大韓機械學會論文集 第13卷 第4號, pp. 583~594, 1989.

〈論 文〉

强制 對稱 偏的 線型 振動子의 定常解

崔 延 善*

(1989년 3월 31일 접수)

Steady-State Solution of Forced Symmetric Piecewise-Linear Oscillator

Yeon-Sun Choi

Key Words: Symmetric Piecewise-Linear Oscillator(對稱 偏的 線型 振動子), Mechanical Clearance(機械 間隙), Contact/Uncontact(接觸/非接觸), Strong Nonlinear Vibration(强非線型振動)

Abstract

The strong nonliner dynamic behavior of mechanical systems in the presence of clearances are studied. The nonlinearity is induced from the assumed symmetric piecewise-linear characteristics for stiffness and damping by the contact and uncontact. Based on Stoker's assertion concering the reasoning beyond the occurrence of subharmonics, the nonlinear differential equation is converted to four nonlinear algebraic equations from the boundary conditions at the contact points. For a single contact per half exciting period, under the assumption of symmetric response, the steady-state solutions obtained are in agreement with those of numerical integration. Also a nondimensionalized formulation is made for the purpose of parametric studies.

1. 序 論

一般的으로 모든 機械는 각 부품의 상대운동으로 그 기계소기의 성능을 발휘하는 바 설계상에 주어진 間隙 또는 工作餘裕, 磨滅, 熱的 膨脹 등에 의해 間隙이 발생한다. 이러한 간극의 존재는 간헐적인 접촉, 비접촉의 심각한 磨滅, 疲勞 등의 材質變化와 騷音을 발생시킬 뿐만 아니라 기계시스템의 성능저하 혹은 space shuttle main engine의 지상실험에서 보고 된 바와 같이[1] 기계자체의 파괴현상에까지 이르고 있다.

間隙의 존재가 문제시 되는 경우로는 원자로에서 연료봉과 grid support 사이에 존재하는 간극으로 인한 연료봉 파괴문제[2], 齒車[3], 링크연결기구[4], 캠[5] 등의 기구학적 문제, 베어링과 축간의 간극으로 인한 로우터 회전운동[6], 관절 로봇[7], 다수의 무기시스템 등 많은 경우가 이에 해당된다.

간극의 존재로 인한 動的 擧動은 접촉에 따른 剛性(stiffness) 및 減衰指數(damping coefficient)의 변화를 수반하는 强非線型(strong nonlinear) 영역에 속하는 偏的 線型 振動(piecewise-linear vibration) 문제로 귀결되는 바 학문적으로 지대한 관심의 대상이나 아직 그에 대한 해석에 어려움을 겪고 있다. 이는 그 解(solutoin)가 複數解(multiple solutions)일 뿐만 아니라 각각의 해는 주어진 初期條件(initial conditions)에 따르고 있으며, subharmonic, superharmonic 등의 frequency demultiplication과 chaotic motion으로 연결되는 등 정상적인 자연과학의 상식을 초월하고 있기 때문이다[8].

현재까지 알려진 非線型 解析方法으로는 우선

*정회원, 성균관대학교 공과대학 기계설계학과

Bogoliubov[9], Childs[6]에 의해 시도된 攝動法(perturbation method)을 이용한 弱非線型 解析(weak nonlinear analysis)을 들 수 있으나 근본적으로 强非線型인 이러한 문제는 攝動法으로 해결될 수 없는 것이다[10]. 일반적으로 많이 쓰이는 방법으로는 數値積分法(numerical integration method)[11,12,13]을 들 수 있으나 round-off error로 인한 정확한 접촉시간의 계산이 불가능하여 실제와 전혀 다른 해가 될 가능성이 높을 뿐더러 複數解를 가지는 이러한 强非線型 問題에서 複數解의 추정이 불가능하고 특히 設計를 위한 매개변수해석을 위해서는 非實用的이다[14].

이러한 입장에서 접촉면의 剛性을 無限代 값으로 가정한 vibroimpact analysis가 Masri[15], Lean[16], Shaw[17], Stepanenko[7] 등에 의해 시도되었으나 無限代 剛性의 가정으로 接觸時間(duration of contact)이 나타나지 않고 接觸力(contact force)이 無限代가 되는 등, 接觸面의 강성값이 대단히 클 경우에나 적용가능한 해법이다.

좀더 근사해법으로 Den Hartog[18]부터 시작하여 Marsi[19], Bapat[20] 등이 境界條件을 이용하여 基本 調和解(fundamental harmonics)를 구하였으나 分數調和振動(subharmonics)등은 구하지 못하였다.

분수조화진동(subharmonics)까지 고려한 해법으로는 harmonic balance method의 변형을 시도한 Maezawa[21] 방법을 들 수 있는데, 複數解를 구할 수 있다는 長點은 있으나, mode shape를 가정함으로써 전 복수해를 구할 수 없고 다수의 연립 비선형 대수방정식(simultaneous nonlinear algebraic equations)을 풀어야 하는 短點이 있다.

이러한 관점에서 本 硏究는 機械的 間隙의 존재로 兩面 接觸에 의한 剛性 및 減衰가 對稱的으로 두번 생기는 强制 對稱 偏的 線型(forced symmetric piecewise-linear vibartion)에 대하여 非線型振動의 分數調和 定常解 과정을 설명한 Stoker 假說[22]로부터 분수조화진동을 포함한 복수의 정상해를 구하고 피로, 마멸 연구를 위한 접촉시간 및 접촉력을 계산하였다. 또한 强制 對稱 偏的 線型 振動子의 운동방정식을 無次元化하고 각 무차원 시스템 변수에 따른 周波數應答特性을 살펴보았다.

2. 運動方程式

간극이 존재하는 시스템은 강성과 감쇠값이 접촉, 비접촉에 따른 偏的 線型(piecewise-linear)의 형태로 변화하므로 Fig. 1과 같은 해석모델을 만든다.

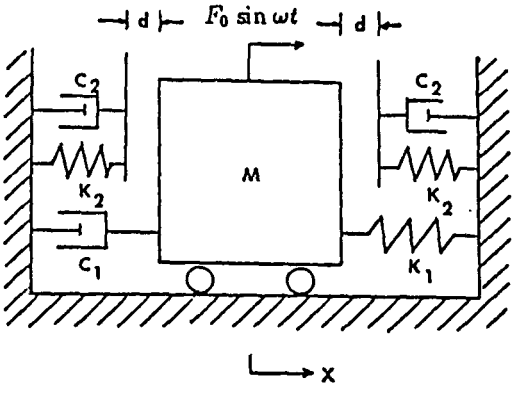

Fig. 1 Symmetirc piecewise-linear oscillator

Fig. 1의 해석모델에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x}+C_1\dot{x}+K_1x=F_0\sin\omega t : |x|\le d \qquad (1)$$
$$M\ddot{x}+(C_1+C_2)\dot{x}+(K_1+K_2)x=F_0\sin\omega t \pm K_2 d : |x|>d$$

分數調和運動(subharmonic vibration)을 고려하기 위해 無次元化된 시간을 아래와 같이 정한다.

$$\nu\theta=\omega t \qquad (2)$$

여기서 ν는 定數(integer)이고, ν가 1일 때에는 基本調和振動(fundamental harmonic vibration)이 되고, 2, 3일 때는 각각 2次, 3次 分數調和振動이 될 것이다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 접촉, 비접촉의 경우를 결합하여 식을 정리하면 다음과 같다.

$$x''+2\zeta_i\omega_i x'+\omega_i^2 x=F_{s0}\sin\nu\theta\pm F_{si} : i=1,2$$
$$\omega_1=\frac{\nu}{\omega}\sqrt{\frac{K_1}{M}},\quad \omega_2=\frac{\nu}{\omega}\sqrt{\frac{K_1+K_2}{M}} \qquad (3)$$
$$\zeta_1=\frac{C_1}{2\sqrt{K_1M}},\quad \zeta_2=\frac{C_2}{2\sqrt{(K_1+K_2)M}}$$
$$F_{s0}=\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\frac{F_0}{M},\quad F_{s1}=0,\quad F_{s2}=\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\frac{K_2d}{M}$$

여기서 '는 θ에 관한 미분이며, $i=1$은 비접촉의 경우이고, $i=2$는 접촉의 경우에 해당한다.

일반적으로 線型系에서는 自由振動이 점차 감쇠되어 定常解에 자유진동의 성분이 무시되나, 감쇠가 작은 비선형계의 자유진동은 그 자체가 여러 개의 固有周波數 性分을 갖고 있으며 강제진동 주파수가 자유진동의 어느 특정고유주파수와 일치할 때 자유진동의 영향은 정상해에 포함되므로 분수조화

진동이 발생하게 된다[22]. 이러한 Stoker의 가설로부터 비선형 진동의 정상해는 제차해(homogeneous solution)와 비제차해(nonhomogeneous solution)가 결합된 형태로부터 볼 수 있어 접촉, 비접촉영역에서 각각의 變位와 速度를 구하면 다음과 같이 된다.

$$x_i(\theta)=e^{\frac{-\zeta_i\omega_i}{\nu}}\left\{a_j\sin\frac{\eta_i\omega_i}{\nu}(\nu\theta-\alpha_j)+b_j\cos\frac{\eta_i\omega_i}{\nu}(\nu\theta-\alpha_j)\right\}+A_i\sin(\nu\theta+\tau-\phi_i)\pm\frac{F_{si}}{\omega_i^2}:\ i=1,\ 2\quad j=1,\ 2$$

$$x_i'(\theta)=e^{\frac{-\zeta_i\omega_i}{\nu}(\nu\theta-\alpha_j)}\left[a_j\omega_j\left\{\eta_i\cos\frac{\eta_i\omega_i}{\nu}(\nu\theta-\alpha_j)-\zeta_i\sin\frac{\eta_i\omega_i}{\nu}(\nu\theta-\alpha_j)\right\}+b_j\omega_i\left\{-\zeta_i\cos\frac{\eta_i\omega_i}{\nu}(\nu\theta-\alpha_j)-\eta_i\sin\frac{\eta_i\omega_i}{\nu}(\nu\theta-\alpha_j)\right\}\right]+A_i\nu\cos(\nu\theta+\tau-\phi_i):\ i=1,\ 2\quad j=1,\ 2$$

여기서,

$$a_j=\frac{1}{\eta_i}\left[\frac{x_j'}{\omega_i}-A_ir_i\cos(\tau-\phi_i+\alpha_j)+\zeta_i\left\{d-A_i\sin(\tau-\phi_i+\alpha_j)\mp\frac{F_{si}}{\omega_i^2}\right\}\right]$$

$$b_j=d-A_i\sin(\tau-\phi_i+\alpha_j)\mp\frac{F_{si}}{\omega_i^2}$$

$$\eta_i=\sqrt{1-\zeta_i^2}$$

$$A_i=\frac{F_0}{K}\frac{1}{\{(1-r_i^2)^2+(2\zeta_ir_i)^2\}^{1/2}}$$

$$r_i=\frac{\nu}{\omega_i}\quad K=\begin{cases}K_1:\ i=1\\ K_1+K_2:\ i=2\end{cases}$$

$$\phi_i=\tan^{-1}\frac{2\zeta_ir_i}{1-r_i^2}\quad \alpha_1=0,\ \alpha_2=\nu\theta_2,$$

$$\alpha_3=\pi\nu=\alpha_1$$

또한 j는 Fig. 2에서 접촉점을 표시하는 것으로써 i가 2일 때 j는 1이 되며, i가 1일 때 j는 2가 된다.

對稱 偏的 線型系(symmetric piecewise-linear system)의 定常解는 두 해가 대칭적이며, $\nu\pi$ 구간에서 1회 접촉한다고 가정하면 Fig. 2와 같이 표시되며, 접촉점에서 다음과 같은 境界條件을 만족해야 한다. 물론 이러한 가정은 강비선형 운동방정식인 식 (1)의 모든 應答特性을 알 수 있는 것은 아니다.

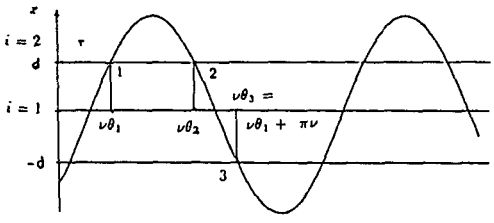

Fig. 2 Periodic motion

$$x=d,\quad x'=x_2'\qquad \text{at } \theta=\nu\theta_2 \tag{5}$$
$$x=-d,\ x'=x_3'=-x_1'\ \text{ at } \theta=\nu\theta_3$$

식 (5)의 경계조건을 식 (4)에 대입하여 정리하면

$$x_2=d=C_{12}a_1+C_{22}b_1+A_2\sin(\alpha_2+\tau-\phi_2)+\frac{F_{s_2}}{w_2^2}$$
$$x_2'=C_{32}a_1+C_{42}b_1+A_2\nu\cos(\alpha_2+\tau-\phi_2) \tag{6}$$
$$x_3=-d=C_{11}a_2+C_{21}b_2+A_1\sin\nu\pi+(\tau-\phi_1)$$
$$x_3'=-x_1'=C_{31}a_2+C_{41}b_2+A_1\nu\cos(\nu\pi+\tau-\phi_1)$$

이 되며, 여기서

$$C_{1i}=e^{\frac{-\zeta_i\omega_i\beta_i}{\nu}}\sin\frac{\eta_i\omega_i\beta_i}{\nu}$$

$$C_{2i}=e^{\frac{-\zeta_i\omega_i\beta_i}{\nu}}\cos\frac{\eta_i\omega_i\beta_i}{\nu}$$

$$C_{3i}=\omega_i(\eta_iC_{2i}-\zeta_iC_{1i})$$

$$C_{4i}=-\omega_i(\zeta_iC_{2i}+\eta_iC_{1i})$$

$$\beta_i=\pi\nu-\alpha_2$$

$$\beta_2=\alpha_2$$

식 (4)에서 A_1과 A_2는 F_0가 주어지면 바로 계산되는 값이며, A_2를 λA_1으로 놓으면 아래의 관계식이 성립한다.

$$\lambda=\frac{K_1\{(1-r_1^2)^2+(2\zeta_1r_1)^2\}^{1/2}}{(K_1+K_2)\{(1-r_2^2)^2+(2\zeta_2r_2)^2\}^{1/2}} \tag{7}$$

따라서 4개의 식 (6)은 τ, α_2, x_1', x_2'인 4개의 미지수를 갖는 非線型 代數方程式이 되어 각각의 미지수 값을 계산할 수 있다. 그러나 여기서 접촉각, α_2를 媒介變數로 주고 이에 따른 F_0값을 역으로 계산한다고 하면 즉, 실제문제에서는 起振力이 주어지고 이에 따른 接觸角을 계산하는 것이 통례이나 역으로 일정한 접촉각이 되기 위한 기진력을 계산하는 형태로써 식 (6)을 정리하면 복잡한 수식정리과정을 통하여 x_1', x_2', $A_1\cos\tau$, $A_1\sin\tau$를 미지수로 갖는 아래의 線型代數方程式의 형태로 치환될 수 있다.

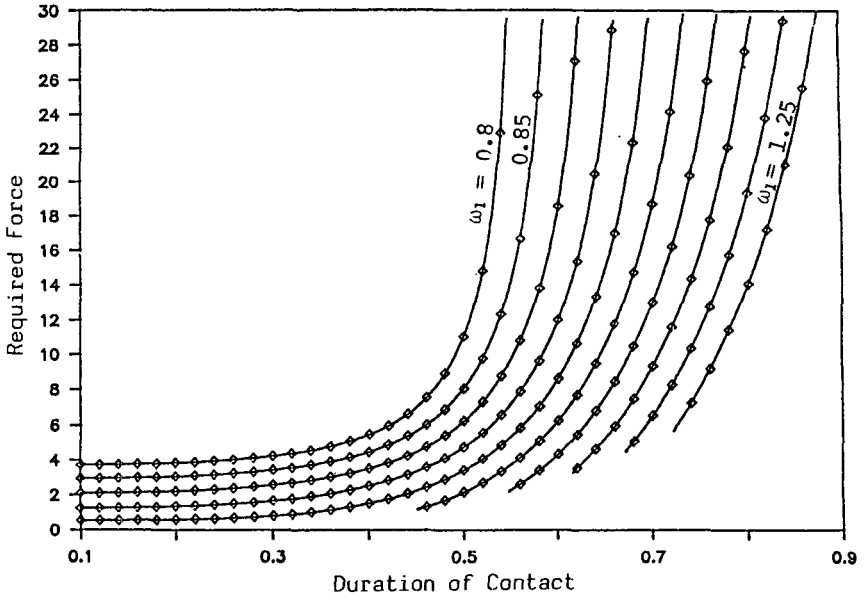

Fig. 3 The variation of contacting force vs. the duration of contact $M=1$, $K_1=1$, $K_2=25$, $C_1=0.05$, $C_2=0.1$, $d=10$

$[S]\{x_1', x_2', A_1\cos\tau, A_1\sin\tau\}^T=\{B\}^T$ (8)

行列 $[S]$와 $\{B\}^T$는 부록에 나타냈다. α_2는 최소 0에서 최대 $\nu\pi$까지 변할 것이므로 일정한 α_2값을 식 (8)에 대입하면 가우스 소거법(Gauss elimination)을 써서 주어진 미지수를 계산할 수 있다.

여기서 $x_1'<0$이거나 $x_2'>0$인 경우는 物理的인 의미를 갖지 못하므로 구해진 해는 버리고 $A_1\cos\tau$, $A_1\sin\tau$로부터

$$A_1=[(A_1\cos\tau)^2+(A_2\sin\tau)^2] \tag{9}$$

$$\tau=\tan^{-1}\frac{A_1\sin\tau}{A_1\cos\tau}$$

A_1과 τ를 계산할 수 있으며, A_1으로부터 F_0를 계산할 수 있고, 식 (4)에 대입하면 변위와 속도를 계산할 수 있다. 이 때 變位가 $\nu\pi$구간에서 2회 이상 접촉하고 있다면 이것 역시 가정에 위배되므로 삭제한다.

Table 1 Comparision of analytical solution (A) vs. numerical solution (N)
$M=1$, $K_1=1$, $K_2=25$, $C_1=0.05$, $C_2=0.1$, $d=10$, $\omega_1=1.1$

F_0	α_2		x_1'		x_2'	
	A	N	A	N	A	N
2.48	0.560	0.560	4.915	4.881	−4.784	−4.821
3.27	0.580	0.578	5.348	5.333	−5.196	−5.213
4.21	0.600	0.603	5.837	5.841	−5.660	−5.681
5.34	0.620	0.616	6.392	6.375	−6.185	−6.193
6.70	0.640	0.641	7.030	7.016	−6.787	−6.808
8.35	0.660	0.660	7.772	7.777	−7.484	−7.491
10.38	0.680	0.679	8.647	8.647	−8.305	−8.313
12.90	0.700	0.704	9.697	9.701	−9.287	−9.282
16.09	0.720	0.717	10.983	11.001	−10.485	−10.478
20.23	0.074	0.704	12.597	17.218	−11.987	−17.311

이상의 解析式으로부터 Fig. 3의 결과를 얻었다. 이러한 해석적 결과는 Runge-Kutta 법에 의한 수치해석의 결과와 비교할 때(Table 1), 잘 일치하고 있으며 수치 적분법 자체의 반복계산에 의한 數値誤差를 감안하면 해석해가 오히려 精密解로 思料된다.

3. 無次元解析

대칭 편적 선형계의 매개변수의 영향에 따른 특성을 조사하기 위해 다음과 같이 무차원해석을 수행한다. 일반적으로 비선형진동계의 고유진동수는 존재하지 않으나 媒介變數를 무차원화하기 위해 간극이 없는 비대칭편적선형진동계의 자유진동을 고려하면, 週期, T는 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$T=\pi\left(\sqrt{\frac{M}{K_1}}+\sqrt{\frac{M}{K_t}}\right) \tag{10}$$

$$K_t=K_1+K_2$$

따라서 고유진동수, ω_n의 정의로부터 等價剛性度(equivalent stiffness)를 정의할 수 있다.

$$\omega_n=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{K}{M}} \tag{11}$$

$$\bar{K}=\frac{4K_1K_t}{(\sqrt{K_1}+\sqrt{K_t})^2}$$

이러한 等價剛性度로부터 다음의 무차원변수 즉, 剛性度比(stiffness ratio)

$$\alpha=\frac{K_t}{K_1} \tag{12}$$

와 振動數比(frequency ratio)

$$\eta=\frac{\omega}{\omega_n} \tag{13}$$

을 이용하여 식 (11)을 아래와 같이 無次元化할 수 있다.

$$y''+f(y')+g(y)=\sigma^2\sin\nu\theta \tag{14}$$

$$f(y')=\begin{cases}2\zeta_1\sigma y' : |y|\le\xi^* \\ 2\zeta_2\sigma y' : |y|>\xi^*\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}\bar{\omega}_1^2 y & : |y|\le\xi^* \\ \bar{\omega}_2^2 y\mp\sigma^2\delta_i^* & : |y|>\xi^*\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{\nu}{\eta}\qquad y=\frac{x\bar{K}}{F_0}$$

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2\alpha}=\sqrt{\frac{K_1}{\bar{K}}}$$

$$\alpha_2=\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2}=\sqrt{\frac{K_t}{\bar{K}}}$$

$$\bar{\omega}_1=\alpha_1\sigma$$

$$\bar{\omega}_2=\alpha_2\sigma$$

$$\xi^*=\frac{d\bar{K}}{F_0}$$

$$\delta_1^*=0$$

$$\delta_2^*=\frac{d(K_1-K_t)}{F_0}$$

이와 같이 수식을 무차원화하면 무차원변수 값에 따라 접촉이 전혀 생길수 없는 경우도 있을 수 있다.

따라서 접촉하기 위한 最小無次元間隔, ξ^*은 식 (14)로부터 접촉관련항을 제외한 선형계에 대해서 정상해를 구하면 알 수 있게 된다.

Fig. 4는 적어도 Fig. 4에 나타난 선도보다 큰 값을 택하여야만 접촉에 따른 강비선형현상을 알 수 있다. 다만, ξ^* 값이 Fig. 4에 나타난 선도보다 작은 값이라도 초기조건의 영향에 따라서는 정상해에서 접촉현상이 나타날 수 있다. 여기서 정점(peak)이 $\eta=1$이 아닌 곳에서 발생하는 것은 식 (11)에서 人爲的인 고유진동수 값을 택하였기 때문이다. 또한 작은 진동수비 영역에서 작은 ξ^*은 多衆接觸(multiple contacts) 혹은 비대칭 응답이 일어날 가능성이 많다. 본 연구에서는 ξ^*을 0.1로 택하여 $\eta=3.2$보다 큰 영역인 선형계에서 비접촉이 일어날 수 있는 경우를 알아본다. 2장에서와 같이 Stoker 가정으로부터 식 (14)를 접촉, 비접촉 영역에서 각각 변위와 속도에 대해 계산하고 식 (5)의 경계조건식을 대입하고 α_2를 매개변수로 하는 선형 대수 방정식을 만들면 부록과 거의 유사한 행렬 $[S]$와 $\{B\}^T$가 계산된다. 식 (14)의 σ^2은 常數이며, 이는 식 (3)의 F_{s0}에 해당하는 값으로서 하나 혹은 그 이상의 특별해가 α_2인 때에만 성립하므로 α_2 변화에 따른 상수 σ^2를 만족하는 값을 찾아야만 한다. 이는 컴퓨터 프로그램상에서 線型補間法(linear interpolation)을 써서 해결한다.

이상의 해석과정을 컴퓨터 프로그램화하여 그 해를 구하고, 4차 Runge-Kutta 수치적분법의 해와 비교하여 Fig. 5와 Fig. 6에 평균진폭과 접촉시간을 주파수영역에서 도시한 결과, 수치적분의 해와 해석적 해가 많은 경우 잘 일치함을 보여주고 있어 Stoker의 假說로부터 출발한 해석해가 실제적으로 妥當性이 있음을 증명하고 있다. 물론, 본 연구의 가정인 $\nu\pi$ 구간에서 1회 접촉하는 경우에 대해서만 해석적 수식이 만족하므로 다중접촉의 경우는 제외되었으나 多衆接觸, 非對稱應答을 가정하여 수식을 유도하면 좀더 많은 영역에서 수치해와 일치될 것이다.

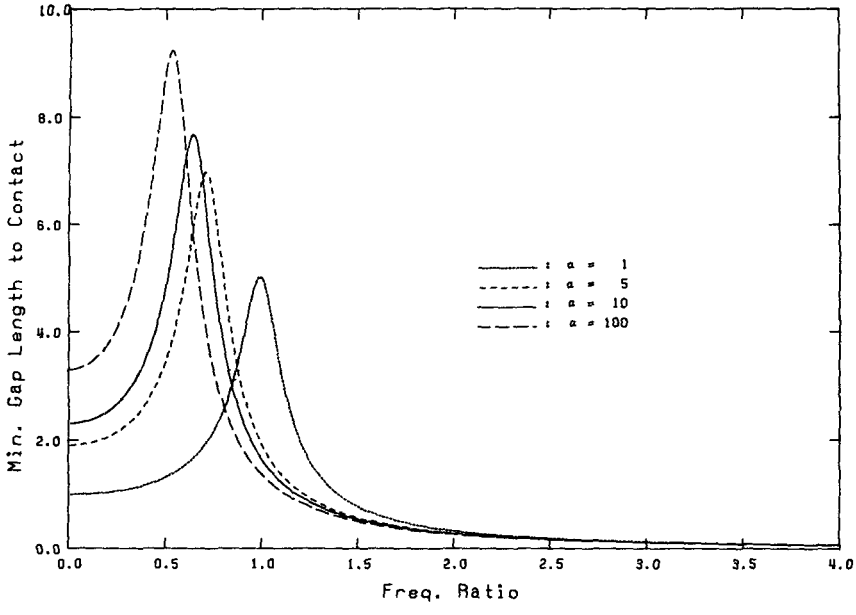

Fig. 4 Minimum nondimensionalized gap length to contact

$\eta<3.0$ 영역에서는 기본조화진동이 $\eta>3.3$ 이상에서는 3차 분수조화진동(third order subharmonics)이 수치해와 일치함을 보여주고 있다. 다만 2차 분수조화진동의 해석해는 수치해에서는 나타나고 있지 않다. 그러나 수치해는 주어진 초기조건에 따라 한 형태의 安定解만 나타나므로 다른 초기조건에서 Fig. 5와 6에 나타난 불일치점들이 실제 물리계에서 존재할 가능성이 있다. $\eta<1$ 영역에서 불규칙한 응답은 Fig. 4를 통하여 예상되었던 다중접촉 혹은 비대칭응답에 따른 복잡한 거동에 의한

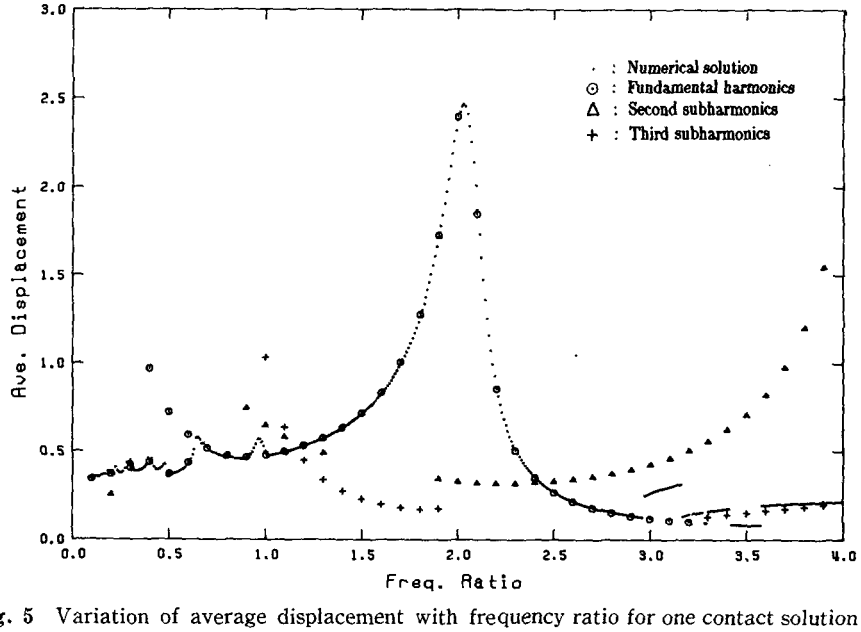

Fig. 5 Variation of average displacement with frequency ratio for one contact solution for symmetric case; $\alpha=10$, $\zeta=0.1$, $\xi^*=0.1$

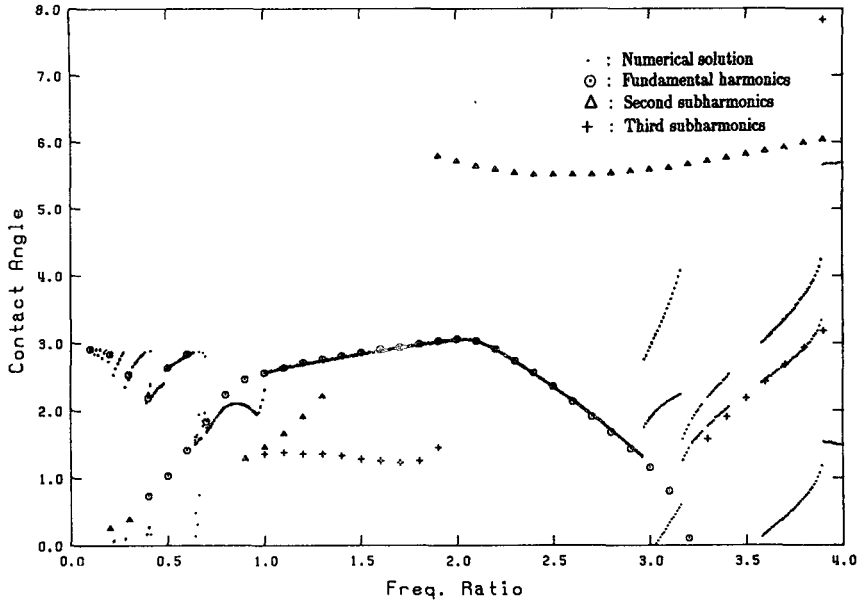

Fig. 6 Variation of duration of contact with frequency ratio for one contact solution for symmetric case; $\alpha=10$, $\zeta=0.1$, $\xi^*=0.1$

것이고, $\eta>3$ 영역에서의 불규칙성은 접촉을 위한 최소무차원간격이 0.1보다 작음으로서 초기조건의 영향에 따라 접촉이 발생되었음을 나타낸다. Fig. 5와 6에 나타나는 不連續領域은 limit cycle 혹은 chaotic motion이 존재할 가능성이 있는 영역으로 추론될 수 있다.

4. 媒介變數解析

전장의 無次元解析은 일정매개변수에 대해서 해

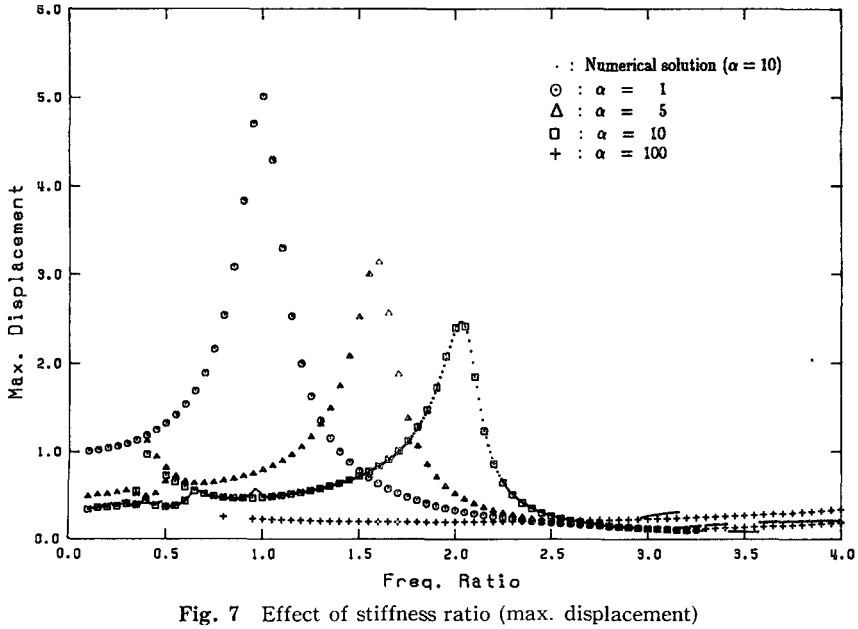

Fig. 7 Effect of stiffness ratio (max. displacement)

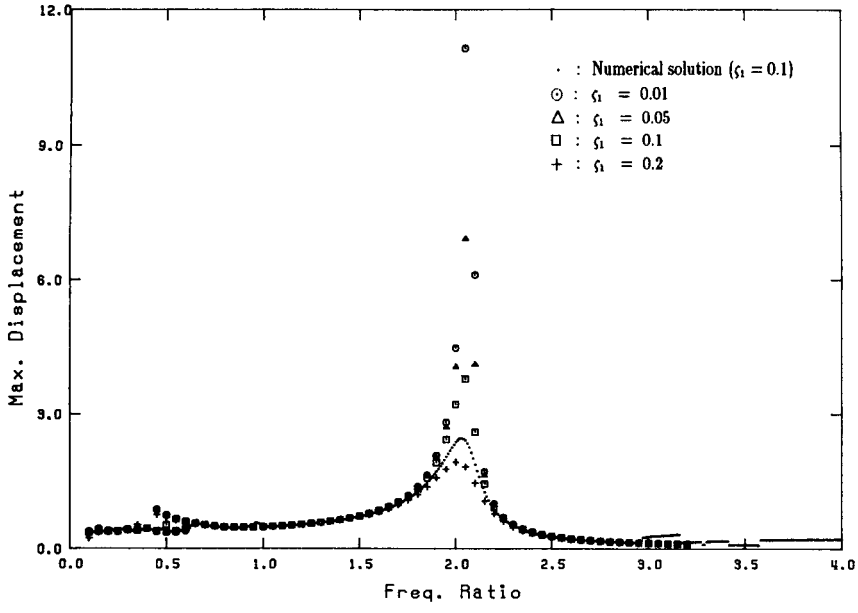

Fig. 8 Effect of damping ratio (max. displacement)

의 정확성을 조사한 것으로서 이를 바탕으로 매개변수의 변화에 따른 應答特性을 고려하고자 한다. 본 해석의 단일, 대칭접촉 가정은 基本調和振動 領域에서 잘 일치함을 보였으므로 본 연구에서는 基本調和振動만을 고려한다. 특히 接觸力과 接觸時間은 계의 응답특성에 중요한 因子로서 최대변위와 접촉각을 계산하여 진동수비 변화에 따른 각각의 값을 도시한다.

먼저 剛性度比(stiffness ratio), α의 영향이 Fig. 7에 도시되었다. $\alpha=1$인 경우는 $K_2=0$로서 바로

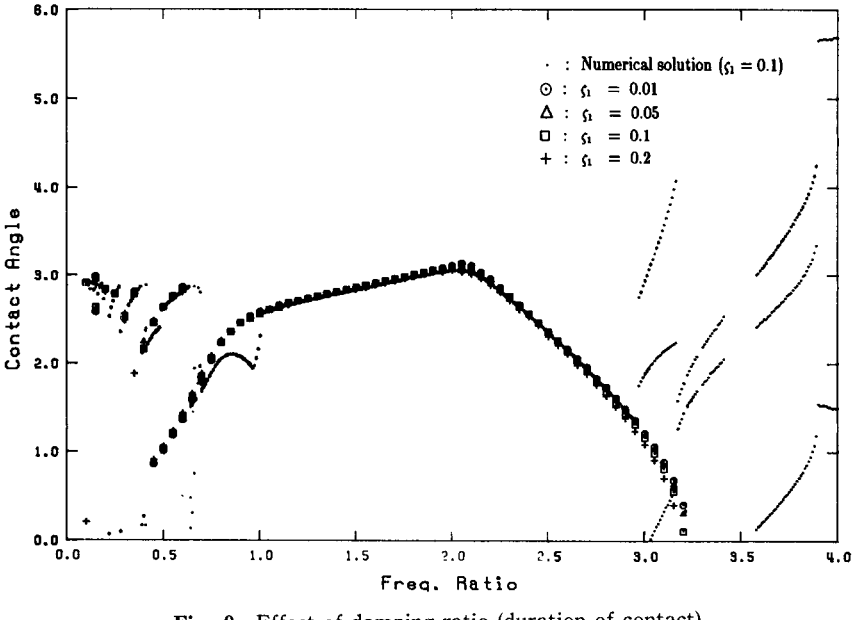

Fig. 9 Effect of damping ratio (duration of contact)

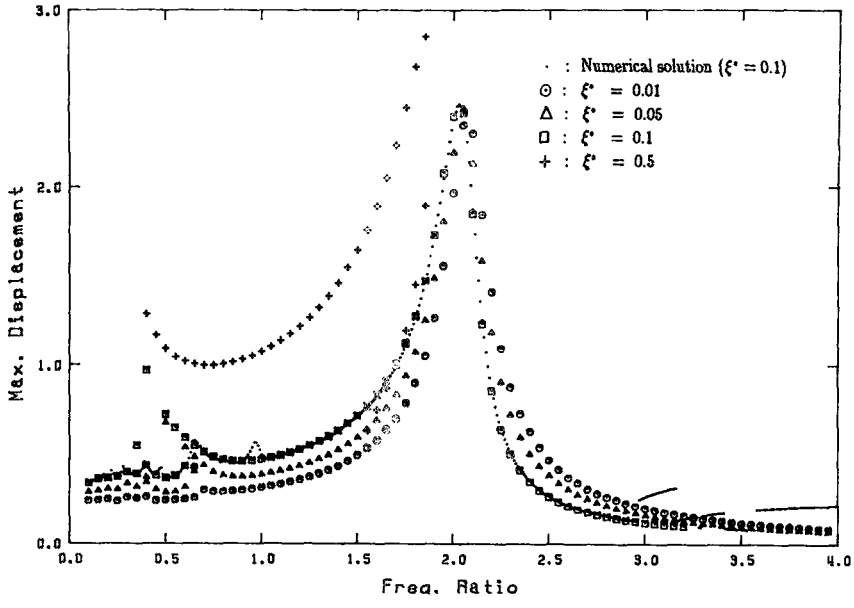

Fig. 10 Effect of gap length (max. displacement)

선형계에 해당하며, Fig.7에서 頂點(peak)은 η =1인 경우를 나타내고 있으나, 강성도비가 커짐에 따라 頂點은 고주파영역으로 移動하며 최대진폭이 점점 감소함을 보여주고 있으며, 강성도비가 1이 아닌 경우 저주파 영역에서 비대칭, 다중접촉응답 특성으로 인해 불연속응답이 나타나고 있다.

계의 감쇠비 ζ_1의 변화에 따른 응답특성은 Fig. 8과 Fig. 9에 도시하였다. Fig. 8에서 알 수 있듯이 주파수의 변화에 따른 최대변위는 공진영역에서만 큰 영향을 나타낼 뿐 기타영역에서는 감쇠값의 영

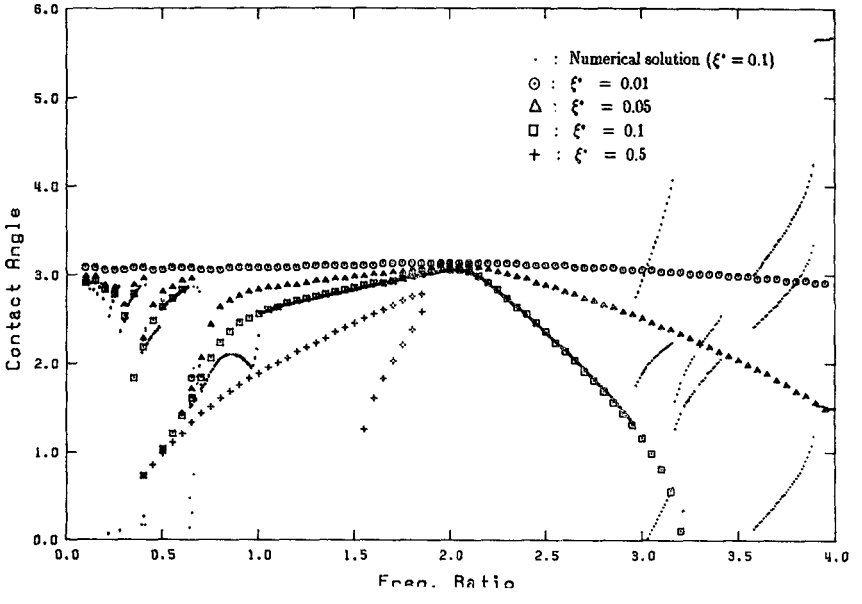

Fig. 11 Effect of gap length (duration of contact)

향이 거의 무시됨을 알 수 있으며, Fig. 9에서 나타난 접촉각은 주파수의 변화에 거의 무관함을 알 수 있다. 일반적으로 비선형계는 감쇠비가 작은 경우 비선형성에 기인한 특이응답이 크게 나타나므로 비선형계해석에서 감쇠비는 중요한 매개변수이나 이 경우에는 감쇠비의 감소에 따라 변위는 증대하는 선형응답특성을 보여주고 있으나 접촉각의 변화는 감쇠비와 무관함을 보여주고 있다.

Fig. 10과 Fig. 11는 間隙의 변화에 따른 응답특성을 검토하였다. 간극이 클수록 高周波領域에서 非接觸이 일어나 접촉이 있는 경우로 전개한 수식(8)로서는 그 응답을 보여주고 있지 못하며, Fig. 10에서 보인 바와 같이 低周波領域에서는 간극이 커질수록 最大變位 값이 커지며 고주파영역에서는 그 반대가 됨을 알 수 있다. Fig. 11은 간극이 작을수록 接觸角은 커져 π 값에 접근함을 보여주고 있다.

5. 結 論

기계시스템내 간극이 대칭적으로 존재하는 경우 강제진동에 의한 응답특성을 살펴보았다. 간극의 존재로 인한 접촉과정은 접촉부위의 강성과 감쇠를 수반함으로써 계의 강성과 감쇠가 偏的 線型的(piecewise linear)으로 증가하는 대표적인 强非線型系(strong nonlinear system)가 된다.

정상해는 대칭적으로 반주기당 1회 접촉하는 응답을 가정하고 비선형진동계의 정상해에 대한 Stoker 假說로부터 접촉점에서의 변위와 속도의 연속성을 근거로 하여 해석적으로 분수조화진동을 포함한 복수의 정상해를 구하였다. 해석해는 수치적분의 해와 상당히 많은 진동수영역에서 특히 공진영역에서 잘 일치함을 보여주었으나 대칭, 단일접촉의 가정을 만족치 않는 저주파, 고주파 영역에서는 잘 일치하지는 않았으나 대략적인 응답특성을 알 수 있었다. 이는 저주파영역에서 다중접촉이, 고주파수영역에서는 비대칭 분수조화진동이 일어남으로써 대칭, 단일접촉의 가정으로서는 복잡한 수식의 유도과정에도 불구하고 강비선형 응답특성을 알아내기에는 미흡하였기 때문이다. 非對稱應答, 多衆接觸應答을 가정하여 본 해석방법을 적용하면 수식계산은 더 복잡할 것이나 더 많은 영역내에서 엄밀해를 구할 수 있을 것이다.

해석적 방법으로 계의 매개변수 변화에 대한 영향을 조사하여 아래의 결과를 알았다.

(1) 剛性比의 증가는 공진영역이 고주파영역으로 이동하고 있으며, 최대진폭이 감소함을 알 수 있었으며,

(2) 계와 접촉부위의 감쇠지수의 증가는 진폭만이 변화할 뿐 접촉각에는 변화가 없었고,

(3) 간극의 증가는 저주파영역에서 변위의 증가를, 고주파영역에서 변위의 감소를 초래하며, 전주파수영역에서 접촉각의 감소를 유도하였다.

본 연구는 기계시스템내 간극의 존재로 인한 强非線型 振動現象을 廣大域周波數領域에서 응답특성을 규명함으로써 많은 영역에서 해석적 방법의 타당성을 입증하였다. 다만, 예측불가한 비선형성은 대칭, 단일접촉으로는 미흡하여 이후 非對稱應答, 多衆接觸應答에 대한 연구가 더 필요하며, 해의 물리적으로 존재가능여부 즉, 안정성해석과 안정해가 되기 위한 吸引領域(domain of attraction) 해석이 더 요구되고 있다. 또한 본 연구가 순수 이론적 입장에서 전개된 것으로서 실제 공학시스템에 이용하여 적절한 매개변수의 선택(특히 감쇠지수)에 대한 해석적 연구와 더불어 본 연구에서 입증된 비선형 진동현상은 실험을 통하여 증명될 필요가 있다.

後 記

이 논문은 1988년도 한국과학재단 연구비로 수행된 것이며, 이에 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

(1) Glease, J. R. and Bukley, P., 1984, "Effect of Bearing Deadbands on Bearing Loads and Rotor Stability", MSFC Advanced High Pressure O_2/H_2 Technology Conference Proceedings G. Marshall Flight Center; Huntsville, Alabama.

(2) Bohm, G. J. and Nahavandi, A. N., 1972, "Dynamic Analysis of Reactor Internal Structures with Impact between Components", Nuclear Science and Engineering, Vol. 47, pp. 391~408.

(3) Crossley, F. R. E. and Azar, R. C., 1977, "Digital Simulations of Impact Phenomenon in Spur Gear System", ASME, J. of Eng. Ind., pp. 792~798.

(4) Dubowsky, S., and Freudenstein, F., 1971, "Dynamic Analysis of Mechanical System with Clearances", ASME, J. of Eng. Ind., pp. 305~316.

(5) Winfrey, R. C., Anderson, R. V. and Gnilka, C. W., "Analysis of Machinery with Clearances", ASME, J. of Eng. Ind., pp. 695~703.

(6) Childs, D. W., 1982, "Fractional-Frequency Rotor Motion due to Nonsymmetric Clearance Effects", ASME, J. of Energy and Power, Vol. 104, pp. 533~541.

(7) Stepanenko, Y. and Sankar, T. S., 1986, "Vibro-Impact Analysis of Control Systems with Mechanical Clearance and Its Application to Robotic Actuators", ASME, J. of Dynamic System, Measurement, and Control, Vol. 108, pp. 9~16.

(8) Moon, F. C., 1985, "Nonlinear Dynamical Systems", Appl. Mech. Rev., Vol. 38, No. 10, pp. 1284~1286.

(9) Bogoliubov, N. N. and Mitropolsky, Y. A., 1961, Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations, Gordon and Breach Science Publishers, New York.

(10) Rosenberg, R. M., 1961, "Nonlinear Oscillations", Appl. Mech. Rev., Vol. 14, No. 11, pp. 837~841.

(11) Thompson, J. M. T. and Elvey, J. S. N., 1984, "Elimination of Subharmonic Resonances of Compliant Marine Structures", Int. J. of Mech. Sci., Vol. 26, No. 6, pp. 419~426.

(12) Shin, Y. S., Jendrejczyk, J. A. and Wambsganss, M. W., 1977, "Vibration of Heat Exchanger Tube with Tube/Support Impact", ASME paper No. 77-JPGC-NE-5.

(13) Nyguen, D. T., 1984, "Study of Single Degree-of-Freedom Restrained Vibratory Systems", M. S. Thesis, Texas A & M University.

(14) Taylor, D. L. and Kumar, B. R. K., 1982, "Closed Form Steady-State Solution for the Unbalance Response of a Rigid Rotor in Squeeze Film Damper", ASME paper No. 82-GT-263.

(15) Masri, D. F., 1965, "Analtical and Experimental Studies of Impact Dampers", Ph. D. Dissertation, California Institute of Technology.

(16) Lean, G. H., 1971, "Subharmonic Motions of Moored Ship Subject to Wave Action", Trans. Roy. Inst. Naval Arch., Vol. 113, pp. 387~399.

(17) Shaw, S. W. and Holmes, J. P., 1983, "A Periodically Forced Piecewise-Linear Oscillator", J. of Sound and Vibrations, Vol. 108, pp. 129~155.

(18) Den Hartog, J. P. and Heiles, R. M., 1936, "Forced Vibration in Nonlinear Systems with Various Combinations of Linear Springs", ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 127~130.

(19) Masri, S. F., 1978, "Analytical and Experimental Studies of a Dynamic System with a Gap", ASME, J. of Mechanical Design, Vol. 100, pp. 480~486.

(20) Bapat, C. N. and Sankar, S. 1986, "Exact Analysis of an Oscillator Hitting a Stop", J. of Vibrations, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107, pp. 347~350.

(21) Maezawa, S., 1961, "Steady, Forced Vibration of Unsymmetrical Piecewise-Linear System", Trans. JSME, Vol. 4, No. 14, pp. 201~212.

(22) Stoker, J. J., 1950, "Nonlinear Vibrations", Interscience Publishers, New York.

부 록

$$S(1,\ 1)=\frac{C_{12}}{\eta_2\omega_2}$$

$$S(1,\ 2)=0$$

$$S(1,\ 3)=p_x\cos\psi_2-p_y\sin\psi_2$$

$$S(1,\ 4)=p_x\sin\psi_2+p_y\cos\psi_2$$

$$S(2,\ 1)=\frac{C_{32}}{\eta_2\omega_2}$$

$$S(2,\ 2)=-1$$

$$S(2,\ 3)=r_x\cos\psi_2-r_y\sin\psi_2$$

$$S(2,\ 4)=r_x\sin\psi_2+r_y\cos\psi_2$$

$$S(3,\ 1)=0$$

$$S(3,\ 2)=\frac{C_{11}}{\eta_1\omega_1}$$

$$S(3,\ 3)=v_x\cos\psi_1-v_y\sin\psi_1$$

$$S(3,\ 4)=v_x\sin\psi_1+v_y\cos\psi_1$$

$$S(4,\ 1)=1$$

$$S(4,\ 2)=\frac{C_{31}}{\eta_1\omega_1}$$

$$S(4,\ 3)=w_x\cos\psi_1-w_y\sin\psi_1$$

$$S(4,\ 4)=w_x\sin\psi_1+w_y\cos\psi_1$$

$$B(1)=dK_1\left(-\frac{C_{12}\zeta_2}{\eta_2}-C_{22}+1\right)\Big/(K_1+K_2)$$

$$B(2)=-dK_1\left(\frac{C_{32}\zeta_2}{\eta_2}+C_{42}\right)\Big/(K_1+K_2)$$

$$B(3)=-d\left(1+\frac{C_{11}\zeta_1}{\eta_1}+C_{21}\right)$$

$$B(4)=-d\left(\frac{C_{31}\zeta_1}{\eta_1}+C_{41}\right)$$

$$p_x=\left(-\frac{C_{12}r_2}{\eta_2}+\sin\alpha_2\right)\lambda$$

$$p_y=\left(-\frac{C_{12}\zeta_2}{\eta_2}-C_{22}+\cos\alpha_2\right)\lambda$$

$$r_x=\left(-\frac{C_{32}r_2}{\eta_2}+\nu\cos\alpha_2\right)\lambda$$

$$r_y=\left(-\frac{C_{32}\zeta_2}{\eta_2}-C_{42}-\nu\sin\alpha_2\right)\lambda$$

$$v_x=C_{11}(-r_1\cos\alpha_2-\zeta_1\sin\alpha_2)/\eta_1 - C_{21}\sin\alpha_2+\sin\nu\pi$$

$$v_y=C_{11}(r_1\sin\alpha_2-\zeta_1\cos\alpha_2)/\eta_1-C_{21}\cos\alpha_2+\cos\nu\pi$$

$$w_x=C_{31}(-r_1\cos\alpha_2-\zeta_1\sin\alpha_2)/\eta_1 - C_{41}\sin\alpha_2+\nu\cos\nu\pi$$

$$w_y=C_{31}(r_1\sin\alpha_2-\zeta_1\cos\alpha_2)/\eta_1 - C_{41}\cos\alpha_2-\nu\sin\nu\pi$$