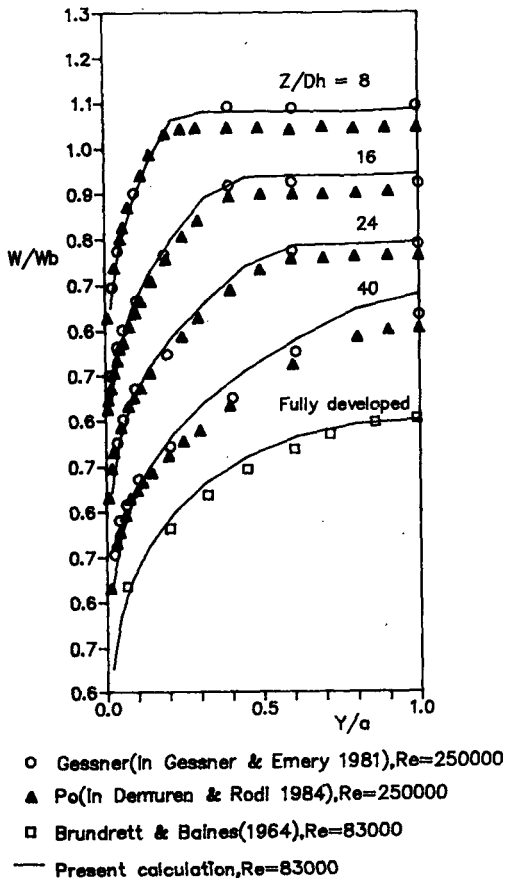


Fig. 4 Primary-velocity profile along wall bisector

도가 $40Dh$ 에서 최대값을 예측하는 것에 기인한다. 완전히 전개된 유동의 속도 형상은 $260Dh$ 에서 측정된 $Re=83000$ 의 Brundrett와 Baines⁽¹⁰⁾의 결과와 잘 일치한다. 또한 전개 중인 전체 영역에서 벽면에 가장 인접한 격자점에서는 실험치와 일치함으로써 벽면 함수법의 유효함을 알 수 있다.

$40Dh$ 에서와 완전히 전개된 유동에서의 벽면 수직 이등분선을 따른 2차유동을 평균 마찰 속도(friction velocity)로 무차원화시켜 Fig. 5에서 실험값들과 비교하고 있다. $40Dh$ 에서 $Re=42000$ 인 Melling 등의 실험과 $Re=250000$ 인 Gessner의 실험은 레이놀즈 수가 다름에도 불구하고 큰 차이를 보이지 않을 뿐 아니라 완전히 전개된 유동에서의 실험값들은 상당히 흩어져 있음으로써 주 흐름 방향 평균 속도의 2%~3%인 2차 유동의 정확한 측정이 어렵다는 것을 보여준다. 이와같은 실험의 부정확성은 레이놀즈 수가 달라서 나타나는 2차 유동

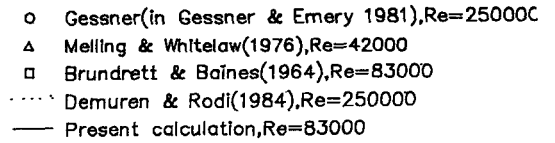
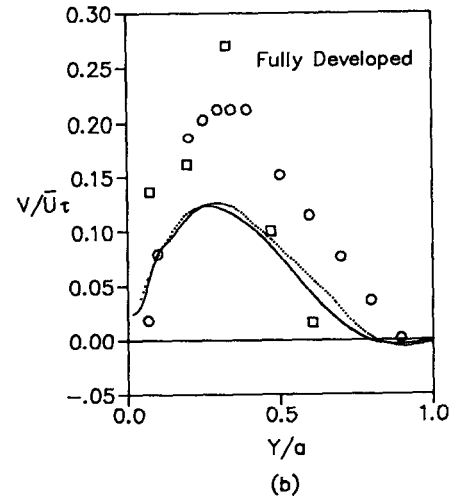
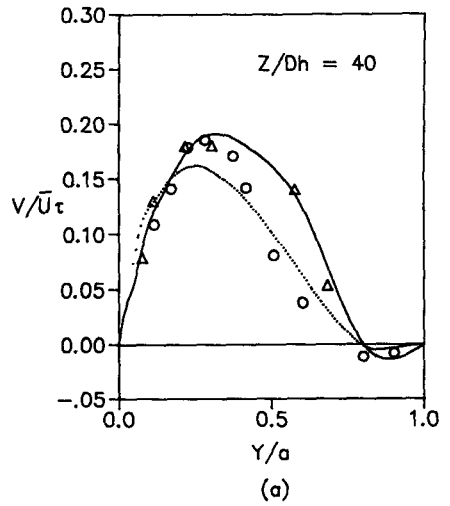


Fig. 5 Secondary-velocity profiles along wall bisector

크기의 차이와 비슷한 크기의 오차를 포함할 수 있는 것으로 보인다. 그림에서 보듯이 $40Dh$ 에서는 과소 예측하는 Demuren과 Rodi의 결과 보다 더 큰 2차 유동을 발생시키고 완전히 전개된 유동은 $70Dh$ 에서의 결과로서 Demuren과 Rodi의 계산 결과($84Dh$)에서 똑같이 실험에 비해 과소 예측한다. Fig. 5의 (a), (b)에서 Gessner의 실험에 의하면 $40Dh$ 에서 완전히 전개된 유동이 될 때까지 2차 유동이 감소하지만 Demuren과 Rodi의 논문과 본

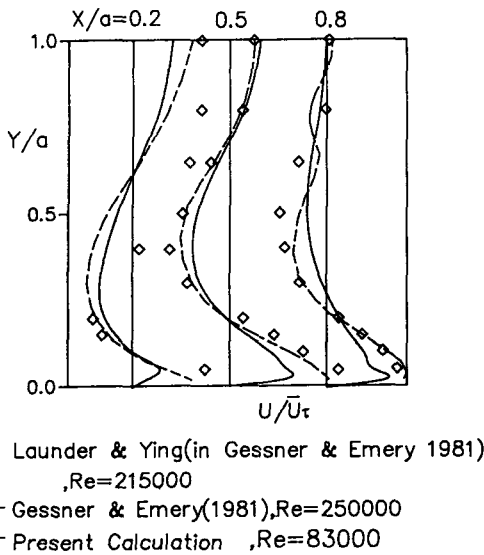


Fig. 6 Secondary velocity profiles

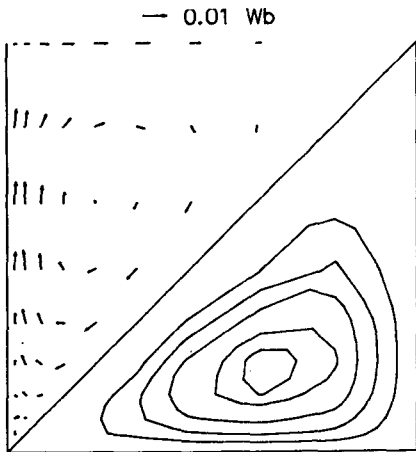


Fig. 7 Secondary-flow vectors and streamlines

논문의 계산 결과는 반대의 경향을 보인다. 즉 V 가 $40Dh$ 로 부터 후류로 갈수록 작아진다. Fig. 6은 완전히 전개된 유동일 때 단면에서 2차 유동의 속도 분포를 나타낸다. 대칭선 부근에서는 실험값과 일치하지만 대각선 근처의 결과는 실험치보다 과소 평가하고 있다. 2차 유동을 가시화 하기 위해 완전히 전개된 유동에서의 속도 벡터와 유선을 Fig. 7에 나타낸다.

5.2 난류 특성과 벽면 전단 응력

Fig. 8에서 벽면 수직 대칭선을 따른 난류 운동

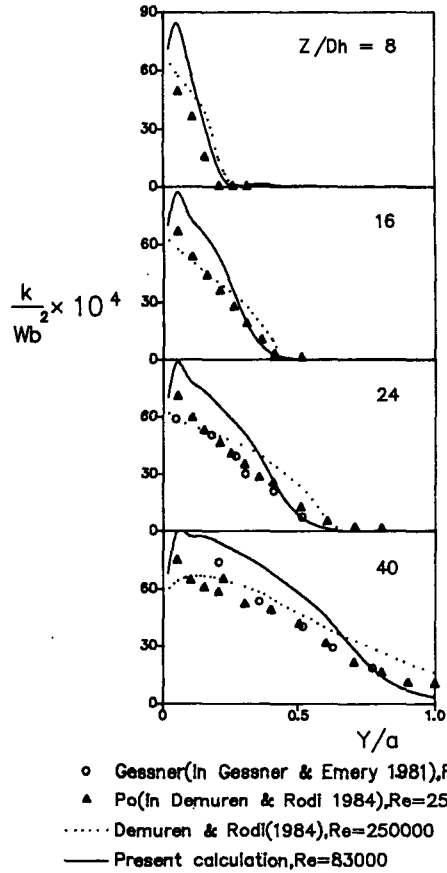


Fig. 8 Turbulent kinetic energy profiles along wall bisector

에너지의 분포를 실험과 다른 계산 방법들과 비교한다. 관의 중심 영역에서는 비교적 계산 결과가 실험값과 일치하지만 벽면 근처에서는 과대 평가하고 있다. 그러나 Demuren과 Rodi의 계산 결과는 벽면 근처에서 과소 평가하고 중심 부분에서는 과대 평가하고 있다. 이들은 벽면에 가장 근접한 격자점에서의 k 값이 너무 작아서 벽면 감폭 함수 (wall damping function)을 사용하여 이를 극복하였으나 본 논문은 벽면 함수법만으로도 비교적 정확한 값을 얻을 수 있었다. 벽면 근처에서 첫번째 격자점은 비교적 실험치에 접근하지만 그 다음 격자점에서 실험값보다 지나치게 큰 값을 갖는데 이것은 첫번째 격자점에서는 k 의 생성항에 포함되어 있는 속도 구배를 벽면 법칙을 사용하여 인위적으로 실험값과 일치하도록 하지만 그 다음 격자점부터는 계산의 일부로 속도 구배를 결정하므로 실험

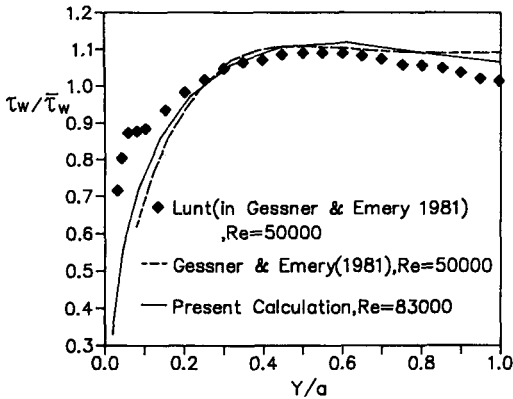


Fig. 9 Local wall shear stress distributions

치에서 벗어나는 것으로 보여진다.

Fig. 9에서는 벽면 전단 응력의 분포를 나타내는데 Lunt[참고문헌 (2) 참조]의 실험과 비교하면 모퉁이 부근을 제외하고는 비교적 잘 예측하고 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

기존의 정사각형 관내의 난류 유동 해석을 위해 사용한 난류 모형은 대수 응력 모형에 근간을 두고 이를 수정하거나 혹은 다른 모형과 연결시켜서 연구가 이루어져 왔는데 대부분의 경우 2차 유동을 정확히 예측하기 위한 특수한 방편으로 단면 방향에서의 수직 응력과 전단 응력에 수정을 가하였다. 그러나 본 연구에서 사용한 비선형 $k-\epsilon$ 난류 모형은 레이놀즈 응력의 일반적인 수정을 통해 대수 응력 모형과 유사하게 2차 유동을 예측할 수 있었다. 그러나 비선형 $k-\epsilon$ 모형은 표준 $k-\epsilon$ 모형을 사용하여 어느 정도 계산한 뒤에 사용해야만 수렴이 가능한 단점이 있음을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국 과학 재단의 "목적 기초연구"의 일부로 재정적 지원을 받아 이루어진 것을 밝히며

이에 심심한 감사를 포함합니다.

참 고 문 헌

- (1) A.O. Demuren and W.Rodi, 1984, "Calculation of Turbulence-Driven Secondary Motion in Non-circular Ducts", J. Fluid Mech., Vol. 140, pp. 189~222.
- (2) F.B. Gessner and A.F. Emery, 1981, "The Numerical Prediction of Developing Turbulent Flow in Rectangular Ducts", Trans of ASME, Journal of Fluids Eng., Vol. 103, pp. 445~455.
- (3) A. Nakayama, W.L. Chow and D. Sharma, 1983, "Calculation of Fully Developed Turbulent Flows in Ducts of Arbitrary Cross-Section", J. Fluid Mech., Vol. 128, pp. 199~217.
- (4) C. G. Speziale, 1987, "On Nonlinear $k-l$ and $k-\epsilon$ Models of Turbulence", J. Fluid Mech., Vol. 178, pp. 459~475.
- (5) A. Yoshizawa, 1984, "Statistical Analysis of the Deviation of the Reynolds Stress from Its Eddy Viscosity Representation", Phys. Fluids, Vol. 27, pp. 1377~1387.
- (6) B.E. Launder and D.B. Spalding, 1974, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, pp. 269~289.
- (7) V.S. Pratap and D.B. Spalding, 1976, "Fluid Flow and Heat Transfer in Three-Dimensional Duct Flows", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19, pp. 1183~1188.
- (8) S.V. Patankar, 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Mc-Graw-Hill, New York.
- (9) A. Melling and J.H. Whitelaw, 1976, "Turbulent Flow in a Rectangular Duct", J. Fluid Mech., Vol. 78, pp. 289~315.
- (10) E. Brundrett and W.D. Baines, 1964, "The Production and Diffusion of Vorticity in Duct Flow", J. Fluid Mech., Vol. 19, pp. 375~394.
- (11) F.B. Gessner, J.K. Po, and A.F. Emery, 1979, "Measurements of Developing Turbulent Flow in a Square Duct", Turbulent Shear Flows, 1, Springer-Verlag, New York.