

<論 文>

차륜과 철로의 연성진동에 관한 연구

김 광 식* · 김 찬 목** · 윤 희 욱***

(1989년 1월 16일 접수)

A Study on the Coupled Vibration of Train Wheel and Rail

Kwang Sic Kim, Chan Mook Kim and Hee Wook Yoon

Key Words : Coupled Vibration(연성진동), Coupled Natural Frequency(연성고유진동수), Coupled System(연성계)

Abstract

In this paper, using by the orthogonalities of modes for trainwheel (as Mindlin's annular plate and rail (as Timoshenko beam), the frequency equation of the coupled system are induced. It is convinced that the natural frequencies of coupled system are distributed to be about quadratic order function examined through the experimental and numerical analysis. The natural frequencies of the system coupled by both creep force and creep moment are composed of the natural frequencies of the system coupled by creep force and the natural frequencies of the system coupled by creep moment. And it is shown that the coupled natural frequencies up to 3rd do not make much difference from the values of the system coupled by individual creep force or creep moment. But the coupled natural frequencies higher than the 3rd are quite different from those of individual case.

기 호 설 명

A : 레일의 단면적 (m^2)
 a : 차륜의 외경 (m)
 b : 차륜의 내경 (m)
 D : 차륜의 굽힘강성도 (N-m)
 E : 종탄성계수 (N/m^2)
 G : 전단탄성계수 (N/m^2)
 h : 차륜의 두께 (m)
 I : 레일단면의 면적관성 모멘트 (m^4)
 i, j, k, l : 하첨자
 k_r : 병진스프링상수 (kN/m)
 k_θ : 비틀림스프링상수 (kN-m/rad)
 L : 레일의 길이 (m)

$M_r, M_\theta, M_{r\theta}$: 차륜요소의 모멘트 강성도 (N)
 Q_r, Q_θ : 차륜요소의 전단력 강성도 (N/m)
 t : 시간 (sec)
 $\{T\}$: 차륜의 전달행렬
 $[\bar{U}]$: 차륜의 계수행렬
 w : 차륜의 변위 (m)
 δ : Dirac delta
 $\delta_{ij,kl}$: Kronecker delta
 ρ : 질량밀도 (kg/m^3)
 ψ_r, ψ_θ : 차륜의 각 변위 (rad)
 x : 차륜의 전단계수

1. 서 론

*정회원, 한양대학교 공과대학 정밀기계공학과
 **정회원, 국민대학교 공과대학 기계설계학과
 ***한양대학교 대학원

철도차량의 운행속도가 고속화되면서 진동과 소음문제는 철도운행의 안정성 및 승차감에 큰 영향

을 주고 있다. 진동소음의 주발생원이 레일의 이음매에서 오는 충격과 차륜과 레일 사이에서 상대적으로 발생하는 횡진동이라는 것이 일반적으로 알려져 있지만 진동소음은 차륜과 레일이 연성되었을 때 존재하는 고유진동수에 관계되어 있어 이 문제에 관한 여러 가지 연구가 이루어졌다. 그러나 복잡한 연성특성으로부터 그 결과를 명확히 한 것의 알려지지 않았다.

Irrerier⁽¹⁾는 차륜의 외주면에 병진스프링만이 부착되고 차륜의 두께가 반경방향으로 선형적으로 변하는 경우에 대하여 이론식을 유도하고 원환에 가까운 모델로 단순화하여 수치해석하였으나 비틀림모멘트의 효과를 고려하지 못했다.

Matsuhisa⁽²⁻⁴⁾는 차륜이 곡선진 부분을 통과할 때 스퀴얼(squeal)에 의해서 횡방향 외력만을 받는 차륜특성을 Bessel 함수와 Green 함수를 사용하여 해석하였으며 차륜과 레일이 병진스프링만으로 연결되었다고 모델링하여 해석하였다.

차륜자체의 기초연구로서는 김등⁽⁵⁻⁷⁾에 의해서 차륜이 레일로부터 받는 반력에 의한 내평면 압축 응력을 Hertz의 접촉이론과 접합층으로 인한 원주위에 생기는 분포응력과 차륜속도를 결합하여 그 특성을 해석하였고 김은⁽⁸⁾ 외원주상에 집중하중을 받는 계단진 차륜의 고유진동수를 유한요소법에 의해서 해석하였다.

본 논문에서는 차륜과 레일의 접촉부에서 발생하는 크리프힘과 크리프모멘트를 결합시키고 이들이 병진스프링과 비틀림스프링에 의해서 연성되었을 때 생기는 고유진동수의 특성을 차륜과 레일의 직교성을 이용하여 수치해석하고 모델실험을 통하여 연구하였다.

2. 이론해석

철로와 차륜의 접촉면은 불규칙하지 않은 매끄러운 구름접촉이며 차륜과 철로는 횡방향으로만 진동하며 차륜의 축은 고정이라고 가정한다. 또 실제의 철로는 탄성지지된 무한히 긴 보로 보아야 하나 본 논문에서 적용한 연성진동수 방정식은 차륜과 레일의 고유진동수, 변위 그리고 각변위 및 연성된 정도를 나타내는 스프링 상수와 관계되어 있으므로 철로는 일정 길이의 양단자유인 보로 가정하여 연성진동을 해석하고자 한다. 또한 차륜이 철로 위를 구를 때 접촉면에서의 차륜과 철로의 상대속도 및

상대각속도에 의해서 크리프 힘과 크리프 모멘트가 발생하며 이들은 차륜과 철로의 횡방향 진동에 영향을 끼친다. 차륜은 고속으로 회전하나 차륜의 고유진동수와 비교해 매우 작은 값이므로 차륜은 철로에 크리프 힘과 모멘트에 상당하는 스프링으로 연결되어 있다고 가정한다.

2.1 차륜에 대한 이론해석

차륜은 계단진 형태의 원판으로 되어 있으나 플랜지 외주변이 계단지어 있더라도 동질량의 균일두께의 원판과 고유진동수의 큰 차이가 없음을 확인하였으므로⁽⁸⁾이론의 단순화를 위하여 균일두께의 원판이라고 가정한다. Fig. 1과 같이 차륜의 외경과 내경을 a 와 b 라 하고 극좌표(중립면에 잡은) r, θ 를 이용하여 차륜요소의 변위 및 힘과 모멘트를 표시하였으며 Fig. 1의 (a)는 미소요소에 작용하는 전단력과 모멘트를, 그리고 (b)는 변위 w 및 각변위 ψ_r, ψ_θ 를 나타내고 있다. Mindlin의 원판진동에 관한 운동방정식을 대입하면 다음과 같다⁽⁹⁾.

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial (r\theta)} + (M_r - M_\theta) / r - Q_r + \omega^2 \rho h^3 \psi_r / 12 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta}{\partial (r\theta)} + 2M_{r\theta} / r - Q_\theta + \omega^2 \rho h^3 \psi_\theta / 12 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial (r\theta)} + Q_r / r + \omega^2 \rho h w = 0 \tag{3}$$

여기서 ρ 는 밀도, h 는 원판의 두께, ω 는 고유진동수이다.

횡방향 변위 w 와 반경방향 및 원주방향 각변위 ψ_r, ψ_θ 의 향으로 모멘트와 전단력의 성분들을 나타내면 아래와 같다.

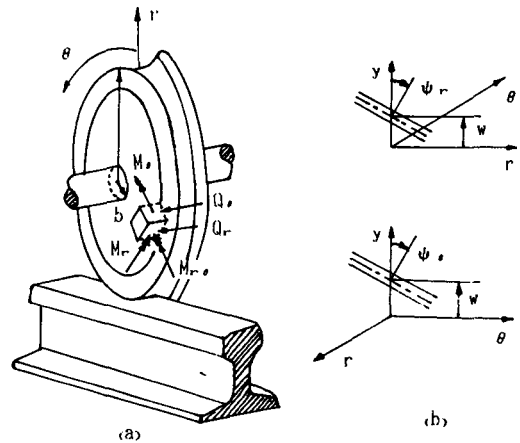


Fig. 1 Free body diagram of wheel

$$M_r = D\{\partial\psi_r/\partial r + (\nu/r)(\psi_r + \partial\psi_o/\partial\theta)\} \quad (4)$$

$$M_o = D\{(\psi_r + \partial\psi_o/\partial\theta)/r + \nu(\partial\psi_r/\partial r)\} \quad (5)$$

$$M_{r\theta} = D\{(1-\nu)/2\}\{(\partial\psi_r/\partial\theta - \psi_o)/r + \partial\psi_o/\partial r\} \quad (6)$$

$$Q_r = x^2 Gh(\psi_r + \partial w/\partial r) \quad (7)$$

$$Q_o = x^2 Gh\{\psi_o + \partial w/(r\partial\theta)\} \quad (8)$$

여기서 E 는 탄성계수(Young's modulus), $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, G 는 전단탄성계수(shear modulus), $x = \sqrt{\pi^2/12}$ = 전단계수(shear coefficient)이다. 여기서 모멘트와 전단력 그리고 각변위와 직선변위는 다음과 같은 함수로 이루어진다⁽¹⁰⁾.

$$(M_r, M_o, M_{r\theta}) = (D/a)(M_r^* \cos(n\theta),$$

$$M_o^* \cos(n\theta), M_{r\theta}^* \sin(n\theta))$$

$$(Q_r, Q_o) = (D/a^2)(Q_r^* \cos(n\theta),$$

$$Q_o^* \sin(n\theta)) \quad (9)$$

$$(\psi_r, \psi_o) = (\psi_r^* \cos(n\theta), \psi_o^* \sin(n\theta))$$

$$w = aw^* \cos(n\theta), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

여기서 M_r^*, M_o^*, \dots 등과 같이 *이 붙은 것은 무차원량이고 식 (10)과 같은 무차원변수를 도입하면 식 (11)과 같은 행렬운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\eta = r/a(\beta = b/a), \quad \delta = h/a,$$

$$K = 6x^2(1-\nu)/\delta^2$$

$$\lambda^4 = \rho ha^4 \omega^2 / D \quad (10)$$

$$\frac{d}{d\eta} \begin{Bmatrix} M_r^* \\ M_{r\theta}^* \\ Q_r^* \\ \psi_r^* \\ \psi_o^* \\ W^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{\eta} & \frac{n}{\eta} & 1 & \left(\frac{1-\nu^2}{\eta^2} - \frac{\lambda^4 \delta^2}{12}\right) & \frac{n(1-\nu^2)}{\eta^2} & 0 \\ \frac{n\nu}{\eta} & -\frac{2}{\eta} & 0 & \frac{n(1-\nu^2)}{\eta^2} & \left\{\frac{n^2(1-\nu^2)}{\eta^2} - \frac{\lambda^4 \delta^2}{12} + K\right\} & -K\frac{n}{\eta} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\eta} & 0 & -K\frac{n}{\eta} & \left(K\frac{n^2}{\eta^2} - \lambda^4\right) \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{\eta} & -\frac{n\nu}{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{2}{1-\nu} & 0 & \frac{n}{\eta} & \frac{1}{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_r^* \\ M_{r\theta}^* \\ Q_r^* \\ \psi_r^* \\ \psi_o^* \\ W^* \end{Bmatrix} \quad (11)$$

식 (11)은 행렬포기법을 이용하면 식 (12)와 같이 되며 $\{Z(\eta)\}$ 는 상태벡터(state vector)이고 $[\bar{U}(\eta)]$ 는 계수행렬(coefficient matrix)이다.

$$\frac{d}{d\eta}\{Z(\eta)\} = [\bar{U}(\eta)]\{Z(\eta)\} \quad (12)$$

전달행렬(transfer matrix) $[T(\eta)]$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$\{Z(\eta)\} = [T(\eta)]\{Z(\beta)\} \quad (13)$$

그러면 식 (12), (13)으로부터 식 (14)가 유도된다.

$$\frac{d}{d\eta}[T(\eta)] = [\bar{U}(\eta)][T(\eta)] \quad (14)$$

식 (13)에 $\eta = \beta$ 의 값을 대입하면 $[T(\beta)] = [1]$ 이 되어야 하며 이 값을 초기값으로 하여 식 (14)를 적분하면 임의의 η 값에 대하여 $[T(\eta)]$ 를 구할 수 있다.

차륜의 내경은 축에 고정(clamped)되어 있으므로

$$\psi_r^* = \psi_o^* = w^* = 0, \quad \text{at } \eta = \beta \quad (15)$$

이고 식 (13)은 아래와 같게 된다.

$$\begin{Bmatrix} M_r^* \\ M_{r\theta}^* \\ Q_r^* \\ \psi_r^* \\ \psi_o^* \\ w^* \end{Bmatrix}_{(\eta)} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} \end{bmatrix}_{(\eta)} \begin{Bmatrix} M_r^* \\ M_{r\theta}^* \\ Q_r^* \end{Bmatrix}_{(\beta)} \quad (16)$$

외경이 자유일 때의 경계조건(boundary condition)

$$M_r^* = M_{r\theta}^* = Q_r^* = 0, \quad \text{at } \eta = 1 \quad (17)$$

인 관계를 이용하면 $[T(\eta)]$ 만의 계산이 필요하게 된다. 식 (17)의 조건을 식 (16)에 대입하면 다음과 같이 진동수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{(\eta=1)} \begin{Bmatrix} M_r^* \\ M_{r\theta}^* \\ Q_r^* \end{Bmatrix}_{(\beta)} \quad (18)$$

$[\bar{U}(\eta)]$ 는 η 와 λ 의 함수이므로 식 (14)에 의하여 $[T(\eta)]$ 도 η 와 λ 의 함수이다. 따라서 식 (18)의 유용해가 존재하기 위해서는 계수매트릭스의 행렬식(determinant)이 0이 되어야 하며 이 때의 λ 값이 고유값이고 식 (18)의 $\{M_{\eta}^* \ M_{\eta\theta}^* \ Q_{\eta}^*\}_{(\theta)}$ 의 값을 결정하여 식 (16)에 대입하면 진동형(mode shape)을 구할 수 있다.

2.2 회전관성과 전단변형을 고려한 레일의 진동특성

Fig. 2의 (a)는 레일의 미소요소에 작용하는 전단력과 모멘트를 나타내며 (b)는 변위 및 각변위를 나타내고 있다. Fig. 2의 (a)에서 P 와 M 는 외부에서 작용하는 힘과 모멘트이다. 레일은 회전관성과 전단변형 효과를 고려하여 Timoshenko 보로 가정하면 각변위 ψ 와 처짐 y 에 관한 운동방정식은 아래와 같다.

$$EI(\partial^2\psi/\partial x^2) + k(\partial y/\partial x - \psi) - AG - I\rho(\partial^2\psi/\partial t^2) = 0 \tag{19}$$

$$\rho A(\partial^2 y/\partial t^2) - k(\partial^2 y/\partial x^2 - \partial\psi/\partial x) = 0 \tag{20}$$

여기서 E 는 레일의 탄성계수, G 는 전단계수, I 는 단면적의 면적관성모멘트, A 는 단면적, ρ 는 질량 밀도이고 k 는 단면에 따른 상수(shape factor)이다. 식 (19), (20)서 y 또는 ψ 를 소거하면 다음의 방정식이 얻어진다.

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(\rho I + \frac{EI\rho}{kG}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I \partial^4 y}{kG \partial t^4} = 0 \tag{21}$$

$$EI\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\rho I + \frac{EI\rho}{kG}\right)\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I \partial^4 \psi}{kG \partial t^4} = 0 \tag{22}$$

여기서 $y_{(x,t)} = Y_{(x)}e^{i\rho t}$, $\psi_{(x,t)} = \Psi_{(x)}e^{i\rho t}$, $\xi = x/L$ 이라 놓고 식 (19), (20), (21), (22)를 무차원화하

면 다음의 식을 얻는다.

$$s^2 \Psi'' - (1 - b^2 r^2 s^2) \Psi + Y'/L = 0 \tag{23}$$

$$Y'' + b^2 s^2 Y - L \Psi' = 0 \tag{24}$$

$$Y^{IV} + b^2(r^2 + s^2)Y'' - b^2(1 - b^2 r^2 s^2)Y = 0 \tag{25}$$

$$\Psi^{IV} + b^2(r^2 + s^2)\Psi'' - b^2(1 - b^2 r^2 s^2)\Psi = 0 \tag{26}$$

여기서 $b^2 = \rho AL^4 p^2 / EI$, $r^2 = I / AL^2$, $s^2 = EI / (kAGL^2)$ 이고 L 은 레일의 길이이며 p 는 레일의 고유진동수이다. 그리고 Y 와 Ψ 우측 위의 프라임(prime)은 ξ 에 관한 미분을 나타낸다. 또 $u = \{v^2 + 4b^2(-b^2 r^2 s^2)\}^{1/2}$, $v = b^2(r^2 + s^2)$ 이라고 놓으면 $u > v$ 인 경우 식 (25), (26)의 일반해는 아래와 같이 놓을 수 있다.

$$Y(\xi) = C_1 \cosh(\alpha\xi) + C_2 \sinh(\alpha\xi) + C_3 \cos(\beta\xi) + C_4 \sin(\beta\xi) \tag{27}$$

$$\Psi(\xi) = C'_1 \sinh(\alpha\xi) + C'_2 \cosh(\alpha\xi) + C'_3 \sin(\beta\xi) + C'_4 \cos(\beta\xi) \tag{28}$$

여기서

$$\alpha = \{(u - v)/2\}^{1/2}, \beta = \{(u + v)/2\}^{1/2}$$

이다. $u < v$ 인 경우 식 (25), (26)의 일반해는 다음과 같다.

$$Y(\xi) = D_1 \cos(\alpha'\xi) + iD_2 \sin(\alpha'\xi) + D_3 \cos(\beta\xi) + D_4 \sin(\beta\xi) \tag{29}$$

$$\Psi(\xi) = iD'_1 \sin(\alpha'\xi) + D'_2 \cos(\alpha'\xi) + D'_3 \sin(\beta\xi) + D'_4 \cos(\beta\xi) \tag{30}$$

여기서

$$\alpha' = \{(v - u)/2\}^{1/2}$$

이다. 식 (27), (28)을 식 (24)에 대입하면 아래와 같이 계수 C_1, C_2, C_3, C_4 와 C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 의 관계를 구할 수 있다.

$$C'_1 = \frac{n}{\alpha L} C_1, C'_2 = \frac{m}{\alpha L} C_2$$

$$C'_3 = -\frac{m}{\beta L} C_3, C'_4 = \frac{n}{\beta L} C_4 \tag{31}$$

여기서

$$m = \alpha^2 + s^2 b^2, n = \beta^2 - s^2 b^2$$

이다. 식 (29), (30)을 식 (24)에 대입하면 다음 관계를 얻는다.

$$D'_1 = D_1 m' / (\alpha' L), D'_2 = D_2 m' / (\alpha' L)$$

$$D'_3 = -D_3 n' / (\beta L), D'_4 = D_4 n' / (\beta L)$$

여기서

$$m' = -\alpha'^2 + s^2 b^2, n' = \beta^2 - s^2 b^2$$

이다. 끝단이 자유인 경우의 경계조건은 아래와 같

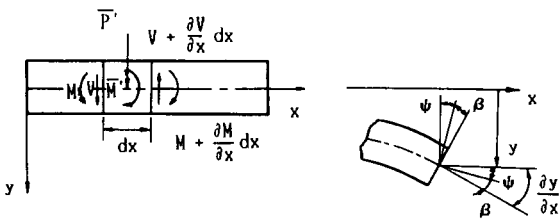


Fig. 2 Free body diagram of rail

다.

$$\Psi' = 0, Y' - L\Psi = 0 \quad (32)$$

$u > v$ 인 경우 양 끝단에서의 경계조건식 (32)를 식 (27), (28)에 적용하면 아래와 같이 진동수 방정식을 구할 수 있다.

$$2mnAB(1 - \cosh(\alpha)\cos(\beta)) + (m^2B^2 - n^2A^2)\sinh(\alpha)\sin(\beta) = 0 \quad (33)$$

여기서

$$A = (\alpha - m/\alpha), B = (\beta - n/\beta)$$

이다. 또 식 (33)을 만족할 때 식 (27), (28)의 계수를 결정하면 변위 및 각변위는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$Y(\xi) = N \left\{ \cosh(\alpha\xi) - \frac{nA \sinh(\alpha) - mB \sin(\beta)}{nA(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))} \sinh(\alpha\xi) + (m/n)\cos(\beta\xi) - \frac{nA \sinh(\alpha) - mB \sin(\beta)}{nB(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))} \sin(\beta\xi) \right\} \quad (34)$$

$$\Psi(\xi) = H \left\{ (m/\alpha)\sinh(\alpha\xi) - \frac{m(nA \sinh(\alpha) - mB \sin(\beta))}{\alpha nA(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))} \cosh(\alpha\xi) - (m/\beta)\sin(\beta\xi) + \frac{nA \sinh(\alpha) - mB \sin(\beta)}{\beta B(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))} \cos(\beta\xi) \right\} \quad (35)$$

여기서 $N = HL$ 의 관계가 있다.

$u < v$ 인 경우 식 (32)를 식 (29), (30)에 적용하면 아래와 같은 진동수방정식을 얻을 수 있다.

$$2m'n'A'B'(1 - \cos(\alpha')\cos(\beta')) + (n'^2A'^2 + m'^2B'^2)\sin(\alpha')\sin(\beta') = 0 \quad (36)$$

여기서

$$A' = \alpha' + m'/\alpha', B' = \beta' - n'/\beta'$$

이다. 또 식 (36)을 만족할 때 식 (29), (30)의 계수를 결정하면 변위 및 각변위는 아래와 같다.

$$Y(\xi) = N \left\{ \cos(\alpha'\xi) + \frac{n'A' \sin(\alpha') + m'B' \sin(\beta')}{n'A'(\cos(\alpha') - \cos(\beta'))} \sin(\alpha'\xi) + (m'/n')\cos(\beta'\xi) - \frac{n'A' \sin(\alpha') + m'B' \sin(\beta')}{n'B'(\cos(\alpha') - \cos(\beta'))} \sin(\beta'\xi) \right\} \quad (37)$$

$$\Psi(\xi) = H \left\{ m'/\alpha' \sin(\alpha'\xi) \right.$$

$$\left. + \frac{m'(n'A' \sin(\alpha') + m'B' \sin(\beta'))}{\alpha'n'A'(\cos(\alpha') - \cos(\beta'))} \cdot \cos(\alpha'\xi) - (m'/\beta')\sin(\beta'\xi) - \frac{n'A' \sin(\alpha') + m'B' \sin(\beta')}{\beta B'(\cos(\alpha') - \cos(\beta'))} \cdot \cos(\beta'\xi) \right\} \quad (38)$$

여기서 $N = HL$ 이다.

2.3 차륜에 힘과 모멘트가 작용했을 때의 연성운동방정식

차륜과 철로를 연성하고 있는 크리프 힘과 크리프 모멘트는 비선형성을 가지는 매우 복잡한 관계이나 본 연구에서는 차륜과 철로의 접촉점의 상대 속도 및 상대각속도를 일정한 크기로 가정하면 Kalker의 선형 크리이프 이론⁽¹¹⁾에 의하여 병진 및 비틀림스프링으로 연성시킬 수 있으며⁽⁴⁾ Fig. 3과 같이 차륜에는 외력 \bar{P} 와 모멘트 $\bar{M}_{r\theta}$ 가 작용하고 레일에는 외력 \bar{P}' 와 모멘트 \bar{M}' 가 작용한다. 따라서 Mindlin의 원판으로 가정한 차륜의 횡방향 운동방정식은 식 (1), (2), (3)으로부터 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = \frac{\rho h^3 \partial^2 \psi_r}{12 \partial t^2} \quad (39)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta}{r\partial\theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} - Q_\theta + \bar{M}_{r\theta} = \frac{\rho h^3 \partial^2 \psi_\theta}{12 \partial t^2} \quad (40)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{r\partial\theta} + \frac{Q_r}{r} + \bar{P} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (41)$$

여기서 차륜의 횡방향 변위 w 및 각변위 ψ_r, ψ_θ 등은 다음과 같이 고유함수들의 합으로 주어진다.

$$w = \sum_{ms} C_{ms} w_{ms} e^{i\omega t}$$

$$\psi_r = \sum_{ms} C_{ms} \psi_{r,ms} e^{i\omega t}$$

$$\psi_\theta = \sum_{ms} C_{ms} \psi_{\theta,ms} e^{i\omega t}$$

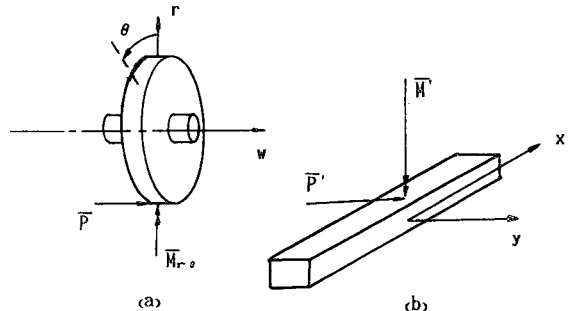


Fig. 3 Free body diagram of coupled system

$$M_r = \sum_{ms} C_{ms} M_{r,ms} e^{i\omega t} \quad (42)$$

$$M_{r\theta} = \sum_{ms} C_{ms} M_{r\theta,ms} e^{i\omega t}$$

$$M_\theta = \sum_{ms} C_{ms} M_{\theta,ms} e^{i\omega t}$$

$$Q_r = \sum_{ms} C_{ms} Q_{r,ms} e^{i\omega t}$$

$$Q_\theta = \sum_{ms} C_{ms} Q_{\theta,ms} e^{i\omega t}$$

식 (42) 들을 식 (39), (40), (41)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sum_{ms} C_{ms} M_{r,ms}}{\partial r} + \frac{\partial \sum_{ms} C_{ms} M_{r\theta,ms}}{r \partial \theta} \\ & + \frac{C_{ms} M_{r,ms} - \sum_{ms} C_{ms} M_{\theta,ms}}{r} - \sum_{ms} C_{ms} Q_{r,ms} \\ & = -\frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \sum_{ms} C_{ms} \psi_{r,ms} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sum_{ms} C_{ms} M_{r\theta,ms}}{\partial r} + \frac{\partial \sum_{ms} C_{ms} M_{\theta,ms}}{r \partial \theta} \\ & + 2 \frac{\sum_{ms} C_{ms} M_{r\theta,ms}}{r} - \sum_{ms} C_{ms} Q_{\theta,ms} + \bar{M}_{r\theta} \\ & = -\frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \sum_{ms} C_{ms} \psi_{\theta,ms} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sum_{ms} C_{ms} Q_{r,ms}}{\partial r} + \frac{\partial \sum_{ms} C_{ms} Q_{\theta,ms}}{r \partial \theta} + \sum_{ms} \frac{C_{ms} Q_{r,ms}}{r} + \bar{P} \\ & = -\rho h \omega^2 \sum_{ms} C_{ms} w_{ms} \end{aligned} \quad (45)$$

식 (42)으로 표시되는 고유함수들은 $\bar{P} = \bar{M}_{r\theta} = 0$ 인 제차방정식도 만족시켜야 하므로 식 (43), (44), (45)은 다음과 같은 꼴로 요약할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{r,ms}}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta,ms}}{r \partial \theta} + \frac{M_{r,ms} - M_{\theta,ms}}{r} - Q_{r,ms} \\ & = -\frac{\rho h^3}{12} \omega_{ms}^2 \psi_{r,ms} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{r\theta,ms}}{\partial r} + \frac{\partial M_{\theta,ms}}{r \partial \theta} + \frac{2M_{r\theta,ms}}{r} - Q_{\theta,ms} \\ & = -\frac{\rho h^3}{12} \omega_{ms}^2 \psi_{\theta,ms} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\frac{\partial Q_{r,ms}}{\partial r} + \frac{\partial Q_{\theta,ms}}{r \partial \theta} + \frac{Q_{r,ms}}{r} = -\rho h \omega_{ms}^2 w_{ms} \quad (48)$$

여기서 ω_{ms} 는 차륜의 고유원진동수이다. 식 (46), (47), (48)을 식 (43), (44), (45)에 대입하면

$$\sum_{ms} (\rho h^3 / 12) (\omega_{ms}^2 - \omega^2) C_{ms} \psi_{r,ms} = 0 \quad (49)$$

$$\sum_{ms} (\rho h^3 / 12) (\omega_{ms}^2 - \omega^2) C_{ms} \psi_{\theta,ms} = \bar{M}_{r\theta} \quad (50)$$

$$\sum_{ms} \rho h (\omega_{ms}^2 - \omega^2) C_{ms} w_{ms} = \bar{P} \quad (51)$$

의 관계가 된다. 이들 고유함수들은 다음과 같은 정규직교(normal orthogonality) 관계를 가지고 있다.

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_b^a \rho \{ (h^3/12) \psi_{r,ij} \psi_{r,kl} + (h^3/12) \psi_{\theta,ij} \psi_{\theta,kl} \\ & + h w_{ij} w_{kl} \} r dr d\theta = \delta_{ij,kl} \end{aligned} \quad (52)$$

여기서 a, b 는 차륜의 외, 내경이고 $\delta_{ij,kl}$ 는 kronecker delta이며 다음의 관계가 있다.

$$\begin{aligned} & \delta_{ij,kl} = 1 \text{ for } i=k \text{ and } j=1 \\ & 0 \text{ for } i \neq k \text{ or } j \neq 1 \end{aligned}$$

식 (49), (50), (51)에 $\psi_{r,ms}, \psi_{\theta,ms}, w_{ms}$ 을 각각 곱한 후 합하여 차륜의 표면에 대하여 적분하면 식 (52)에 의하여 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} C_{ms} (\omega_{ms}^2 - \omega^2) &= \int_0^{2\pi} \int_b^a (\bar{P} w_{ms} \\ & + \bar{M}_{r\theta} \psi_{\theta,ms}) r dr d\theta \end{aligned} \quad (53)$$

또 외력 \bar{P} 와 모멘트 $\bar{M}_{r\theta}$ 는 접촉점에만 작용하므로 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P_{10} \delta(r - r_0) \delta\{r(\theta - \theta_0)\} \\ \bar{M}_{r\theta} &= M_{r\theta,10} \delta(r - r_0) \delta\{r(\theta - \theta_0)\} \end{aligned} \quad (54)$$

여기서 δ 는 Dirac delta function이다. 식 (54)를 식 (53)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} C_{ms} &= \{ P_{10} w_{ms}(r_0, \theta_0) \\ & + M_{r\theta,10} \psi_{\theta,ms}(r_0, \theta_0) \} / (\omega_{ms}^2 - \omega^2) \end{aligned} \quad (55)$$

따라서 식 (55)를 식 (42)에 대입하면 변위 및 각 변위는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} w &= \sum_{ms} \{ (P_{10} w_{ms}(r, \theta) w_{ms}(r_0, \theta_0) + M_{r\theta,10} w_{ms} \\ & (r, \theta) \psi_{\theta,ms}(r_0, \theta_0) / (\omega_{ms}^2 - \omega^2) \} \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \psi_r &= \sum_{ms} \{ (P_{10} \psi_{r,ms}(r, \theta) w_{ms}(r_0, \theta_0) \\ & + M_{r\theta,10} \psi_{r,ms}(r, \theta) \psi_{\theta,ms}(r_0, \theta_0) / \\ & (\omega_{ms}^2 - \omega^2) \} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \psi_\theta &= \sum_{ms} \{ (P_{10} \psi_{\theta,ms}(r, \theta) w_{ms}(r_0, \theta_0) \\ & + M_{r\theta,10} \psi_{\theta,ms}(r, \theta) \psi_{\theta,ms}(r_0, \theta_0) / \\ & (\omega_{ms}^2 - \omega^2) \} \end{aligned} \quad (58)$$

Fig. 2와 같은 레일을 모델링한 보에서 전단력을 무시하였을 때의 변위곡선의 경사각을 ψ , 중립축의 전단각을 β 라고 표시하면 변위곡선의 경사각은 다음과 같이 된다.

$$\partial y / \partial x = \psi + \beta \quad (59)$$

굽힘모멘트 M 과 전단력 V 는 다음 식으로 주어진다.

$$M = EI (\partial \psi / \partial x) \quad (60)$$

$$V = -k' \beta A G = -k' (\partial y / \partial x - \psi) A G \quad (61)$$

레일을 모델링한 보의 회전과 병진운동에 관한 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\partial M / \partial x - V + \bar{M}' = \rho I (\partial^2 \psi / \partial t^2) \quad (62)$$

$$-\partial V/\partial x + \bar{P}' = \rho A (\partial^2 y/\partial t^2) \quad (63)$$

여기서 \bar{M}' 과 \bar{P}' 는 접촉점에만 작용하므로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{P}' &= P_{20}\delta(x-x_0) \\ \bar{M}' &= M_{20}\delta(x-x_0) \end{aligned} \quad (64)$$

여기서 M , V , ψ , y 를 레일의 고유함수의 항으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M &= \sum_m C_m M_m e^{i\omega t} \\ V &= \sum_m C_m V_m e^{i\omega t} \\ \psi &= \sum_m C_m \psi_m e^{i\omega t} \\ y &= \sum_m C_m y_m e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (65)$$

이 고유함수는 $\bar{P}' = \bar{M}' = 0$ 인 식 (62), (63)의 제차 방정식을 만족시키므로 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \partial M_m/\partial x - V_m &= -\rho I \omega_m^2 \psi_m \\ -\partial V_m/\partial x &= -\rho A \omega_m^2 y_m \end{aligned} \quad (66)$$

여기서 ω_m 는 레일의 고유진동수이다. 또한 레일의 고유함수는 다음의 정규직교관계를 갖고 있다. 즉

$$\int_0^L \rho (I \psi_i \psi_j + A y_i y_j) dx = \delta_{ij} \quad (67)$$

식 (65)를 식 (62), (63)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_m C_m M_m}{\partial x} - \sum_m C_m V_m + \bar{M}' &= -\rho I \omega^2 \sum_m C_m \psi_m \\ \frac{-\partial \sum_m C_m V_m}{\partial x} + \bar{P}' &= -\rho A \omega^2 \sum_m C_m y_m \end{aligned} \quad (68)$$

또한 식 (66)을 식 (68)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \sum_m \rho I (\omega_m^2 - \omega^2) C_m \psi_m &= \bar{M}' \\ \sum_m \rho A (\omega_m^2 - \omega^2) C_m y_m &= \bar{P}' \end{aligned} \quad (69)$$

식 (69)에 ψ_m 과 y_m 를 각각 곱하고 합하여 레일의 전길이에 대하여 적분하면 식 (67)에 의하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$(\omega_m^2 - \omega^2) C_m = \int_0^L \{ \bar{P}' y_m(x) + \bar{M}' \psi_m(x) \} dx \quad (70)$$

위 식에 식 (64)을 대입하면 다음 관계식을 얻는다.

$$C_m = \{ P_{20} y_m(x_0) + M_{20} \psi_m(x_0) \} / (\omega_m^2 - \omega^2) \quad (71)$$

식 (71)을 식 (65)에 대입하면 레일의 변위 및 각 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y &= \sum_m \{ \{ P_{20} y_m(x) y_m(x_0) + M_{20} y_m(x) \psi_m(x_0) \} \\ &\quad / (\omega_m^2 - \omega^2) \} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_m \{ \{ P_{20} \psi_m(x) y_m(x_0) + M_{20} \psi_m(x) \psi(x_0) \} \\ &\quad / (\omega_m^2 - \omega^2) \} \end{aligned} \quad (73)$$

차륜과 레일이 스프링상수 k_r , k_θ 인 병진스프링과 비틀림스프링으로 연결되어 있다고 하면 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} P_{10} &= k_r \{ y(x_0) - w(r_0, \theta_0) \} \\ P_{20} &= k_r \{ w(r_0, \theta_0) - y(x_0) \} \\ M_{10} &= -k_\theta \{ \psi(x_0) + \psi_\theta(r_0, \theta_0) \} \\ M_{20} &= -k_\theta \{ \psi_\theta(r_0, \theta_0) + \psi(x_0) \} \end{aligned} \quad (74)$$

식 (74)를 식 (56), (58), (72), (73)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 연성된 계의 고유진동수를 구할 수 있는 진동수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(r_0, \theta_0) \\ y(x_0) \\ \psi_\theta(r_0, \theta_0) \\ \psi(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

여기서 식 (75)의 행렬의 요소는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} G_{11} &= 1 + k_r \sum_m (w_{ms}(r_0, \theta_0)^2 / \Omega_{ms}) \\ G_{12} &= -k_r \sum_m (w_{ms}(r_0, \theta_0)^2 / \Omega_{ms}) \\ G_{13} &= k_\theta \sum_m (w_{ms}(r_0, \theta_0) \psi_{\theta,ms}(r_0, \theta_0) / \Omega_{ms}) \\ G_{14} &= G_{13} \\ G_{21} &= -k_r \sum_m (y_m(x_0)^2 / \Omega_m) \\ G_{22} &= 1 - G_{21} \\ G_{23} &= k_\theta \sum_m (\psi_m(x_0) y_m(x_0) / \Omega_m) \\ G_{24} &= G_{23} \\ G_{31} &= k_r \sum_m (\psi_{\theta,ms}(r_0, \theta_0) w_{ms}(r_0, \theta_0) / \Omega_{ms}) \\ G_{32} &= -G_{31} \\ G_{33} &= 1 + k_\theta \sum_m (\psi_{\theta,ms}(r_0, \theta_0)^2 / \Omega_{ms}) \\ G_{34} &= G_{33} - 1 \\ G_{41} &= -k_r \sum_m (\psi_m(x_0) y_m(x_0) / \Omega_m) \\ G_{42} &= -G_{41} \\ G_{43} &= k_\theta \sum_m (\psi_m(x_0)^2 / \Omega_m) \\ G_{44} &= 1 + G_{43} \\ \Omega_{ms} &= \omega_{ms}^2 - \omega^2, \quad \Omega_m = \omega_m^2 - \omega^2 \end{aligned}$$

3. 수치해석 및 고찰

내경고정, 외경자유인 Mindlin plate로 가정한 차륜을 Transfer matrix method를 사용하여 해석

Table 1 Substitutional value used for numerical analysis

Wheel	Rail
h 0.015m	L 0.3m
a 0.075m	I $5.625 \times 10^{-9} \text{m}^4$
b 0.0225m	ρ 7857.81kg/m ³
ρ 7857.81kg/m ³	E $2.06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$
E $2.06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$	ν 0.3
ν 0.3	A $3 \times 10^{-4} \text{m}^2$
	k 0.667

하였다. 식 (14)는 Runge-Kutta-Gill method를 사용하여 수치적분하였고 식 (18)의 행렬식에서 고유값과 고유벡터를 구하여 식 (16), (9)를 이용하여 변위 및 각변위를 구하였다. 또한 양단이 자유인 Timoshenko beam으로 가정한 레일은 식 (33)이나 식 (36)을 만족하는 고유값과 정규진동형을 구하였다. 수치해석에 사용한 차륜과 레일의 제원은 Table 1에 표시하였으며 해석하여 얻은 차륜과 레일의 고유진동수는 Table 2에 표시하였다. 연성진동의 해석에는 70개의 차륜의 정규진동형과 9개의 레일의 정규진동형을 식 (75)의 계수매트릭스에 대입하여 연성된 계의 고유진동수를 구하였다. 차륜과 레일 사이의 접촉력을 형상화한 병진스프링과 비틀림스프링 상수를 매개변수로 하여 진동특성을 조사하였다. Table 3과 4의 (a)는 두 개의 스프링에 의하여 연성된 경우의 고유진동수이며 (b)는 병

Table 2 Natural frequencies of individual wheel and rail

Order	Wheel (m, s)	Rail (i)
1	3809.89(1, 0)	868.46(2)
2	3954.09(0, 0)	2349.12(3)
3	4444.55(2, 0)	4485.00(4)
4	7594.12(3, 0)	7173.93(5)
5	12258.40(4, 0)	10319.63(6)
6	17699.34(5, 0)	13831.69(7)
7	19243.15(0, 1)	17631.58(8)
8	20180.03(1, 1)	21653.99(9)
9	23102.21(2, 1)	25846.08(10)
10	23606.80(6, 0)	
11	27959.82(3, 1)	
12	34262.46(4, 1)	
13	41379.61(5, 1)	
14	44954.86(0, 2)	

진스프링만으로 연성된 경우의 고유진동수이다. 그리고 (c)는 비틀림스프링만으로 연성된 경우의 고유진동수이다.

Table 3과 4에서 k_r 과 k_θ 로 연성된 계의 고유진동수는 k_r 만으로 연성된 경우와 k_θ 만으로 연성된 경우의 고유진동수를 성분으로 합을 알 수 있었다. Table 5에 스프링상수의 여러 값에 대하여 고유진동수의 분포를 표시하였고 Fig. 4와 5에 횡축을 고유진동수의 차수로 하여 그래프로 표시하

Table 3 Natural frequencies of coupled system

Order	(a)	(b)	(c)
	$k_r = 7.93 \times 10^5 \text{ (kN/m)}$ $k_\theta = 4 \text{ (kN-m/rad)}$	$k_r = 7.93 \times 10^5 \text{ (kN/m)}$ $k_\theta = 0 \text{ (kN-m/rad)}$	$k_r = 0 \text{ (kN/m)}$ $k_\theta = 4 \text{ (kN-m/rad)}$
1	1993.43	1992.87	
2	2841.48		2837.80
3	3884.26	3854.42	3852.49
4	4262.85	4260.66	
5	4827.41		4832.74
6	6958.17	6914.18	
7	8222.62		8568.34
8	9189.44	9026.50	
9	11414.07	11405.06	
10	14641.33		14690.55
11	15828.77	15663.57	

Table 4 Natural frequencies of coupled system

Order	(a)	(b)	(c)
	$k_r = 2.64 \times 10^5$ (kN/m) $k_\theta = 2$ (kN-m/rad)	$k_r = 2.64 \times 10^5$ (kN/m) $k_\theta = 0$ (kN-m/rad)	$k_r = 0$ (kN/m) $k_\theta = 2$ (kN-m/rad)
1	1990.76	1990.28	
2	2716.97		2715.07
3	3876.42	3854.40	3840.98
4	4262.23	4260.43	
5	4700.75		4702.76
6	6946.72	6906.95	
7	7806.98		8076.50
8	9080.68	9012.33	
9	11402.45	11397.29	
10	14299.74		14310.95
11	15694.13	15621.14	

Table 5 Natural frequencies of coupled system

Order	(a)	(b)	(c)	(d)
	$k_r = 7.93 \times 10^3$ $k_\theta = 4$	$k_r = 7.93$ $k_\theta = 4$	$k_r = 7.93 \times 10^5$ $k_\theta = 100$	$k_r = 7.93 \times 10^5$ $k_\theta = 1 \times 10^5$
1	1876.18	954.95	1993.52	1993.53
2	2840.87	2837.98	3057.51	3069.73
3	3883.75	3862.79	3899.12	3900.04
4	4251.41	3982.54	4263.32	4263.35
5	4826.88	4511.43	5108.44	5126.62
6	6537.13	4833.37	6937.74	6963.99
7	7928.13	7467.08	8817.14	8829.40
8	8840.17	8571.04	10260.78	10372.12
9	11035.17	10330.08	11437.71	11441.60
10	13688.31	12269.32	15355.52	15375.70
11	14733.12	14690.78	16666.29	16736.32

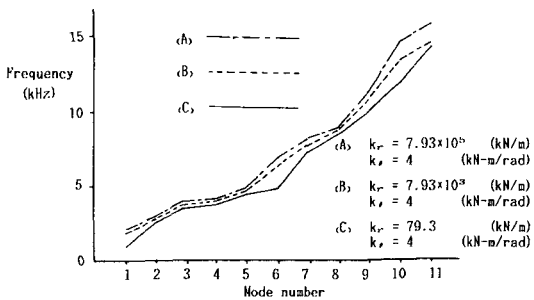


Fig. 4 The distribution of natural frequencies for $k_\theta = 4$ (kN-m/rad)

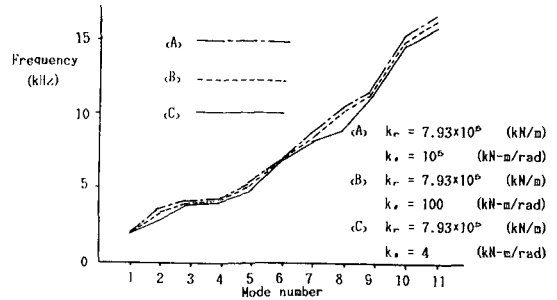


Fig. 5 The distribution of natural frequencies for $k_r = 7.93 \times 10^5$ (kN/m)

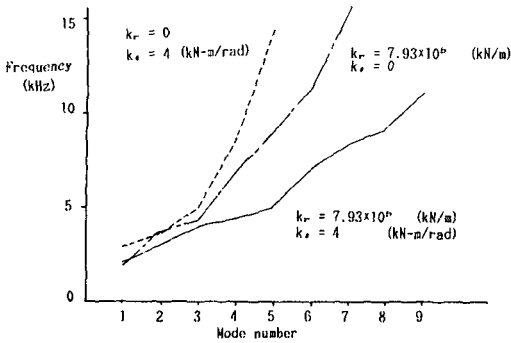


Fig. 6 The distribution of natural frequencies for 3-type of coupling

였다. 그 결과 k_r 과 k_s 로 연성된 계에 있어서 연성된 고유진동수는 연성된 크기에 관계없이 대략 차수에 관하여 2차 함수적으로 분포하며 각 스프링상수의 증가에 따라 그 스프링에 상응하는 고유진동수가 증가함을 알았다. 또 Fig. 6에 하나의 스프링으로 연성된 경우와 두 가지 스프링으로 연성된 경우의 고유진동수의 분포를 표시하였으며 연성된 고유진동수는 3차까지는 하나의 스프링만으로 연성된 경우에 근접하지만 고차고유진동수는 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

4. 실험 및 고찰

본 논문의 이론과 수치해의 타당성을 검증하기 위하여 Fig. 7과 같은 실험장치와 Fig. 8과 같은 환형원관과 빔을 사용하여 차륜과 레일의 연성된 고유진동수를 측정하였다. 본 논문에서 구한 연성진동수를 측정하기 위하여 차륜과 레일 사이는 병진 스프링과 비틀림스프링을 형상화한 볼트는 상당 병진스프링상수 $k_r, eq = \frac{EA}{L}$, 상당 비틀림스프링상수 $k_s, eq = \frac{GI_p}{L}$ (I_p 는 볼트단면의 극관성모멘트)로 표시할 수 있으므로 수치해석에서 사용한 k_r, k_s 에

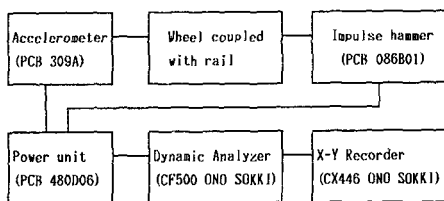


Fig. 7 Schematic diagram of measuring system

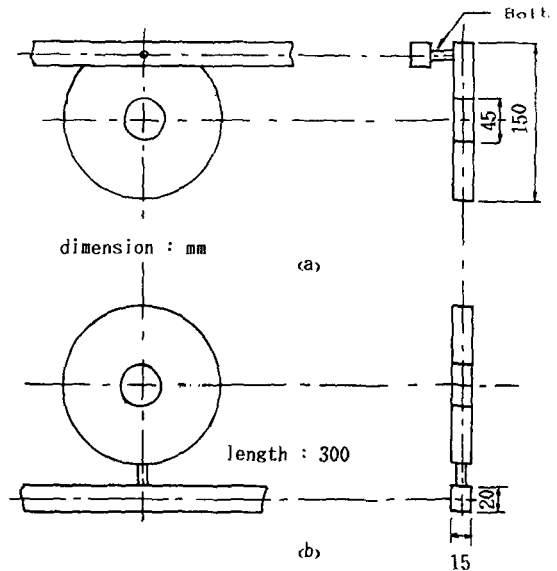


Fig. 8 Specimens of experiment
(a) The case of creep force only considered
(b) The case of creep moment only considered

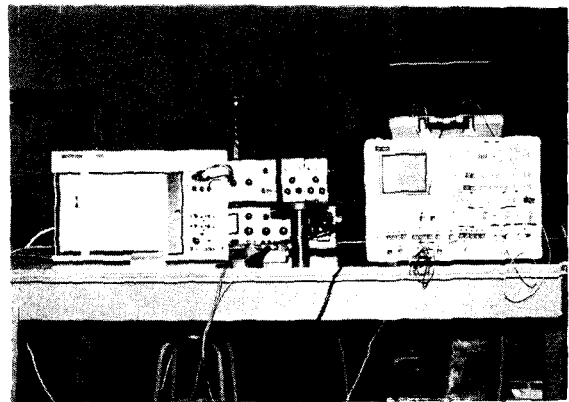


Fig. 9 Experimental set-up

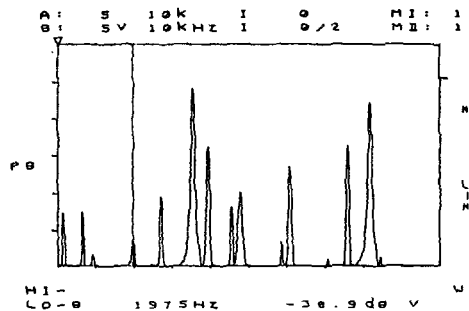


Fig. 10 Frequency spectrums of a wheel coupled with rail ($k_r = 2.64 \times 10^6 \text{ kN/m}$, $k_s = 2 \text{ kN-m/rad}$)

Table 6 Comprison of theory with experiment for $k_r=2.64 \times 10^5$ (kN/m), $k_\theta=2$ (kN·m/rad)

Order	theoretical values	experimental values
1	1990.76	1975
2	2716.97	2700
3	3876.42	3550
4	4262.23	3950
5	4700.75	4550
6	6946.72	6075
7	7806.98	7575
8	9080.68	8175

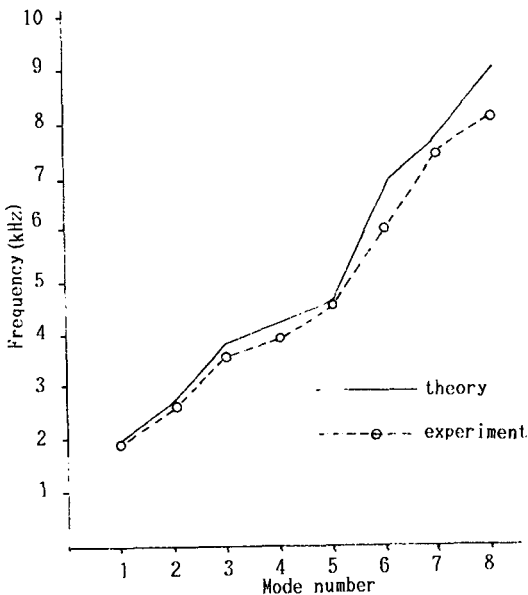


Fig. 11 Comparison of theory with experiment for $k_r=2.64 \times 10^5$ (kN/m), $k_\theta=2$ (kN·m/rad)

맞도록 길이를 조절하여 체결하였다. Fig. 9은 실험장치를 나타낸다.

Fig. 10은 차륜과 레일이 병진스프링과 비틀림스프링에 의해서 체결된 경우의 진동수 특성을 보여 준다. Table 6에 수치해석에 의한 이론값과 실험값과의 비교를 나타내었고 Fig. 11에 그래프로 표시하였다. 측정된 연성된 고유진동수는 3차 진동수까지는 1% 내의 오차를 보였으며 고차로 갈수록 10% 내외의 오차를 보이고 있다. 여기서 이론값과 실험값과의 차이점은 환형원판의 불완전한 내경고정과 환형원판과 빔을 본 이론에서 적용한 외원주

끝단에 체결시킬 수 없었기 때문이며, 또한 감쇠의 영향을 고려하지 않은 까닭에 발생한 오차라고 사료된다.

5. 결 론

차륜과 레일의 연성진동의 특성을 연구하는 기초적인 문제로서 그 접촉점에 크리프 힘과 크리프 모멘트가 작용하는 경우 차륜을 Mindlin 원판으로, 레일을 Timoshenko 보로 각각 가정하여 이론해석과 수치해석 및 실험을 통하여 그 진동특성을 연구하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 차륜과 레일이 크리프 힘과 크리프 모멘트로 연성된 고유진동수는 크리프 힘이나 크리프 모멘트 중 하나만으로 연성된 경우의 고유진동수의 성분으로 구성되어 있다.
- (2) 차륜과 레일의 연성된 고유진동수는 대략 차수에 관하여 2차 함수적으로 분포한다.
- (3) 차륜과 레일이 크리프 힘이나 크리프 모멘트로 연성된 고유진동수는 1~3차까지는 크리프 힘이나 크리프 모멘트 중 하나만으로 연성된 경우의 고유진동수와 큰 차이가 없으나 그 이상의 고차에서는 많은 차이가 있다.
- (4) 비선형 특성을 가지고 있는 크리프 힘과 모멘트에 의한 연성진동의 해석은 장차의 연구과제가 될 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 연구지원을 받아(과제번호 862-0910-017-2) 이루어졌으며 관계자 여러분께 깊이 감사하는 바이다.

참 고 문 헌

- (1) Irretier, H., 1983, "The Natural and Forced Vibrations of a Wheel Disc", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 87, No. 2, pp. 161~177.
- (2) Sato, S. and Matsuhisa, H., 1978, "Study on the Mechanism of Train Noise and It's Counter Measure Part I", *Bulletin of JSME* Vol. 21, pp. 1475~1481.
- (3) Sato, S. and Matsuhisa, H., 1979, "Study on the Mechanism of Train Noise and It's Counter measure Part II", *Bulletin of JSME* Vol. 22, pp. 1626~1631.
- (4) Sato, S. and Matsuhisa, H., 1981, "Study on the

- Mechanism of Train Noise and It's Counter Measure Part III", Bulletin of JSME Vol. 24", No. 191, pp. 849~853.
- (5) 김광식, 박문태, 1986, "차륜과 철로의 연성진동에 관한 연구: 차륜의 동특성", 한양대학교 산업과학논문집, No. 23.
- (6) 김광식, 박문태, 1987, "차륜과 철로의 연성진동에 관한 연구: 계단진 두께를 갖는 차륜의 동특성", 대한기계학회논문집, Vol. 11, No. 1.
- (7) Kim, K.S. and Park, M.T., 1987, "Dynamic Characteristics of Trainwheel under in plane Compressive Stress", Proceedings of th KSME/JSME Vibration Conference '87, August 25~27.
- (8) 김광식, 김봉수, 1987, "유한요소법에 의한 차륜의 동특성에 관한 연구", 한양대학교 석사학위논문.
- (9) Mindlin, R.D. and Deresiewicz, H., 1954, "Thickness Shear and Flexural Vibrations of a Circular Disk", Journal of Applied Physics, Vol. 25, No. 10, pp. 1329~1332.
- (10) Irie, T., Yamada, G. and Aomura, S., 1979, "Free Vibration of a Mindlin Annular Plate of Varying Thickness", Journal of Sound and Vibration, Vol. 66, No. 2, pp. 187~197.
- (11) Kalker, J.J., 1967, "On the rolling contact of Two Elastic Bodies in the Presence of Dry Friction", Thesis. Delft.