

<論 文>

작은 탄성 변형률 하의 고정-자유 지지된 스트립과 보의 변형

호 광 수* · 박 기 철* · 임 세 영**

(1989년 3월 27일 접수)

Deformations of Cantilever Strips and Beams with Small Elastic Strains

Kwang Soo Ho, Kee Cheol Park and Seyoung Im

Key Words: Slender Elastic Body(세장 탄성체), Beams and Strips(보와 스트립), Small Strains(작은 변형률), Large Rotations(큰회전), Local Equilibrium(국부평형), Overall Equilibrium(전체평형), Technical Theories(기술적 이론)

Abstract

Elastic deformations of an infinitely long strip and a beam loaded by uniform pressure upon their upper surfaces, with the fixed-free end condition, are considered within the range of small strains. All local governing equations are satisfied up to first order in strains, and to take into account the higher order terms neglected in the local governing equations, the overall equilibrium is imposed exactly up to the leading order. The success of the approach relies upon the semi-inverse method and the decomposition of deformations in which the classical linear theory guides the solution. The solution bridges the gap between the two extremes-the classical solutions valid only for infinitesimal deformations and the solutions from the technical theories for deformations with large rotations. The solutions may be used to confirm the technical theories and to verify numerical solutions obtained from finite element analysis.

기 호 설 명

A	: 보의 단면	n_i	: 기준상태에서의 단위 법선 벡터
a	: 스트립 두께의 절반	p	: 압력
$B(x_i)$: 변형전의 상태	r_{ik}	: 회전텐서(rotation tensor)
$B^*(y_i)$: 변형상태	S_i	: 변형체 빈칸 표면중 면력이 기술되어 있는 부분
C_{ijkl}	: 탄성강성계수	s_{ik}	: 우신장 텐서(right stretch tensor)
C_{ik}	: Cauchy-Green의 변형텐서	S	: 단면에 작용하는 전단력
D	: 굽힘강성	T	: 단면에 작용하는 축방향력
E	: Young 계수	T_{ik}	: 공칭응력 텐서(nominal stress tensor)
e_{ik}	: Green 변형률	W	: 보의 단위길이당 하중
I	: 단면 2차 모멘트	W^0	: 단위기준상태 부피당 변형률 에너지
k	: 하중변수	$X(z), Z(z)$: 변형후 중심선의 y_1, y_3 좌표
M	: 단면에 작용하는 굽힘 모멘트	x_i	: 변형전의 상태에서 질점의 위치를 나타내는 직교좌표
		y_i	: 변형후의 상태에서 질점의 위치를 나타

*한국과학기술원 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

	내는 직교좌표
α, β	: 하첨자 1, 2
ϵ	: 대표적인 변형률의 크기
σ_{ik}	: 제 2 Piola-Kirchhoff 응력 텐서 (2-nd Piola-Kirchhoff stress tensor)
δ_{ik}	: Kronecker delta
Γ_{jk}^i	: Christoffel 기호
λ	: Lamé 상수
μ	: 전단계수
ν	: Poisson 비
$\theta(z)$: 중심선의 회전각
∂A	: 보 단면의 경계
$\chi(x, y)$: 휨 함수 (flexure function)
i, j, k, l, m, n	: 하첨자 1, 2, 3
Comma (,)	: 편미분

1. 서 론

가느다란 봉과 같은 세장 탄성체 (slender elastic body)는 변형률은 작지만 회전이나 처짐이 큰 거동을 보이게 된다. 고전 선형 탄성론은 변형률 및 회전이 작은 경우의 거동을 다루게 되므로 세장 탄성체를 해석하는데 직접적으로 이용될 수 없다. 따라서 탄성학의 일반적인 3차원 방정식들보다는 변형의 기하학적 특성과 전체에 걸친 평형방정식에 주로 의존하는 기술적 이론 (technical theories)을 사용하게 된다.

1859년에 Kirchhoff는 변위와 회전이 작지 않은 가느다란 봉의 굽힘과 비틀림에 대해 운동학적인 접근방법 (kinematical approach)을 제시하였고, Love는 봉의 변형에 관한 보다 엄밀한 해석을 통해서 봉에 작용하는 모멘트와와 곡률, 비틀림률의 관계를 얻었다⁽¹⁾. 그러나 세장 탄성체의 변형을 보다 체계적으로 일관성 있게 해석하기 위해서는 유한탄성론 (theory of finite elasticity)에 근거한 접근이 바람직하다. 이와 같이 엄밀한 탄성론적 접근 방식으로 Parker⁽²⁻⁴⁾는 가느다란 봉의 변형에 있어서 변형장 (deformation field)의 축방향 변화율이 횡방향 변화율에 비해 그 크기가 한차 높다는 가정 하에 변형률의 크기를 도입한 점근 전개법 (asymptotic expansion)과 함께 유한탄성론을 사용하는 접근방법을 취하였다. 그러나 이와 같은 접근방식은 세장비가 작은 굽은 봉에는 유효하지 못하다.

세장비에 대한 가정 없이 봉의 변형을 해석하기 위해서는 모든 지배방정식들을 일관성 있게 변형률에 관한 제일차항까지 살펴보아야 한다. 이와 같은 이론은 Shield⁽⁵⁾에 의해 제안되었는데, 이 이론에서 변형률은 응력-변형률 관계식에서 이차적인 크기치 (second order)의 항들이 무시될 수 있도록 변형률은 충분히 작아야 하지만 변위나 회전의 크기에 대한 제한은 없게 된다. 따라서 이와 같이 얻어진 해는 회전의 크기에 대한 제한이 없으므로, 미소회전을 갖는 변형에 유효한 고전 선형 탄성 해와 작은 변형률 하에서 큰 회전을 갖는 변형 문제에 대한 기술적 이론에 의한 해 사이의 불연속성을 극복하여 두 해 사이의 가교 역할을 한다. 이 이론에서 변형은 도심에 상대적인 단면의 변형 (distortion)을 나타내는 작은 변위와 단면의 회전 그리고 병진변형으로 분해된다. 이 때 작은 변위의 선택은 같은 문제에 대한 St. Venant의 고전 선형탄성 해로부터 적절히 이루어진다. 그리고 변형률의 대표적인 측정치인 ϵ 의 크기치 즉, $O(\epsilon)$ 까지 변형률과 응력을 구하기 위하여 유한탄성론이 사용된다. 적합조건, 국부평형방정식 (local equilibrium equation) 그리고 경계조건은 $O(\epsilon)$ 까지 만족시키게 된다. 이와 같이 국부방정식에서 생략되는 고차항들 (high order terms)은 구조물의 크기가 어느 주어진 방향으로 아주 커지는 경우 전체적인 평형에 무시할 수 없는 영향을 미치게 되므로 전체평형방정식 (overall equilibrium equation)을 세우게 된다. 이와 같은 전체 평형방정식으로부터 병진변형에 해당하는 중심선의 변형 상태를 구할 수 있다. 가장 간단한 응용 예로서는 봉의 비틀림과 자유단에서 단면의 주축방향으로 하중을 받는 외팔보의 굽힘문제가 참고문헌 (5)에서 다루었으며, 이후 집중력을 받는 3차원 외팔보와 자중을 받는 2차원 외팔보 문제⁽⁶⁾ 및 일정 압력 하에서 양단지지된 2차원 스트립 (strip)과 주위가 지지된 원형 평판 문제등⁽⁷⁾에 대한 해가 보고되어 있다.

본 논문에서는 윗면에 균일한 압력을 받는 외팔보의 굽힘 변형과 고정-자유 지지된 무한길이 스트립의 폭 방향 굽힘변형을 위에 언급된 이론을 적용하여 살펴보고자 한다. 먼저 기본 지배방정식들을 요약하여 변형률의 1차항까지 나타내며 각 경우에 대해 변형을 중심선에 상대적인 단면의 변위와 단면의 회전 그리고 병진을 나타내는 도심의 변위로 분해하고 도심에 상대적인 변위는 Michell에 의한

평판의 해⁽¹⁾와 St. Venant에 의한 봉의 해를⁽¹⁾ 이 용한다. 가정된 변위장으로부터 응력을 구한 다음 적절한 조건 하에서 국부평형방정식을 확인하고 단면에 작용하는 모멘트 관계식을 구하여 전체평형방정식을 유도한다. 또한 이로부터 각 단면의 회전과 중심선의 변위가 구해질 수 있음을 보인다.

국부평형방정식을 확인하는 과정에서 취해진 가정들은 전체평형방정식과 경계조건을 이용하여 증명한다. 적절한 하중변수를 도입하여 중심선의 회전을 급수해 형태로 구한다. 그리고 본 논문의 해가 세장비가 작아서 무한소 회전을 수반하는 경우에는 고전 선형탄성해와 같아지고 세장비가 커져서 큰 회전을 수반하는 경우에는 기술적 이론인 Kirchhoff의 이론에 의한 해에 귀착됨을 보여서 이 양극 사이의 불연속성을 극복한다.

2. 기본 지배방정식

물체는 기준상태(reference configuration) B 에서 공간의 영역 V 상에 있다고 가정한다. 기준상태 B 로부터 현재상태(current configuration) B^* 로의 변형에 있어서 전형적인 질점(particle)은 초기의 x_i 점에서 y_i 로 움직인다. Cauchy-Green의 변형텐서(Cauchy-Green deformation tensor) C_{ik} 는

$$C_{ik} = y_{r,i} y_{r,k}$$

으로 표현되며, Green의 변형률 텐서 e_{ik} 는

$$e_{ik} = \frac{1}{2}(C_{ik} - \delta_{ik}) = O(\epsilon) \quad (1)$$

으로 표현된다. 여기서 "O"는 크기치를 나타내며 ϵ 은 변형률의 크기를 나타내는 무차원하중 파라미터이고 δ_{ik} 는 Kronecker Delta이다. 극분해정리(polar decomposition theorem)로부터

$$y_{i,k} = r_{im} s_{mk} \quad (2)$$

으로 표현된다⁽⁹⁾. 여기서 r_{im} 은 회전을 나타내는 직교텐서이고 s_{mk} 는 신장을 나타내는 대칭텐서이다. e_{ik} 의 일차 편미분은 $O(\epsilon)/a$ 이라고 가정한다. 여기서 a 는 하중과 물체의 설명에서 나타나는 기준길이이다(예를 들면 보나 평판의 굽힘에서는 그 두께). 이 때 $r_{i,kj} = O(\epsilon)/a$ 이고 $y_{i,kl} = O(\epsilon)/a$ 임을 보일 수 있으며, 적합조건은 다음과 같이 된다⁽⁵⁾.

$$e_{ik,mn} + e_{mn,ik} - e_{im,nk} - e_{nk,im} = O(\epsilon^2)/a^2 \quad (3)$$

T_i 를 기준상태의 단위 면적당 작용하는 면력(traction)이라 하고, n_i 를 기준상태에서의 면력을 측정하고자 하는 면의 단위법선 벡터라 할 때 공칭

응력텐서(nominal stress tensor) T_{ik} 는 다음 식으로 정의된다.

$$T_i = T_{ki} n_k$$

평형방정식은 T_{ik} 를 써서 표시하면

$$\frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} + f_i = 0 \quad (4)$$

으로 표현된다. 여기서 f_i 는 기준상태 B 에서 단위 체적당 받는 체적력의 성분이다.

탄성체는 기준상태의 단위 체적당 변형에너지 W^0 를 갖는데 이것은 e_{ik} 나 C_{ik} 를 통해서 변형구배(deformation gradient) $y_{i,k}$ 의 함수이다. 준-정적변형(quasistatic deformation)에서 작용력의 일률은 변형에너지의 변화율과 같다고 가정되며, 이것은

$$T_{ki} = \frac{\partial W^0}{\partial y_{i,k}} = \frac{\partial y_i}{\partial x_r} \frac{\partial W^0}{\partial e_{rk}}$$

와 같은 응력-변형률 관계에 이른다. 제 2 Piola-Kirchhoff 응력 텐서의 성분들을 σ_{ik} 로 표시하면

$$\sigma_{ik} = T_{kr} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = \frac{\partial W^0}{\partial e_{ik}} \quad (5)$$

의 관계를 얻게 된다. 따라서 (4)식은

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \sigma_{rk} \Gamma_{rk}^i + f_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = 0 \quad (6)$$

으로 표현되며, 여기서 Christoffel 기호는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_{rk}^i = \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_r \partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_m} = C_{im}^{-1} (e_{rm,k} + e_{km,r} - e_{rk,m})$$

변형률이 작은 변형에 대한 선형 탄성의 거동에 대하여 W^0 는

$$W^0 = \frac{1}{2} C_{ikmn} e_{ik} e_{mn},$$

$$C_{ikmn} = C_{mnik} = C_{kimn}$$

으로 표현되고, 여기서 C_{ikmn} 은 고전 선형탄성론에서의 일반적인 탄성계수이다. 따라서 응력 σ_{ik} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ik} = C_{ikmn} e_{mn} \quad (7)$$

여기서 Green 변형률 e_{ik} 는 식 (1)로부터 계산되는데 이차적인 크기치의 항들($O(\epsilon^2)$ 이상의 고차항들)은 무시된다. 초기에 가정되었던 $e_{ik,1} = O(\epsilon)/a$ 로부터 식 (6)의 Christoffel 기호는 $O(\epsilon)/a$ 가 될 것이다. 따라서 $(E\epsilon^2)/a$ 의 크기치 항들을 무시함으로써 평형방정식은

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = 0 \quad (8)$$

으로 표현되며 $\partial x_i / \partial y_k$ 는 $O(1)$ 까지 계산된다. 따라서 식 (8)은 $O(\epsilon)$ 까지만 만족된다.

면력(traction)이 기준상태 물체표면 S 의 일부 S_i 에서 주어진다

$$T_{ki}n_k = \sigma_{rk}y_{i,r}n_k = \hat{T}_i \text{ on } S_i$$

이 되고, 여기서 \hat{T}_i 는 크기 $O(E\epsilon)$ 의 가해진 면력이다. 위의 식은 같은 의미로 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ik}n_k = \hat{T}_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \hat{\tau}_i \text{ on } S_i \quad (9)$$

식 (9)에서 $\partial x_i / \partial y_k$ 는 단지 $O(1)$ 까지 계산되고, $\hat{\tau}_i$ 은 초기의 좌표축에 평행했던 변형체 요소들의 방향으로 작용하는 면력의 성분들이다. 면력이 없거나 $EO(\epsilon^2)$ 인 경우는 $\sigma_{ik}n_k$ 는 S_i 상에서 $EO(\epsilon)$ 까지 사라져야만 한다.

지금까지 지배방정식과 면력 경계조건을 변형률의 제일차항까지 나타내 보았는데, 실제로는 적합조건 (3)을 직접 풀어서 만족시키는 것은 대단히 어렵기 때문에 변위를 적절히 가정하여 부분역법(semi-inverse method)을 사용할 필요가 있다.

3. 균일한 압력을 받는 스트립의 변형

3.1 문제의 기술과 국부적인 변형률 및 응력상태

두께 $2a$ 폭 l 의 긴 등방성 탄성재료의 스트립이 고정-자유 지지된 상태에 있다고 하자. 스트립의 윗면에 균일한 압력이 작용하여 폭방향으로 일어나는 굽힘 변형을 스트립이 충분히 길다는 가정 하에 평면 변형률로 국한시켜 고려하자. 스트립은 초기에 수평한 상태에 있다고 가정한다. 길이 방향이 y 축과 일치하고 z 축은 스트립의 폭 방향을 따라 단면의 중심선이 되도록 취하며, x 축은 아래 방향으로 수직이 되도록 좌표계를 잡는다(Fig. 1 참조). $z=0$ 과 $z=l$ 이 각각 고정단과 자유단이 되도록 하며 스트립의 기준길이는 스트립 두께의 절반으로 취한다. 평판의 윗면은 일정 압력 p 를 받고 아랫면은 어떤 면력도 받지 않으며, 평판의 자중은 무시된다.

변형된 상태에서 중심선은 다음과 같은 곡선이 된다고 가정하자.

$$y_i = \{X(z), 0, Z(z)\}$$

여기서 중심선의 좌표 $X(z)$ 과 $Z(z)$ 는 나중에 결정되어질 것이다. 중심선의 신장(extension)은 $e(z)$ 로 표기되고

$$(X')^2 + (Z')^2 = (1+e)^2 \quad (10-a)$$

의 관계를 갖게 된다. 여기서 프라임(prime)은 z 에 관한 미분을 나타낸다. 변형된 중심선에 대한 접선의 기울기, $\theta(z)$ 는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\sin \theta = X'/(1+e), \quad \cos \theta = Z'/(1+e) \quad (10-b)$$

앞으로 필요에 따라 x, y, z 를 x_1, x_2, x_3 로 표기하며 변위나 변형 후 좌표에 대해서도 비슷하게 첨자를 써서 표기하기로 한다. 평판의 변형을 편의상 세 번의 연속적인 변형으로 생각한다. 첫째로, 질점들(particles)에, 중심선에서 0이 되는 작은 변위 u_i 를 주고 둘째로, y_2 축에 평행한 축에 대하여 단면을 $\theta(z)$ 만큼 회전시키며 마지막으로 중심이 변형된 위치에 오도록 강체 병진 변형(rigid translational deformation)을 시킨다. 이 경우 변형은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} y_1 &= X + (x + u_1) \cos \theta + u_3 \sin \theta \\ y_2 &= 0 \\ y_3 &= Z - (x + u_1) \sin \theta + u_3 \cos \theta \end{aligned} \quad (11-a)$$

여기서 u_1, u_3 는 x, z 의 함수이다. 변형률이 작기 위해서는 u_1, u_3 의 일차편미분은 $O(\epsilon)$ 이 되어야 한다. 그리고 u_1, u_3 는 중심선 상에서는 사라져야 하므로 $O(\epsilon a)$ 가 되며, $\theta'(z)$ 는 곡률로서 $O(\epsilon)/a$ 가 될 것이다. 일반평면응력(generalized plane stress) 문제에 대한 해(참고문헌 (1)의 페이지 363~364)를 평면변형률(plane strain) 문제의 해로 바꾸거나, 혹은 Michell에 의한 평판의 고정선형 탄성론해의 결과(참고문헌 (1)의 페이지 477~479)로부터 u_1, u_3 를 다음과 같이 추측한다.

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{1-\nu} ex + \frac{\nu}{2(1-\nu)} x^2 \theta' - \frac{p}{D} \left\{ \frac{(1+\nu)}{24(1-\nu)} x^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4(1-\nu)^2} a^2 x^2 + \frac{(1-2\nu)}{3(1-\nu)^2} a^3 x \right\} \\ u_3 &= \frac{1}{6(1-\nu)} \theta'' \{ (2-\nu) x^3 - 6a^2 x \} \end{aligned} \quad (11-b)$$

여기서 D 는 굽힘강성이다($D=2Ea^3/3(1-\nu^2)$).

식 (1)과 식 (11-a, b)로부터 e_{ik} 를 $O(\epsilon)$ 까지 계산하면

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{1-\nu} e + \frac{\nu}{1-\nu} x \theta' - \frac{p}{D} \left\{ \frac{(1+\nu)}{6(1-\nu)} x^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(1-\nu)^2} a^2 x + \frac{(1-2\nu)}{3(1-\nu)^2} a^3 \right\} \\ e_{33} &= e - \theta' x + \frac{1}{6(1-\nu)} \theta'' \{ (2-\nu) x^3 - 6a^2 x \} \end{aligned} \quad (11-c)$$

$$e_{13} = \frac{1}{2(1-\nu)} \theta''(x^2 - a^2)$$

$$e_{12} = e_{22} = e_{23} = 0$$

이다. 앞으로의 식 전개과정에 있어서 $O(\epsilon)$ 까지

$$e' = 0, \theta'''' = 0, \theta''' = \frac{p}{D} \tag{12}$$

들을 가정할 것이며, 이 가정들은 후에 전체 평형 방정식과 양단 조건을 이용해서 증명되어질 것이다. 앞의 변형률과 가정 (12)를 이용하여 제 2 Piolar-Kirchhoff 응력텐서 σ_{ik} 를 $O(\epsilon)$ 까지 구하면

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{p}{D} \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{3}a^3 \right)$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \theta''(x^2 - a^2) \tag{13}$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (e - x\theta') + E \frac{p}{D} \left\{ \frac{1}{3(1-\nu^2)} x^3 - \frac{(2-\nu)}{2(1+\nu)(1-\nu)^2} a^2x - \frac{\nu}{3(1+\nu)(1-\nu)^2} a^3 \right\}$$

$$\sigma_{22} = \lambda(e_{11} + e_{33}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$$

이다. 여기서 λ 는 Lamé의 상수이다. 평형방정식은 식 (8)로부터 $O(\epsilon)$ 까지 만족되어지고, 또한 스트립의 상하단에서의 경계조건 식 (9)도 모두 $O(\epsilon)$ 까지 만족되어짐을 확인할 수 있다. 스트립 양단에서의 면력경계조건(traction boundary condition)은 상하단에서와 같이 면의 각 점마다(pointwise) 만족되지는 않지만 단면의 면력을 적분함으로써 얻어지는 단면전체의 힘과 모멘트(resultant force and moment)의 향으로는 만족되도록 후에 자유단에서의 조건을 기술할 것이다. 즉 양단에서 면력의 자세한 국부 분포에 관계되는 끝영향(end effect)은 St. venant 원리에 의해 무시한다.

3.2 전체평형방정식 (Overall Equilibrium Equations)

앞에서 국부지배방정식이 $O(\epsilon)$ 까지 만족됨을 살펴 보았는데 완전한 해를 구하기 위해서는 $\theta(z)$ 와 변형 후 중심선의 좌표 $X(z), Z(z)$ 를 구해야 한다. 또한 지배방정식이 만족되는 것을 보여 주기 위해서 취한 가정들을 확인해야 한다. 이를 위해서는 단면에 작용하는 모멘트와 힘으로 표시된 전체 평형방정식을 고려할 필요가 있다. 국부평형방정식

을 확인할 때 $O(\epsilon^2)$ 이상의 고차항들을 무시했는데 가느다란 스트립의 경우 이와 같은 고차항들이 z 방향을 따라 적분되면 전체평형에 무시할 수 없는 영향을 미친다. 따라서 이 경우 $O(\epsilon)$ 까지의 국부평형은 전체평형을 의미하지 않으며 전체평형이 따로 고려되어야 한다.

스트립의 단위 길이당 단면에 작용하는 모멘트와 힘을 고려할 때 단면에 작용하는 면력의 합은 y_2 축에 평행한 축에 대한 모멘트 $M(z)$ 및 단면 중심의 변형된 위치를 통해 작용하는 $S(z), T(z)$ 와 같고(Fig. 1 참조) 이것들의 관계식은

$$\begin{aligned} S \cos \theta + T \sin \theta &= \int_{-a}^a T_{31} dx \\ -S \sin \theta + T \cos \theta &= \int_{-a}^a T_{33} dx \end{aligned} \tag{14}$$

$$M = \int_{-a}^a \{ (y_3 - Z) T_{31} - (y_1 - X) T_{33} \} dx$$

으로 표현된다. 위의 식 (14)와 식 (5)로부터 $M(z), S(z), T(z)$ 들은 $O(\epsilon)$ 까지 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^a \sigma_{13} dx \\ T &= \int_{-a}^a \sigma_{33} dx \\ M &= - \int_{-a}^a x \sigma_{33} dx \end{aligned}$$

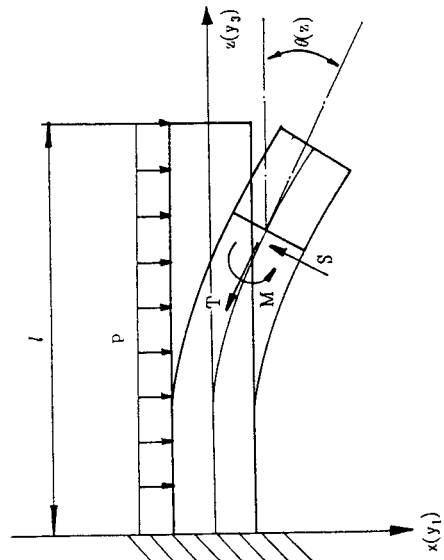


Fig. 1 Deformation of a cantilever strip with uniform pressure

윗 식에 식 (13)의 α_{ij} 를 대입함으로써, $O(\epsilon)$ 까지

$$M = D\theta' + \alpha_m a^2 p \quad (16-a)$$

$$S = -D\theta'' \quad (16-b)$$

$$T = \frac{2E}{1-\nu^2} e a - \alpha_i p a \quad (16-c)$$

으로 표현된다. 여기서 α_i 과 α_m 는 무차원 상수로써 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha_i = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \alpha_m = \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)}$$

위의 모멘트와 힘에 관한 표현식들을 유도하는 과정에서 제 2차 항들은 모두 생략하였으므로 이 표현식들은 $O(\epsilon)$ 까지만 유효하다. 이와 같이 국부지배방정식에서 무시되는 이차항들의 힘이 가느다란 스트립의 경우 z 방향으로 적분될 경우 전체적인 힘과 모멘트의 평형에 기여할 수 있으므로 M , S , T 가 전체평형방정식을 만족하도록 해야 한다. 이와 같이 전체평형방정식으로부터 얻어진 S 와 T 는 (16-b, c)와는 달리 스트립의 두께나 하중에 상관없이 유효하다.

어떤 임의의 단면과 $z=1$ 인 단면 사이의 평판에 대한 전체평형방정식을 고려하면

$$S \cos \theta + T \sin \theta = \int_z^1 p \cos \theta(\xi) d\xi \quad (17-a)$$

$$S \sin \theta - T \cos \theta = \int_z^1 p \sin \theta(\xi) d\xi \quad (17-b)$$

$$M = \int_z^1 p \cos \theta(\xi) [Z(\xi) - Z(z)] d\xi \\ + \int_z^1 p \sin \theta(\xi) [X(\xi) - X(z)] d\xi \quad (17-c)$$

이다. 위의 관계식들을 z 에 관해서 미분하고 정리하면 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$S\theta' - T' = 0 \quad (18-a)$$

$$S' + T\theta' + p = 0 \quad (18-b)$$

$$M' + S = 0 \quad (18-c)$$

기준변형률 ϵ 은 고정지지된 점에서의 굽힘 변형률로 취할 경우 항상 스트립의 변형정도를 나타내는 데에 문제가 없다. 따라서

$$\epsilon = |\theta| a \quad (19)$$

로 정의한다. 여기서 θ 은 $z=0$ 즉 고정지지된 점에서의 곡률이다. 이와 같이 ϵ 을 정의할 경우 식 (16-a)의 양변은 항상 $O(\epsilon)$ 이 되므로 이 식은 하중과 스트립의 두께에 상관없이 항상 유효한 식이 된다. 반면 식 (16-b, c)들의 우변은 가느다란 스트립의 경우 $O(\epsilon^2)$ 이 되어 우리가 이 식들을 유도할 때 무시했던 제 2차항 정도의 크기를 가지므로 다른 방법으로 검증하기 전에는 항상 유효하다고 볼

수 없다. 따라서 S 와 T 는 전체적인 힘과 모멘트의 평형방정식으로부터 구해야 한다. 즉 (16-a)와 (18-a, b, c)의 네 식들로부터 4개의 미지수 θ , M , T , S 를 구해야 한다. (본 문제의 경우에는 (16-a)와 (18-c)로부터 (16-b)는 항상 유효함을 알 수 있다.) 이것으로부터 스트립이나 보의 굽힘 변형에서는 전단력 S 나 축방향력 T 는 (16-b, c)와 같은 구성방정식에 의해 주어지는 성격의 힘이 아니며 전체적인 힘의 평형으로부터 얻어지는 반력임을 알 수 있다. θ 가 얻어지면 (10-b)식에서 e 를 무시하고 적분을 취함으로써 $X(z)$ 와 $Z(z)$ 를 구할 수 있다.

$$X(z) = \int_0^z \sin \theta(\xi) d\xi,$$

$$Z(z) = \int_0^z \cos \theta(\xi) d\xi$$

국부평형방정식이 만족하는 것을 보여 주기 위해 사용한 가정 (12)는 전체평형방정식과 양단에서의 지지조건을 이용함으로써 증명할 수 있다. 먼저 모멘트의 크기를 나타내기 위해서 이 모멘트의 크기와 관련지을 수 있는 대표적인 길이를 L^* 라 하자. 본 스트립 문제의 경우 L^* 는 변형된 스트립을 어떤 평면상에 투영시켜 최고 치수를 측정할 때 다른 어떤 평면에서 보다 작지 않은 값을 주는 평면상에서 변형체의 최대 투영길이 (largest projection)로 정의할 수 있다. 이 때 $L^* = O(l)$ 임을 주목하면

$$M = O(pL^{*2}) = O(pl^2)$$

이다. 여기서 $M = Ea^2 O(\epsilon)$ 을 주목하고 식 (17-a, b, c), (16-a), (18-c) 및 (19)를 이용하면

$$S < pZ(l) = E \frac{Z(l)}{l^2} a^2 O(\epsilon) = Ea \frac{a}{l} O(\epsilon) \quad (20-a)$$

$$\theta'' = \frac{1}{la} O(\epsilon) \quad (20-b)$$

이다. 따라서 아주 가느다란 스트립 ($a/l \approx O(\epsilon)$)에 대해서는 $S = EaO(\epsilon^2)$, $\theta'' = O(\epsilon^2)/a^2$ 으로 되어 S 와 θ'' 은 크기가 2차항에 불과하다. 한편 식 (16-a), (18-a), (18-c)로부터

$$\theta'^2/2 + T/D = \text{constant}$$

를 얻고 여기에 자유단에서의 조건 $\theta'(l) = \theta'_i$, $T(l) = 0$ 을 대입하고 식 (19)를 이용하면

$$\frac{T}{D} = (\theta_i^2 - \theta^2)/2 = \frac{1}{a^2} O(\epsilon^2) \quad (21)$$

이다. 이 식과 식 (16-c)로부터 $O(\epsilon)$ 까지

$$e = \frac{\nu}{3(1-\nu)} \frac{pa^3}{D} \quad (22)$$

이다. 즉 중심선의 신장률은 $O(\varepsilon)$ 까지 일정하며 e' 의 크기는 이차 이상의 고차항(second order at most, $ae' \approx O(\varepsilon^2)$)이다. 다음 θ''' 의 크기를 알아 보기 위해 먼저 식 (16-a), (18-b, c)를 이용하여

$$\theta''' - \theta' T/D - p/D = 0 \quad (23)$$

을 얻는다. 이 식에 식 (21)을 대입하고 $M = O(pl^2) = Ea^2 O(\varepsilon)$ 을 주목하면 θ''' 은 $O(\varepsilon)$ 까지

$$\theta''' = p/D = O(\varepsilon)/l^2 a \quad (24)$$

임을 알 수 있다. 한편 식 (23)을 미분하고 식 (20-b), (21)을 이용하면

$$\theta'''' = \theta' T'/D + \theta'' T/D \leq O(\varepsilon^2)/a^4$$

이다. 이와 같이 하여 변형률의 유도과 전체평형방정식을 확인하는 과정에서 이용한 모든 가정들을 확인하였다.

지금까지 St. Venant 원리에 의해 끝 영향을 무시하고 변형률이 작다는 가정하에서 균일 압력을 받고 있는 스트립의 변형을 변형률의 일차항까지 살펴 보았다. 해의 구성은 4개의 지배방정식 (16-a), (18-a, b, c)로부터 M , S , T , θ 가 구해지면 θ 를 식 (13)에 대입하여 국부적인 응력분포를 알 수 있다. M , S , T , θ 를 구하기 위해서는 앞에 언급한 4개의 지배방정식을 다음과 같은 양단 지지조건 하에서 풀어야 한다.

$$\theta(0) = 0, M(l) = 0, S(l) = 0, T(l) = 0 \quad (25)$$

이들 4개의 지배방정식으로부터 유도된 식 (21), (23)에서 T 를 소거할 때 얻어지는 표현식에, 다시 $M(l) = 0$ 을 이용하여 θ' 을 소거하면 다음과 같이 θ 에 관한 비선형 상미분지배방정식을 얻는다.

$$\theta''' - \frac{1}{2} \left(\alpha_m^2 \frac{a^4 p^2}{D^2} - \theta'^2 \right) \theta' - \frac{p}{D} = 0 \quad (26-a)$$

$$\theta(0) = 0, \theta'(l) = -\alpha_m \frac{a^2 p}{D}, \theta''(l) = 0 \quad (26-b)$$

두꺼운 스트립의 경우($a/l \gg O(\varepsilon)$), 앞의 크기에 관한 해석 결과로부터 식 (26-a)의 두번째 항은 다른 항에 비해 고차항임을 알 수 있다. 따라서 지배방정식은

$$\theta''' - \frac{p}{D} = 0 \quad (27-a)$$

로 되며 그 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\theta = k \left[\frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi^2 + \left(\frac{1}{2} - \alpha_m \frac{a^2}{l^2} \right) \xi \right], \quad k = pl^3/D, \xi = z/l \quad (27-b)$$

위의 해는 끝 영향을 무시할 때 얻어지는 평면 변

형률 외팔 스트립의 고전 선형탄성해이다.

한편 두께가 아주 얇아져 $a/l \ll 1$ 즉, $a/l \approx O(\varepsilon)$ 이 될 때 즉 회전효과를 무시할 수 없을 때, 식 (26-a)의 두번째 항과 (26-b)에서 α_m 이 곱해진 항은 고차항으로 무시할 수 있다.

$$\theta''' + \frac{1}{2} \theta'^3 - p/D = 0,$$

$$\theta(0) = \theta'(l) = \theta''(l) = 0 \quad (28)$$

여기서 주목할 점은, 세장비가 클 때(예를 들면 $a/l \approx O(\varepsilon)$) θ''' 과 p/D 자체도 아주 작은 고차항이 되어 고전 선형탄성해에서 무시했던 θ'^3 항을 무시할 수 없다는 점이다. 식 (28)은 바로 작은 변형률 하에서 큰 회전을 수반하는 봉의 탄성변형에 대한 Kirchhoff의 기술적 이론⁽¹⁾을 평면변형률 상태 하에 있는 스트립에 적용했을 때 얻어지는 식이다. 즉 일관성 있게 지배방정식들을 살펴 봄으로써 얻어진 식 (26-a, b)와 응력에 대한 해 (13)은, 세장비가 작은 두꺼운 스트립에 대해서는 고전선형탄성해를 주고 세장비가 아주 커서 회전을 무시할 수 없는 가느다란 스트립에 대해서는 기술적 이론인 Kirchhoff의 이론에 귀착된다. 따라서 Kirchhoff의 이론이 세장비가 큰 경우에는 타당한 제 1차 이론(first order theory)임을 알 수 있다. 세장비가 큰 경우 식 (13)에서 p/D 나 e 가 곱해진 항이 무시할 만큼 작아서 단순한 재료역학 보 이론에서 얻어지는 응력 표현식과 같아짐을 주목할 필요가 있다. 그러나 그렇지 않은 경우에는 이 항들을 무시할 수 없으며 이 점은 Kirchhoff 이론과 같은 기술적 이론에서는 고려되지 못한다. 그리고 본 이론은 위의 극단적인 두 경우를 포함하여 그 사이에(between the two extremes) 있는 어떤 변형에 대해서도 변형률에 있어서 제 1차 항까지의 해(first order solution)를 주므로 유한요소법과 같이 수치해석을 통해서 얻어진 해를 검증하는데 이용될 수도 있다. 이와 같은 포괄성은 우리가 지금까지 스트립의 세장비나 회전 및 변위의 크기에 관한 어떤 가정 없이 단지 변형률이 작다는 가정하에서 문제를 살펴 보았기 때문이다.

식 (26-a), (26-b)은 초기치 문제에 대한 상미분 방정식으로 간주될 수 있으며 슈팅 방법(shooting method)에 의해 풀 수 있는 전형적인 문제이다⁽⁸⁾. 즉 $\theta(l)$ 을 가정하고 식 (26-b)에 주어진 $\theta'(l)$ 과 $\theta''(l)$ 값을 이용하여 미분방정식을 $z = l$ 에서부터 $z = 0$ 까지 수치적분한다. $\theta(0) = 0$ 이

Table 1 Comparison of results for plane strain cantilever strips under uniform pressure with the maximum strain approximately 0.50×10^{-3}

$2a/l$	p/E	kl/a	Deflection at the free end, $X(l)/2a$		
			Present theory	Classical theory	Kirchhoff's theory
1/10	1.8849×10^{-6}	4.0211×10^{-1}	2.4868×10^{-2}	2.4868×10^{-2}	2.5132×10^{-2}
1/20	4.6937×10^{-7}	1.6021	9.9868×10^{-2}	9.9868×10^{-2}	1.0013×10^{-1}
1/30	2.0846×10^{-7}	3.6021	2.2487×10^{-1}	2.2487×10^{-1}	2.2513×10^{-1}
1/50	7.5017×10^{-8}	1.0002×10^1	6.2485×10^{-1}	6.2486×10^{-1}	6.2512×10^{-1}
1/80	2.9301×10^{-8}	2.5604×10^1	1.5998	1.5998	1.6000
1/200	4.6892×10^{-9}	1.6006×10^2	9.9963	9.9977	9.9966
1/500	7.5169×10^{-10}	1.0022×10^3	6.2360×10^1	6.2416×10^1	6.2360×10^1
1/2000	4.8680×10^{-11}	1.6616×10^4	9.6269×10^2	9.7582×10^2	9.6269×10^2
1/5000	1.1931×10^{-11}	1.5908×10^5	3.9320×10^3	3.3114×10^3	3.9320×10^3

만족되는지 확인하여 만족되지 않을 경우 $\theta(l)$ 을 슈팅에 의해 수정하여 다시 적분하여 $\theta(0)=0$ 이 만족할 때까지 이 과정을 반복하는 것이다. 수치 예로써, 최대 굽힘변형률 $\epsilon_0=0.5 \times 10^{-3}$ 정도의 변형상태에서 스트립의 폭에 대한 두께의 비에 따라 자유단에서의 처짐을 이 방법에 의해 구했으며 결과를 Table 1에 표시했다. 이 표에서 볼 수 있는 바와 같이 a/l 이 아주 작지는 않을 때 본 이론의 해는 고전 선형탄성해와 일치한다. 한편 a/l 이 점점 작아지면 고전 선형탄성해는 본 이론의 해와 멀어지며 대신 기술적 이론인 Kirchhoff 이론에 의한 결과가 본 이론에 의한 결과와 일치하고 있다.

또한 해석적인 근사해는 θ 가 $k=pl^3/D$ 의 기함수임을 주목하여

$$\theta = kf(\zeta) + k^3g(\zeta) + O(k^5) \quad (29)$$

으로 전개함으로써 얻어질 수 있다. 여기서 $kf(\zeta)$ 는 식 (27-b)에 주어진 고전 선형탄성해이며, k^3 항은 고전 선형탄성해에 대한 수정항으로 $g(\zeta)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$g(\zeta) = -\frac{1}{1680}\zeta^7 + \frac{1}{240}\zeta^6 - \frac{1}{80}\left(1 + \frac{2}{3}\alpha_m \frac{a^2}{l^2} - \frac{1}{3}\alpha_m^2 \frac{a^4}{l^4}\right)\zeta^5 + \frac{1}{48}\left(1 + 2\alpha_m \frac{a^2}{l^2} - \alpha_m^2 \frac{a^4}{l^4}\right)\zeta^4 - \frac{1}{24}\left(1 + 2\alpha_m \frac{a^2}{l^2} - \alpha_m^2 \frac{a^4}{l^4} - 2\alpha_m^3 \frac{a^6}{l^6}\right)\zeta^3 + \frac{1}{30}\left(1 + \frac{5}{2}\alpha_m \frac{a^2}{l^2} - \frac{5}{4}\alpha_m^2 \frac{a^4}{l^4} - \frac{15}{2}\alpha_m^3 \frac{a^6}{l^6}\right)\zeta^2 + \frac{1}{60}\left(1 - \frac{35}{2}\alpha_m \frac{a^2}{l^2} + \frac{5}{4}\alpha_m^2 \frac{a^4}{l^4} + 30\alpha_m^3 \frac{a^6}{l^6}\right)\zeta$$

4. 균일한 압력하중을 받는 외팔보의 변형

본 장에서는 조금 더 복잡한 문제로서, 수평상태에 있는 보가 상단을 따라 균일 압력하중을 받을 때의 변형을 살펴보자. 중력장으로 인한 보의 처짐과 집중 수직하중을 받고 있는 3차원 보의 변형문제는 (6)에서 다루어졌다. 본 장에서의 문제는 비보존력을 수반하므로 회전이 충분히 커질 때는 그 처짐특성이 보존력 하에서와는 다르게 된다.

앞의 스트립 문제에서와 같이 좌표축을 잡고 x 축과 y 축이 단면의 주축과 평행하도록 하고 z 축은 보의 중심선과 일치하도록 한다(Fig. 1). 편의상 전단중심과 단면의 도심은 일치한다고 가정하며, 체적력은 무시한다. 또한 앞 장에서와 같이 보의 길이와 단면의 높이를 l 과 $2a$ 로 나타내기로 한다. 이와 같이 문제를 정의할 경우, 앞의 스트립 문제와 비교해 볼 때 "스트립"과 "보"라는 기하학적인 차이를 제외하고는 하중이나 양단지지조건들이 같으므로 해에 이르는 과정은 앞 장에서와 거의 같은 과정을 밟아 나갈 수 있다. 따라서 본 장에서는 보 문제가 스트립 문제와 다른 점을 강조해서 다루고 같은 점을 앞 장의 결과를 인용해서 간략히 설명할 것이다.

변형 후 중심선의 좌표와 신장률 및 변형된 중심선이 수평선과 이루는 각을 앞 장의 스트립 문제에서와 똑같은 문자를 써서 표기할 경우 그 관계식은 (10-a)와 (10-b)로 주어진다. 또한 앞 장에서와

같이 변형을 분해해서 변형 후 좌표를

$$\begin{aligned} y_1 &= X + (x + u_1) \cos \theta + u_3 \sin \theta \\ y_2 &= y + u_2 \\ y_3 &= Z - (x + u_1) \sin \theta + u_3 \cos \theta \end{aligned} \quad (30-a)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 u_i 는 x_i 의 함수로서 중심선에서는 사라지는 작은 변위를 나타낸다. 고전 선형탄성론의 결과[참고문헌 (1)의 페이지 354~356]로부터 다음과 같이 u_i 를 추측한다.

$$\begin{aligned} u_1 &= -\nu e x + \frac{1}{2} \nu \theta' (x^2 - y^2) + u_1^0 \\ u_2 &= -\nu e y + \nu \theta' x y + u_2^0 \\ u_3 &= \theta'' (x + x y^2) \end{aligned} \quad (30-b)$$

여기서 $\chi(x, y)$ 는 St. Venant의 휨함수(flexure function)로서 단면에서는 조화함수(harmonic function)이며, 단면의 경계에서는 다음과 같은 조건을 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} \chi_{,1} n_1 + \chi_{,2} n_2 &= -\left\{ \frac{\nu}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) y^2 \right\} n_1 \\ &\quad - (2 + \nu) x y n_2 \end{aligned}$$

또한 식 (30. b)에서 나타나는 u_i^0 는 다음의 평면 변형률 문제에 대한 변위들로서 중심선에서 0이 되도록 선별된다. 즉 u_i^0 는 평형방정식

$$\begin{aligned} \sigma_{a1,a}^0 + (\mu + \lambda) \frac{W}{EI} (x_1 + y^2) + \mu \nu \frac{W}{EI} (x^2 - y^2) \\ = 0 \end{aligned} \quad (31-a)$$

$$\sigma_{a2,a}^0 + (\mu + \lambda) \frac{W}{EI} (x_2 + 2xy) + \mu \nu \frac{W}{EI} xy = 0$$

과 면력 경계조건

$$\begin{aligned} \sigma_{a1}^0 n_a &= \bar{\tau}_1 - \lambda \frac{W}{EI} \{x + x_0 y_0^2\} n_1 \\ \sigma_{a2}^0 n_a &= \bar{\tau}_2 - \lambda \frac{W}{EI} \{x + x_0 y_0^2\} n_2 \end{aligned} \quad (31-b)$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{\partial A} \bar{\tau}_1(x_0, y_0) ds, \\ &\int_{\partial A} \bar{\tau}_2(x_0, y_0) ds = 0 \end{aligned}$$

으로 구성되는 평면 변형률 문제의 변위해이다. 여기서 x_0, y_0 은 단면 경계점들의 변형전 좌표이며, $\bar{\tau}_1(x_0, y_0), \bar{\tau}_2(x_0, y_0)$ 는 경계면에서 분포 압력하중으로 인한 면력이며 식 (9)에서 설명되었다. 또한 W 는 중심선에 수직인 단위 길이당 힘이다. 주축에 관해서 굽힘변형이 일어나는 경우를 고려하므로 수평성분 $\int_{\partial A} \bar{\tau}_2(x_0, y_0) ds$ 는 0이 된다.

변형을 나타내는 식 (30)을 앞 장에서와 같이 (1)에 대입하고, 식 (2)를 사용하면 변형률의 성분

들을 $O(\epsilon)$ 까지 계산할 수 있게 된다. 등방성 재료에 대한 응력과 변형률의 관계식으로부터 응력 성분들을 $O(\epsilon)$ 까지 구하면

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \lambda \theta''' (x + x y^2) \delta_{ab} + \sigma_{ab}^0 \\ \sigma_{33} &= E (e - \theta' x) + (\lambda + 2\mu) \theta''' (x + x y^2) + \sigma_{33}^0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\sigma_{13} = \mu \theta'' \left\{ x_1 + y^2 + \frac{1}{2} \nu (x^2 - y^2) \right\}$$

$$\sigma_{23} = \mu \theta'' \{x_2 + (2 + \nu) x y\}$$

으로 표현된다. 여기서 $O(\epsilon)$ 까지

$$e' = 0, \theta''' = 0, \theta'' = \frac{W}{EI} \quad (33)$$

을 가정하였으며 또한 이 식들이 성립할 경우 국부 평형방정식 (8)과 면력 경계조건 (9)가 만족되는 것을 보일 수 있고, 이 가정 (33)은 스트립 문제에 서와 똑같은 방법으로 증명할 수 있다.

단면에 작용하는 힘과 모멘트는 식 (15)와 같은 방식으로 주어지고, 이 값들은 상반정리(reciprocal theorem)를 이용하면 평면변형률 문제를 풀지 않고도 바로 구할 수 있으며[부록 참조], $O(\epsilon)$ 까지 다음과 같이 주어진다.

$$S(z) = -EI \theta'' \quad (34-a)$$

$$T(z) = EA (e + \bar{a}_t \frac{W}{EI} a^3) \quad (34-b)$$

$$M(z) = EI (\theta' + \bar{a}_m \frac{W}{EI} a^2) \quad (34-c)$$

여기서 \bar{a}_t 와 \bar{a}_m 은 무차원 상수로서

$$\begin{aligned} \bar{a}_t &= \frac{1}{A a^3} \left[\int_A \left\{ x + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) x y^2 - \frac{\nu}{2} x^3 \right\} dA \right] \\ &\quad + \frac{\nu I}{a^4 A} \int_{\partial A} \{x_0 \beta_1(x_0, y_0) + y_0 \beta_2(x_0, y_0)\} ds \\ \bar{a}_m &= \frac{1}{a^2 I} \left[\frac{\nu}{6} I_{xx} - \frac{1}{2} (2 + \nu) (1 + 3\nu) \frac{I_{xy}}{(1 + \nu)} \right. \\ &\quad \left. - \int_A x \chi dA - \frac{\nu}{1 + \nu} \int_A x y \chi_2 dA \right] \\ &\quad - \frac{\nu}{a^3} \int_{\partial A} \left\{ \frac{1}{2} (x_0^2 - y_0^2) \beta_1(x_0, y_0) \right. \\ &\quad \left. + x_0 y_0 \beta_2(x_0, y_0) \right\} ds \end{aligned}$$

$$\text{이며, } I = \int_A x^2 dA, I_{xy} = \int_A x^2 y^2 dA, I_{xx} = \int_A x^4 dA,$$

$\beta_a(x_0, y_0) = \frac{a \bar{\tau}_a(x_0, y_0)}{W}$ 이다. 앞에서 언급하였듯

이 스트립과 보 사이의 기하학적 차이를 제외하고는 두 문제의 하중조건이나 양단 지지조건들이 같으므로, 위의 표현식들은 (16-a, b, c)에서 다음과 같은 파라미터의 치환을 취함으로써 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned} a_t &\rightarrow \bar{a}_t, \quad a_m \rightarrow \bar{a}_m, \\ p &\rightarrow W, \quad D \rightarrow EI \end{aligned} \quad (35)$$

보의 기준 변형률 측정치 ϵ 을 스트립 문제에서와 같이 식 (19)로 정의할 경우 위와 같은 파라미터의 치환은 스트립 문제의 해로부터 보에 대한 다른 모든 지배방정식과 수반되는 경계조건을 결정하는데 이용될 수 있고 가정 (33)의 증명도 앞 장에서와 같아진다. 그리고 해의 특성에 대한 앞 장에서의 설명이 그대로 적용된다. 즉 식 (34-a, b)는 앞 장에서와 같이 $O(\epsilon)$ 까지만 그 정확성이 보장된 표현식이기 때문에 회전이 큰 가느다란 보의 변형에 대해서는 유효하지 못하지만, 식 (34-c)의 양변은 항상 $O(\epsilon)$ 이 되어 절대적인 표현식이 된다. 그리고 식 (18-a, b, c)에서 식 (35)의 세번째 치환을 취함으로써 얻어지는 전체적인 평형방정식은 식 (34-c)와 함께 회전의 크기에 상관없이 θ , M , S , T 를 결정하는 지배방정식을 구성하게 되며 이 식들은 결국은 식 (26-a, b)에서 식 (35)의 치환을 취할 때 얻어지는 θ 만의 지배방정식으로 귀착된다. 또한 본 이론에 의한 해가 회전의 크기나 세장비에 관계없이 변형률에 관한 제 1 차 해(first order solutions in strains)로서 갖는 특성도 앞 장에서 설명한 바와 같다.

4. 결 론

본 논문에서 균일압력 하에서 고정-자유 지지된 스트립과 보의 탄성변형을 살펴 보았다. 변형률이 작다는 가정과 St. Venant의 원리에 의해 양단에서의 미세한 국부변력분포의 영향을 무시한 점 외에는 세장비에 따른 처짐이나 회전의 크기에 대한 일체의 가정 없이 국부변형장 지배방정식의 해를 변형률의 제 1 차 항까지 살펴보았다. 변위를 단면중심에 대한 국부변형과 회전 그리고 병진으로 분해하고 부분역법을 이용하여 해를 구성할 수 있으며 병진으로 인한 중심선의 변위는 전체평형방정식으로부터 얻어진다.

본 논문의 일관성 있는 접근방식을 통해서 얻어지는 해는 작은 변형률의 범주 내에서 처짐의 크기에 상관없이 변형률의 일차항 해이다. 실제로 이 해가 세장비가 작아서 회전을 무시할 수 있을 경우에는 고전선형탄성해와 같아지며 세장비가 커서 큰 회전을 수반하는 경우에는 기술적 이론인 Kirchhoff의 이론에 의한 해에 귀착됨을 확인할 수 있

다.

이와 같이 해서 보의 큰 처짐 문제에 적용되는 Kirchhoff 이론의 정당성을 확인할 수 있으며, 얻어진 해는 양 극단적인 경우의 해 즉 고전선형탄성해와 큰 처짐에 대한 기술적 이론해 사이의 불연속성을 극복하고 이 둘 사이의 가교 역할을 한다. 또한 이 해는 변형률의 일차항까지 정확한 해이므로 유한요소법과 같이 수치해석 방법을 통해서 얻어진 해의 검증에도 이용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- (1) Love, A. E. H., 1927, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Cambridge Unvi., 4th ed., Reprinted by Dover, New York, 1944.
- (2) Parker, D. F., 1979, "An Asymptotic Analysis of Large Deflections and Rotations of Elastic Rods", Int. J. Solids Structures, Vol. 15, pp. 361~377.
- (3) Parker, D. F., 1979, "The Role of Saint Venant's Solutions in Rod and Beam Theories", J. Appl. Mech., Vol. 46, pp. 861~866.
- (4) Parker, D. F., 1984, "On the Derivation of Non-linear Rod Theories from Three-Dimensional Elasticity", J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), Vol. 35, pp. 833~847.
- (5) Shield, R. T., 1984, "A Consistent Theory for Elastic Deformations with Small Strains", J. Appl. Mech., Vol. 51, pp. 717~723.
- (6) Shield, R. T. and Im, S., 1986, "Small Strain Deformations of Elastic Beams and Rods Including Large Deflections", J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), Vol. 37, pp. 491~513.
- (7) Im, S. and Shield, R. T., 1986, "Elastic Deformations of Strips and Circular Plates Under Uniform Pressure", J. Appl. Mech., Vol. 53, pp. 873~880.
- (8) Dahlquist, G., Björck, A. and Anderson, N., 1974, "Numerical Methods", Prentice Hall, New Jersey, U. S.A.
- (9) Gurtin, M. E., 1981, "An Introduction to Continuum Mechanics", Academic Press, New York, U.S.A.

부 록

단면의 중심선이 x_3 축 방향으로 놓여 있는 길이 l 의 봉을 고려하자. 봉은 측면 위에 작용하는 면력 $T_a(x_1, x_2)$ 와 체적력 $F_a(x_1, x_2)$ 그리고 $x_3=0$ 과 $x_3=l$ 의 면에 작용하는 적당한 수직 면력에 의해서

평면 변형률 상태에서 변형된다.

상반정리(reciprocal theorem)와 단축인장에 대한 해로부터 봉의 끝면에 작용하는 x_3 축 방향의 합력은

$$L = \nu \left\{ \int (x_1 T_1 + x_2 T_2) ds + \iint (x_1 F_1 + x_2 F_2) dx_1 dx_2 \right\}$$

으로 표현되고 $x_3 = l$ 의 단면에 작용하는 x_2 축 방향의 합모멘트는

$$M = \nu \left[\int \left\{ \frac{1}{2} T_1 (x_2^2 - x_1^2) - T_2 x_1 x_2 \right\} ds + \iint \left\{ \frac{1}{2} F_1 (x_2^2 - x_1^2) - F_2 x_1 x_2 \right\} dx_1 dx_2 \right]$$

으로 표현된다.