

< 論 文 >

직교이방성 적층 복합재료 원추셀의 자유진동

이 영 신* · 강 인 식**

(1989년 4월 11일 접수)

Free Vibration of Orthotropic Laminated Composite Conical Shells

Young Shin Lee and In Shik Kang

Key Words: Free Vibration(자유진동), Conical Shell(원추셀), Specially Orthotropic(특수 직교이방성), Laminated Composite(적층 복합재료), Frequency Parameter(진동수 매개변수)

Abstract

Free vibration of orthotropic laminated composite conical shells with constant thickness are considered. Governing frequency equations are derived based on the Flügge theory and Galerkin method is applied for the numerical analysis. Comparisons are made between present results and others for the isotropic conical shells and numerical results are obtained based on these results for the specially orthotropic laminated composite conical shells with simply supported edges. Variations of frequency parameter on the change of material properties, stacking sequences, stacking number, geometrical parameters and orthotropic parameters are considered in the analysis.

1. 서 론

원추셀은 기계 구조물의 중요한 구성 요소를 이루고 있는 부재로서 수력노즐(hydraulic nozzle), 확산기(diffuser), 혼 안테나(horn antenna), 노즈 콘(nose cone) 등 일반 산업설비로부터 항공기, 우주 구조물에 이르기까지 그 응용범위가 대단히 넓다. 현재 이러한 구조물이 대규모화, 고강도화 및 경량화됨에 따라 정하중에 근거한 일반적인 설계방식에서 벗어나 시간에 따라 주기적 또는 비주기적으로 변화하는 가진력으로 인한 응력이나 대변위의 발생 가능성에 대비한 설계기법에 많은 관심을 기울이고 있다. 이에 따라 이들 구조물에서 진동특성은 큰 관심이 되고 있다. 등방성 원추셀의 자

유진동에 대해 Garnet와 Kempner⁽¹⁾, Saunders와 Wisniewski⁽²⁾는 Rayleigh-Ritz method로 해석하였고 Weingarten⁽³⁾은 Galerkin method로, Irie⁽⁴⁾ 등은 전달행렬법으로 해석하였으며 염영하⁽⁵⁾ 등은 원추형 셀의 음향조절에 관한 실험적 연구를 하였고, 정석주⁽⁶⁾의 원추형 셀의 축대칭 진동형에 대한 수치해석 등방성 원추셀에 대하여 많은 연구가 수행되었다⁽⁷⁻¹²⁾.

최근에 이르러 이들 셀 구조물에 있어 높은 비강성 및 비강도의 요구에 따라 복합재료가 널리 채용되고 있다. 이들 복합재료는 일반적인 이방성을 가지나 많은 경우에 직교이방성이나 직교이방성 적층셀로 취급하고 있다. 이 중에서도 직교이방성 판이나 원통셀의 진동에 관한 연구는 비교적 활발하게 수행되고 있으나^(13,14) 직교이방성 원추셀은 기하학적 형상과 동적거동을 특성화하는 것이 수학적으로 훨씬 복잡하게 되기 때문에 판이나 원통셀보다 그

*정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계학과
**정회원, 충남대학교 대학원, 현재 국방과학연구소

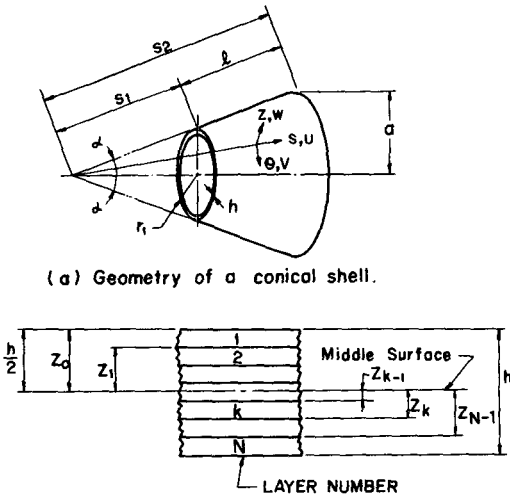
다지 많이 알려져 있지 않다⁽¹⁵⁻²²⁾. Chandrasekaran⁽¹⁵⁾ 등과 Sankaranarayanan⁽¹⁶⁾ 등은 적층 원추셀의 진동을 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석하였고, Penzes⁽¹⁷⁾ 등은 복합재료 원추셀의 진동을 FEM으로 구하였으며 Wilkins⁽¹⁸⁾ 등은 샌드위치 원추셀의 진동을 Galerkin 방법으로 해석하였다.

본 연구에서는 양단이 단순지지되어 있는 특수 직교이방성 적층 복합재료 원추셀의 자유진동에 관한 지배방정식을 Flügge 이론으로부터 유도하고 Galerkin 방법을 적용하여 해를 구하였으며, 원추셀의 기하학적 매개변수 및 직교이방성 매개변수의 변화에 따르는 진동특성을 고찰하였다.

2. 수학적 공식화

2.1 해석 모델

Fig. 1은 직교이방성 복합재료 적층판을 적층시킨 균일한 두께의 얇은 절두형 원추셀을 보여준다. 셀중앙면 위의 임의의 점에서 s축을 자오선방향, θ축을 원주방향, s-θ평면에 수직인 방향을 z축으로 취하였고, 적층판의 섬유방향은 자오선방향을 기준으로 ±φ 각도로 배열하였으며, 각 좌표방향으로의 변위를 u, v, w로 하였다. 이 셀은 정점으로부터 자오선방향으로 거리 s₁인 곳에서 절두되어 있고 절두된 작은쪽 단의 반경은 r₁, 두께는 h, 폭지각은 2α이다.

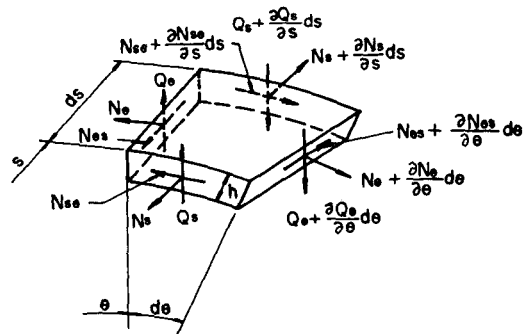


(a) Geometry of a conical shell.
(b) Geometry of a N-layered laminate
Fig. 1 Geometry of a laminated conical shell

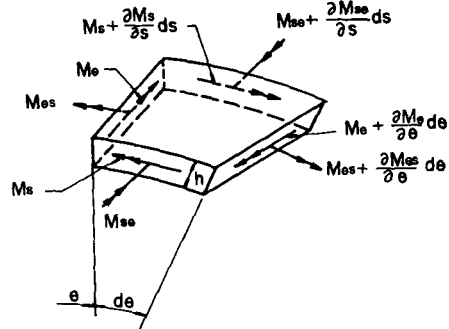
2.2 운동 방정식

Fig. 2에서 보여지는 원추셀의 요소의 합응력 (stress resultants)과 합모멘트(stress couples)에 대한 Flügge 운동방정식은 다음과 같다⁽²³⁾. 여기서 shear effect는 고려하지 않았다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \cdot N_s) + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} - \frac{1}{s} N_{\theta} \\ & \quad + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \cdot N_{s\theta}) + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{s} N_{\theta s} \\ & \quad - \frac{1}{s \tan \alpha} Q_{\theta} + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{1}{s \tan \alpha} N_{\theta} + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \cdot Q_s) \\ & \quad - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \cdot M_s) + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} - \frac{1}{s} M_{\theta} = Q_s \\ & \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \cdot M_{\theta s}) + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{s} M_{\theta s} = Q_{\theta} \end{aligned} \tag{1}$$



(a) Stress resultants



(b) Stress couples

Fig. 2 Stress resultants and stress couples in the conical shell

여기서 t 는 시간을 나타낸다.

셀 중앙면에서의 변형률-변위 관계식과 곡률변화 (change of curvature)⁽²³⁾는

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \chi_s = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u + \frac{1}{\tan \alpha} w \right), \\ \chi_\theta &= -\frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s}, \\ \gamma_{s\theta} &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right), \\ \chi_{s\theta} &= -\frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

이다. N 층 적층셀인 경우 합응력과 합모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 각각 신장, 연계 및 굽힘 강성계수 (extensional, coupling and bending stiffness)로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k [z_k - z_{k-1}] \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k [z_k^2 - z_{k-1}^2] \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k [z_k^3 - z_{k-1}^3] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 지수 k 는 k 번째 적층을 나타내고 \bar{Q}_{ij} 는 변환 축소강성계수 (transformed reduced stiffness)이다. 적층의 두께가 균일하고 중앙면에 대해 대칭인 특수 직교이방성 적층의 경우 $B_{ij}=0$ 이고 식 (3)에 식 (2)를 대입하면

$$\begin{aligned} N_s &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial s} + A_{12} \left(\frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{s} u \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s \tan \alpha} w \right) \\ N_\theta &= A_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + A_{22} \left(\frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{s} u \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s \tan \alpha} w \right) \\ N_{s\theta} &= A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{s} v \right) \\ M_s &= D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + D_{12} \left(\frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \\ M_\theta &= D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + D_{22} \left(\frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \\ M_{s\theta} &= D_{66} \left(\frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 이 식을 식 (1)에 대입하면 다음과 같이 변위

u, v, w 에 관한 특수 직교이방성 적층 복합재료 원추셀의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &A_{11} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) - \frac{A_{12}}{s^2} u \\ &\quad + \frac{A_{12} + A_{66}}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} - \frac{A_{22} + A_{66}}{s^2 \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{A_{12}}{s \tan \alpha} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{A_{22}}{s^2 \tan \alpha} w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &\frac{A_{22} + A_{66}}{s^2 \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{A_{12} + A_{66}}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \\ &\quad + \frac{A_{66}}{s} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{A_{66}}{s^2} v + \frac{A_{22}}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{A_{22}}{s^2 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{D_{12} + D_{66}}{s^2 \sin \alpha \tan \alpha} \\ &\quad \times \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta} - \frac{D_{22}}{s^4 \sin^3 \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \\ &\quad - \frac{D_{22}}{s^3 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ &\frac{A_{12}}{s \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{A_{22}}{s^2 \tan \alpha} u + \frac{A_{22}}{s^2 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{A_{22}}{s^2 \tan^2 \alpha} w + \frac{2(D_{12} + D_{22} + D_{66})}{s^4 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &\quad - \frac{2(D_{12} + D_{66})}{s^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + \frac{D_{12} + D_{22}}{s^3} \frac{\partial w}{\partial s} \\ &\quad + \frac{2(D_{66} + D_{12})}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2} - \frac{D_{22}}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ &\quad + \frac{2D_{11}}{s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{D_{22}}{s^4 \sin^4 \alpha} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \\ &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

3. 일반해

원추셀의 임의의 모우드에 대한 변위 관계식을 다음과 같이 세 함수의 곱의 형태로 가정한다.

$$\begin{aligned} u(s, \theta, t) &= U(s) \cos n\theta \sin \omega t \\ v(s, \theta, t) &= V(s) \sin n\theta \sin \omega t \\ w(s, \theta, t) &= W(s) \cos n\theta \sin \omega t \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 n 은 원주 방향의 모우드 수이며 $U(s), V(s), W(s)$ 는 각각 자오선 방향, 원주 방향 및 수직 방향의 변위에 상당하는 모우드 함수이다. 이 변위식을 식 (6)에 대입하고

$$s = s_1 e^{cn}, \quad s_1 \leq s \leq s_2 \quad (8)$$

로 좌표변환을 하면 다음과 같이 모달함수에 관한 진동수 방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -c^2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -c^2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c^2\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서 전동수 매개변수 (frequency parameter) λ 는

$$\lambda = (\rho h s_1^2 / A_{11}) \omega^2 \quad (10)$$

이고 선형 편미분 연산자 (linear partial differential operator) L_{ij} ($i, j=1, 2, 3$)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_{11} &= e^{-2c\eta} \left[c \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - (c^2 \bar{A}_{22} + \frac{\bar{A}_{66} c^2 n^2}{\sin^2 \alpha}) \right], \\ L_{12} &= e^{-2c\eta} \left[\frac{(\bar{A}_{66} + \bar{A}_{12}) c n}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{(\bar{A}_{66} + \bar{A}_{22}) n}{\sin \alpha} \right], \\ L_{13} &= e^{-2c\eta} \left[\frac{\bar{A}_{12}}{\tan \alpha} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\bar{A}_{12} c^2}{\tan \alpha} \right], \\ L_{21} &= e^{-2c\eta} \left[-\frac{(\bar{A}_{66} + \bar{A}_{12}) c^2 n}{\sin \alpha} - \frac{(\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66}) n c}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \eta} \right], \\ L_{22} &= e^{-2c\eta} \left[\bar{A}_{66} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \bar{A}_{66} c \frac{\partial}{\partial \eta} - (\bar{A}_{66} c^2 + \frac{\bar{A}_{66} c^2 n^2}{\sin^2 \alpha}) \right], \\ L_{23} &= e^{-4c\eta} \left[\frac{(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66} n)}{s_1^2 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{D}_{22} c n}{s_1^2 \sin \alpha \tan \alpha} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] - \left[\frac{\bar{A}_{22} c^2 n}{\sin \alpha \tan \alpha} e^{-2c\eta} + \frac{\bar{D}_{22} n^3 c^2}{s_1^2 \sin^3 \alpha \tan \alpha} e^{-4c\eta} \right], \\ L_{31} &= e^{-2c\eta} \left[\frac{\bar{A}_{12} c}{\tan \alpha} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\bar{A}_{22} c^2}{\tan \alpha} \right], \\ L_{32} &= e^{-2c\eta} \frac{\bar{A}_{22} c^2 n}{\sin \alpha \tan \alpha}, \\ L_{33} &= \frac{\bar{A}_{22} c^2}{\tan^2 \alpha} e^{-2c\eta} - \frac{2(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{22} + \bar{D}_{66}) c^2 n^2}{s_1^2 \sin^2 \alpha} e^{-4c\eta} + \frac{\bar{D}_{22} c^2 n^4}{s_1^2 \sin^4 \alpha} e^{-4c\eta} + \left[\frac{2(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) c n^2}{s_1^2 \sin^2 \alpha} e^{-4c\eta} + \frac{(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{22}) c}{s_1^2} e^{-4c\eta} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} - \left[\frac{2(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) n^2}{s_1^2 \sin^2 \alpha} e^{-4c\eta} + \frac{\bar{D}_{22}}{s_1^2} e^{-4c\eta} \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{2\bar{D}_{11}}{s_1^2 c} e^{-4c\eta} \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + \frac{\bar{D}_{11}}{s_1^2 c^2} e^{-4c\eta} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \quad (11) \end{aligned}$$

여기서 $(\bar{A}_{ij}, \bar{D}_{ij}) = (A_{ij}, D_{ij}) / A_{11}$

● 양단 단순지지 원추셀

양단이 단순지지되어 있는 경우 경계조건

$$v=w=0, \quad \eta=0,1 \quad (12)$$

을 만족하는 모달함수는

$$U(\eta) = \sum_m A_m \cos m\pi\eta,$$

$$V(\eta) = \sum_m B_m \sin m\pi\eta,$$

$$W(\eta) = \sum_m C_m \sin m\pi\eta \quad (13)$$

이다. 식 (13)을 식 (9)에 대입하고 Galerkin method를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [L_{11}(U) + L_{12}(V) + L_{13}(W)] \cos m\pi\eta \, d\eta \\ &= - \int_0^1 c^2 \lambda U \cos m\pi\eta \, d\eta \\ & \int_0^1 [L_{21}(U) + L_{22}(V) + L_{23}(W)] \sin m\pi\eta \, d\eta \\ &= - \int_0^1 c^2 \lambda V \sin m\pi\eta \, d\eta \\ & \int_0^1 [L_{31}(U) + L_{32}(V) + L_{33}(W)] \sin m\pi\eta \, d\eta \\ &= \int_0^1 c^2 \lambda W \sin m\pi\eta \, d\eta \quad (14) \end{aligned}$$

이 식을 전개하고 정리하면

$$\begin{aligned} & [a_1 H_1 + a_2 H_2] A_m + [a_3 H_1 + a_4 H_2] B_m \\ &+ [a_5 H_1 + a_6 H_2] C_m = [a_7 H_3] A_m \\ & [a_8 H_4 + a_9 H_5] A_m + [a_{10} H_4 + a_{11} H_5] B_m \\ &+ [a_{12} H_5 + a_{13} H_6 + a_{14} H_7] C_m = [a_{15} H_8] B_m \\ & [a_{16} H_4 + a_{17} H_5] A_m + [a_{18} H_5] B_m + [a_{19} H_5 \\ &+ a_{20} H_6 + a_{21} H_7] C_m = [a_{22} H_8] C_m \quad (15) \end{aligned}$$

여기서 함수 H_i ($i=1, 2, \dots, 8$)는

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_0^1 e^{-2c\eta} \cos m\pi\eta \cos k\pi\eta \, d\eta, \\ H_2 &= \int_0^1 e^{-2c\eta} \sin m\pi\eta \cos k\pi\eta \, d\eta \\ H_3 &= \int_0^1 \cos m\pi\eta \cos k\pi\eta \, d\eta, \\ H_4 &= \int_0^1 e^{-2c\eta} \cos m\pi\eta \sin k\pi\eta \, d\eta \\ H_5 &= \int_0^1 e^{-2c\eta} \sin m\pi\eta \sin k\pi\eta \, d\eta, \\ H_6 &= \int_0^1 e^{-4c\eta} \sin m\pi\eta \sin k\pi\eta \, d\eta \\ H_7 &= \int_0^1 e^{-4c\eta} \cos m\pi\eta \sin k\pi\eta \, d\eta, \\ H_8 &= \int_0^1 \sin m\pi\eta \sin k\pi\eta \, d\eta \quad (16) \end{aligned}$$

이고 상수 a_i ($i=1, 2, \dots, 22$)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -(\pi^2 m^2 + \bar{A}_{22} c^2 + \frac{\bar{A}_{66} c^2 n^2}{\sin^2 \alpha}), & -\frac{\bar{D}_{11} \pi^4 m^4}{s_1^2 c^2} \\
 a_2 &= -\pi c m & a_{21} &= \frac{2(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) c \pi n^2 m}{s_1^2 \sin^2 \alpha} \\
 a_3 &= \frac{(\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66}) \pi c n m}{\sin \alpha}, & & + \frac{(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{22}) c \pi m}{s_1^2} - \frac{2\bar{D}_{11} \pi^3 m^3}{s_1^2 c} \\
 a_4 &= -\frac{(\bar{A}_{22} + \bar{A}_{66}) c^2 n}{\sin \alpha}, & a_{22} &= -a_7 \tag{17} \\
 a_5 &= \frac{\bar{A}_{12} \pi c m}{\tan \alpha} \\
 a_6 &= -\frac{\bar{A}_{22} c^2}{\tan \alpha}, \quad a_7 = -c^2 \lambda, \quad a_8 = a_4, \quad a_9 = a_3 \\
 a_{10} &= \bar{A}_{66} c \pi m, \\
 a_{11} &= -(\bar{A}_{66} \pi^2 m^2 + \bar{A}_{66} c^2 + \frac{\bar{A}_{22} c^2 n^2}{\sin^2 \alpha}) \\
 a_{12} &= -\frac{\bar{A}_{22} c^2 n}{\sin \alpha \tan \alpha}, \\
 a_{13} &= \frac{(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \pi^2 n m^2}{s_1^2 \sin \alpha \tan \alpha} - \frac{\bar{D}_{22} c^2 n^3}{s_1^2 \sin^3 \alpha \tan \alpha} \\
 a_{14} &= \frac{\bar{D}_{22} c \pi n m}{s_1^2 \sin \alpha \tan \alpha}, \quad a_{15} = a_7, \quad a_{16} = -a_6, \\
 a_{17} &= -a_5, \quad a_{18} = -a_{12}, \quad a_{19} = \frac{\bar{A}_{22} c^2}{\tan^2 \alpha} \\
 a_{20} &= \frac{\bar{D}_{22} c^2 n^4}{s_1^2 \sin^4 \alpha} - \frac{2(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{22} + \bar{D}_{66}) c^2 n^2}{s_1^2 \sin^2 \alpha} \\
 &\quad + \frac{2(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \pi^2 n^2 m^2}{s_1^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\bar{D}_{22} \pi^2 m^2}{s_1^2}
 \end{aligned}$$

식 (15)는 고유치 문제 (eigenvalue problem) 형태로서, 각각 적분을 수행한 후 충분히 정밀도가 얻어질 때까지 항수를 전개하여 고유치 즉 진동수 매개변수 λ 를 구한다.

4. 수치예 및 고찰

본 해석법의 유용성 및 정밀도를 고찰하기 위하여 기존 연구에서의 동일한 기하학적 매개변수를 채택하여 등방성 원추셀의 진동수를 비교하였고^(1,20), 이 결과에 근거하여 특수 직교이방성 적층 복합재료 원추셀의 진동수를 구하였다. 본 연구에서는 양단 단순지지인 경계조건에 대해 3항 해를 구하였으며, 고려한 재료특성은 Table 1과 같다.

Table 2는 등방성 원추셀에 대한 수치결과를 비교한 것으로서 본 해석결과는 다른 연구자의 수치

Table 1 Material properties of a conical shell

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ρ
Steel ⁽¹⁵⁾	206	206	79.23	0.30	$7.6418 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^4$
GFRP (<i>E</i> -glass-Epoxy) ⁽²⁴⁾	38.6	8.27	4.14	0.26	1800 kg/m ³
CFRP (AS/H3501) ⁽²⁴⁾	138.0	8.95	7.10	0.30	1600 kg/m ³

Table 2 Comparison of frequency parameter, $\sqrt{\lambda}$ for a simply supported condition ($m=1, n=0$)

α	h/R	l'/R	Present	Garnet & Kempner ⁽¹⁾	Azar ⁽¹⁾	Bacon & Bert ⁽²⁰⁾
5°	0.05	0.25	27.70	27.785	26.191	24.552
5°	0.05	0.375	15.60	15.584	—	—
10°	0.15	0.50	10.48	10.479	—	—
20°	0.10	0.50	3.577	3.58	—	—

$$(R = r_1 + \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad l' = l \cos \alpha)$$

결과와 잘 일치함을 보여주고 있다.

Fig. 3은 적층의 배열이 $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ 인 경우에, 원주방향 파동수에 따르는 진동수 매개변수를 나타낸 것으로 자오선 방향의 모드 수가 1일 때에는 $n=4$ 에서, 모드 수가 2와 3일 때에는 $n=6$ 에서 최저진동수를 가지며 모드 수가 증가함에 따라

진동수 매개변수도 증가함을 보여주고 있다.

Fig. 4는 셸의 반정각(semi-vertical angle) α 의 변화에 따르는 진동수 매개변수를 나타낸 것으로 반정각이 증가함에 따라 진동수 매개변수는 낮아지며 또한 l/r_1 이 증가하면 진동수 매개변수가 낮아짐을 보여주고 있다.

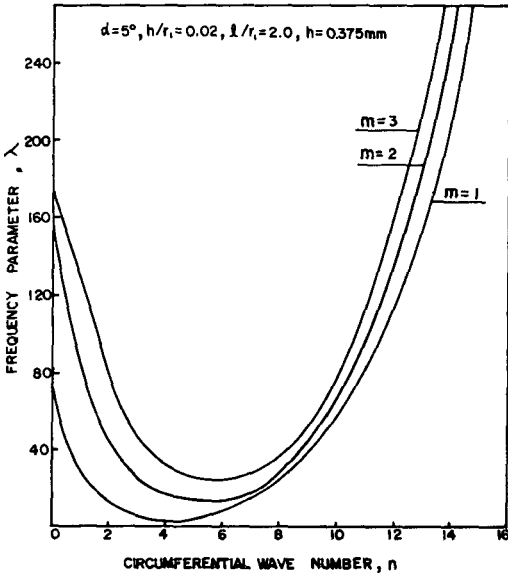


Fig. 3 Frequency parameters for a simply supported laminated, $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ GFRP, conical shell

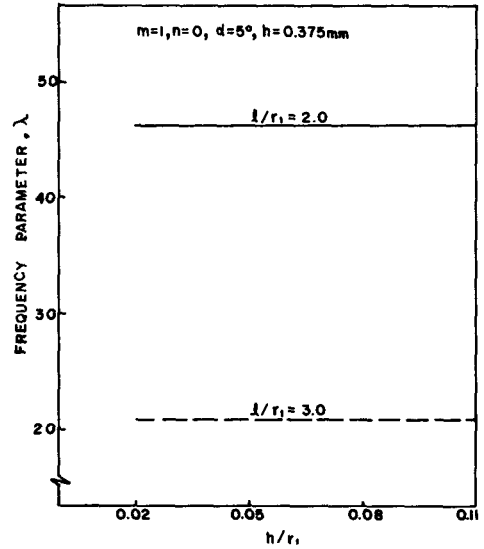


Fig. 5 Variation of frequency parameter with h/r_1 for a simply supported laminated, $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ GFRP, conical shell

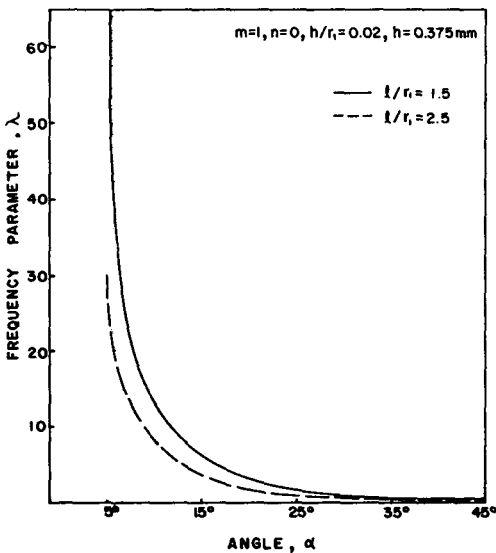


Fig. 4 Variation of frequency parameter with semi-vertical angle α for a simply supported laminated, $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ GFRP, conical shell

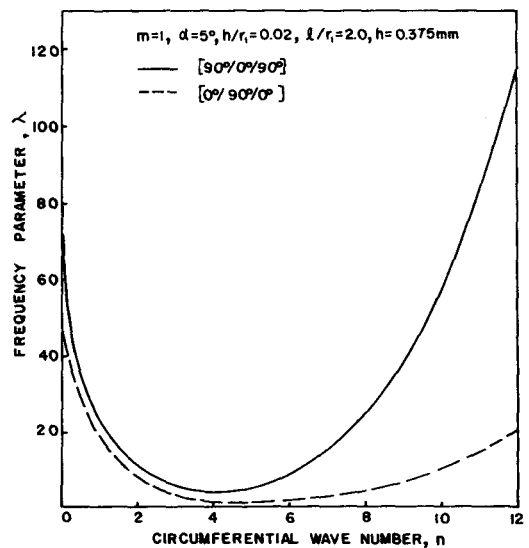


Fig. 6 Variation of frequency parameter with stacking sequence for a simply supported laminated, GFRP, conical shell

Fig. 5는 h/r_1 과 l/r_1 의 변화에 따르는 진동수 매개변수의 변화를 나타낸 것으로 l/r_1 이 일정할 때 h/r_1 의 변화에 대해 진동수 매개변수는 일정하나 l/r_1 이 감소하면 진동수 매개변수는 증가함을 보여주고 있다.

Fig. 6, 7과 8은 각각 적층방법과 적층수 및 적층

재료의 변화에 따르는 진동수 매개변수를 나타낸 것으로 세 경우 모두 신장 강성계수의 값이 증가하면 진동수 매개변수는 낮아지는 경향을 보여주고 있다.

Fig. 9와 10은 E_1 과 G_{12} 를 GFRP의 값으로 취하고 E_2 를 변화시켰을 때의 직교이방성 매개변수

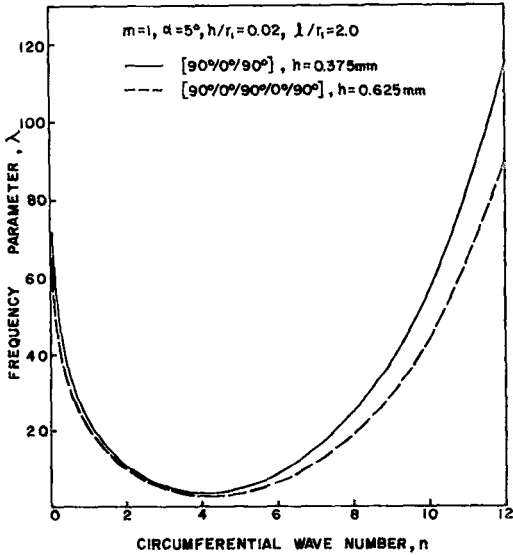


Fig. 7 Variation of frequency parameter with lamina number for a simply supported laminated, GFRP, conical shell

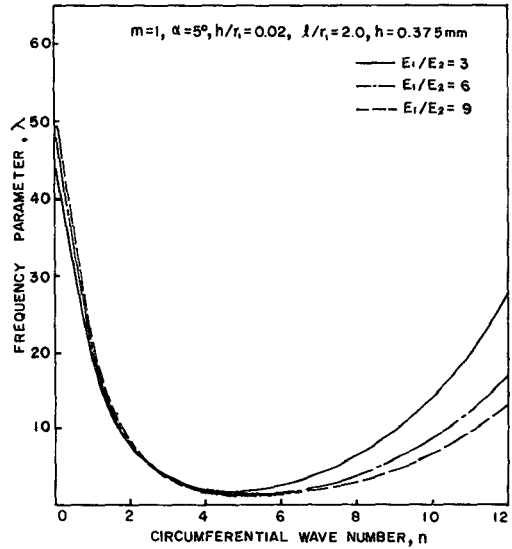


Fig. 9 Variation of frequency parameter with orthotropic parameter ratio E_1/E_2 for a simply supported laminated, $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, conical shell

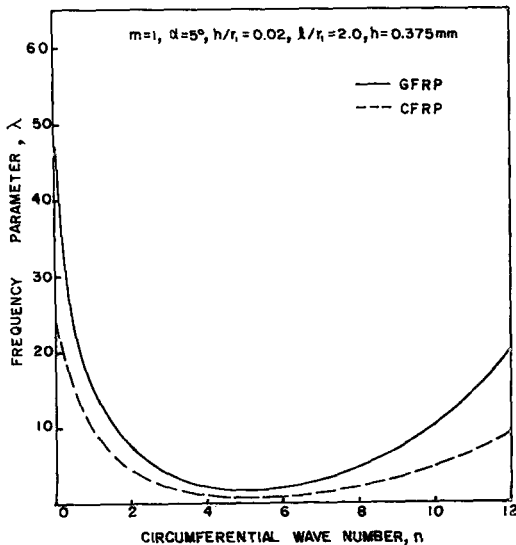


Fig. 8 Dependence of frequency parameter on material properties for a simply supported laminated, $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ conical shell

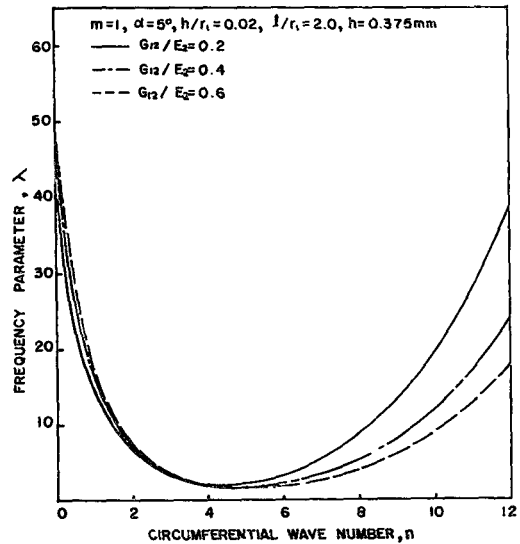


Fig. 10 Variation of frequency parameter with orthotropic parameter ratio G_{12}/E_2 for a simply supported laminated, $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, conical shell

E_1/E_2 및 G_{12}/E_2 의 변화에 따르는 진동수 매개변수를 나타낸 것이며, 실제 복합재료는 E_1 과 G_{12} 를 고정된 값으로 취할 때 E_2 의 값은 본 연구의 범위 내의 값이 될 것이다. n 이 4 이하일 때 진동수 매개변수는 E_1/E_2 와 G_{12}/E_2 의 영향을 거의 받지 않으나 4 이상에서는 E_1/E_2 와 G_{12}/E_2 의 비가 큰 쪽이 진동수 매개변수는 낮으며 n 값이 커질수록 진동수 매개변수의 차도 커짐을 보여주고 있다.

5. 결 론

특수 직교이방성 적층 복합재료 원추셀의 자유진동에 관한 진동수 방정식을 Flugge theory에 근거하여 유도하고, 양단이 단순지지되어 있는 원추셀에 대하여 Galerkin method를 적용하여 해를 구하였다.

본 연구의 수치결과를 기존의 등방성 재료에 관한 해석결과와 비교하여 본 해석의 유용성 및 정밀도를 검토하였으며 특수 직교이방성 적층 복합재료 원추셀의 진동특성을 제시하였다.

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 두께가 균일하고 중앙면에 대해 대칭인 특수 직교이방성 적층 복합재료 원추셀의 진동수 방정식을 유도하고 이의 진동특성을 제시하였다.
- (2) 적층 복합재료 원추셀의 적층순서, 기하학적 매개변수(h, r_1, α)와 직교이방성 매개변수($E_1/E_2, G_{12}/E_2$)의 변화에 따르는 진동수 매개변수의 변화를 제시하였다.
- (3) 본 연구에서는 일반적인 적층 복합재료 원추셀의 진동해석을 위한 기초 자료를 제시하였다.

참 고 문 헌

- (1) Garnet, H., and Kempner, J., 1964, "Axisymmetric Free Vibration of Conical Shells", Trans. of ASME, September, pp. 450~466.
- (2) Saunders, H., and Wisniewski, E.J., 1960, "Vibrations of Conical Shells", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 32, No. 6, pp. 765~772.
- (3) Weingarten, V.I., 1965, "Free Vibration of Conical Shells", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceeding of ASCE, EM4, August, pp. 69~87.
- (4) Irie, T., Yamada, G., and Kaneko, Y., 1982, "Free Vibration of a Conical Shell with Variable Thickness", Journal of Sound and Vibration, Vol. 82, No. 1, pp. 83~94.
- (5) 염영하, 광재경, 정석주, 1982, "원추형 셀의 음향조절에 관한 실험적 연구", 대한기계학회논문집, 제 6권, 제 4호, pp. 353~360.
- (6) 정석주, 1983, "원추형 셀의 축대칭 진동형에 대한 수치해석", 대한기계학회지, 제23권, 제 4호, pp. 259~267.
- (7) Weingarten, V.I., 1965, "Free Vibrations of Ring-Stiffened Conical Shells", AIAA Journal, Vol. 3, No. 8, August, pp. 1475~1481.
- (8) 高橋 伸, 鈴木勝義, 安齋榮尙, 小澤田正, 1982, "變厚円すい殻の振動", 日本機械學會論文集(C編), 第48卷, 第425號, pp. 31~39.
- (9) 高橋伸, 鈴木勝義, 小澤田正, 1986, "變厚円すい殻の振動", 日本機械學會論文集(C編), 第52卷, 第476號, pp. 1186~1191.
- (10) 高橋 伸, 1987, "厚さが軸方向に變化する円錐殻の振動", Bull. Yamagata Univ.(Eng.), Vol. 19, No. 2, January, pp. 79~92.
- (11) Irie, T., Yamada, G., and Muramoto, Y., 1984, "Free Vibration of Joined Conical-Cylindrical Shells", Journal of Sound and Vibration, Vol. 95, No. 1, p. 31.
- (12) Soldatos, K.P., Massalas, C.V., and Tzivanidis, G.J., 1983, "Dynamic Analysis of Thin Elastic Noncircular Conical Shells", Acta Mechanica, 46, p. 207.
- (13) 이영신, 문흥기, 1986, "직교이방성 복합재료 원통셀의 자유진동해석", 대한기계학회논문집, 제10권, 제 5호, pp. 758~769.
- (14) 이영신, 문흥기, 윤종호, 1986, "적층직교이방성 외팔 원통셀의 자유진동해석", 대한기계학회논문집, 제10권, 제 6호, pp. 929~936.
- (15) Chandrasekaran, K., and Ramamurti, V., 1982, "Asymmetric Free Vibrations of Layered Conical Shells", Journal of Mechanical Design, Vol. 104, April, pp. 453~462.
- (16) Sankaranarayanan, V., Chandrasekaran, K., and Ramaiyan, G., 1988, "Free Vibrations of Laminated Conical Shells of Variable Thickness", Journal of Sound and Vibration, Vol. 123, No. 2, pp. 357~371.
- (17) Penzes, L.E., and Padovan, J., 1977, "Maxi-Element Analysis for Free Vibrations of Orthotropic Shells of Revolution", Journal of Sound and Vibration, Vol. 54, No. 2, pp. 249~263.
- (18) Wilkins, D.J., Bert, C.W., and Egle, D.M., 1970, "Free Vibration of Orthotropic Sandwich Conical Shells with Various Boundary Conditions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 13, No. 2, pp. 211~228.
- (19) Sheinman, I., and Greif, S., 1984, "Dynamic

Analysis of Laminated Shells of Revolution", *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, May, pp. 200~215.

(20) Bacon, M.D., and Bert, C.W., 1967, "Unsymmetric Free Vibrations of Orthotropic Sandwich Shells of Revolution", *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 3, March, pp. 413~417.

(21) Sankaranarayanan, N., Chandrasekaran, K., and Ramaiyan, G., 1987, "Axisymmetric Vibrations of Laminated Conical Shells of Variable Thickness",

Journal of Sound and Vibration, Vol. 118, No. 1, p. 151.

(22) Yang, C.C., 1974, "On Vibration of Orthotropic Conical Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 34, No. 4, pp. 552~555.

(23) Flügge, W., 1973, "Stresses in Shells, Springer-Verlag.

(24) Tsai, S.W., *Composite Design 1986*, Think Composites.