

<論 文>

3차원 직선핀의 과도응답 및 성능

오원균* · 조진호** · 서정일** · 조종철***

(1989년 5월 4일 접수)

Transient Response and Performance of a Three-Dimensional Straight Fin

Won-Kyun Oh, Jin-Ho Cho, Jeong-Il Seoh and Jong-Chull Jo

Key Words : Transient Response(과도응답), Fin Performance(핀 성능), Three-Dimensional Straight Fin(3차원 직선핀), Exact Solution(정확해), One-Dimensional Approximation(1차원 근사)

Abstract

The transient response of a three-dimensional straight fin of constant cross sectional area and perimeter with unequal top, bottom, left, right and tip surface convection coefficients is analyzed using separation variables and Laplace transforms when the fin base is subjected to a step change in temperature. The three-dimensional effects of fin dimensions and unequal fin surface convection coefficients on the fin performance which is expressed in terms of the heat flowrates through the fin base are investigated, and errors in one-dimensional approximations and two-dimensional solutions are discussed in the wide ranges of fin dimensions and unequal fin surface coefficients. Typical results are represented in tabular and graphical forms.

기 호 설 명

- A : 무차원 핀 단면적 ($t \cdot w$)
- B : Biot수
- Bm : $hm \cdot t/k$
- c : 핀재료의 비열
- h : 대류열전달계수
- hm : $(\bar{W} \cdot (hy_1 + hy_2) + \bar{t} \cdot (hz_1 + hz_2)) / (t \cdot \bar{w})$
- k : 핀재료의 열전도율
- L : 무차원 핀길이 (\bar{L}/t)
- Lm : 무한 핀으로 간주될 수 있는 최소 무차원 핀길이
- m : Bm/t
- Q : 핀 베이스를 통한 무차원 열유동량

$$(\bar{Q}/k\bar{T}_\infty = - \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^w \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_{x=0} dy dz)$$

- \bar{Q} : 핀 베이스를 통한 열유동량
- $(- \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^w \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_{x=0} dy dz)$
- q : 핀 베이스를 통한 무차원 열플럭스(Q/A)
- s : Laplace 변환의 정의식에 도입되는 매개 변수
- T : 무차원 온도 ($(\bar{T} - \bar{T}_\infty) / \bar{T}_\infty$)
- \bar{T} : $\int_0^\infty e^{-st} T dt$
- t : 무차원 핀두께 ($t/\bar{t} = 1$)
- w : 무차원 핀폭 (\bar{w}/t)
- x, y, z : 무차원 직교좌표 ($\bar{x}/t, \bar{y}/t, \bar{z}/t$)

회람문자

- α : 열확산계수 ($k/\rho \cdot c$)
- θ, ϕ, Ψ : 각각 식(9b), (10b) 및 (11b)로 정의되는 x, y, z 의 함수
- λ, μ, ν : 고유치

*정회원, 중경공업전문대학 기계과

**정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학과

***정회원, 한국에너지연구소 원자력안전센터

- ρ : 핀재료의 밀도
- τ : 무차원 시간 ($\alpha \cdot \bar{t} / l^2$)
- 상첨자
~ : 실차원
- 하첨자
- b : 핀베이스
- t : 핀선단
- y_1, y_2 : 각각 $y=0, y=1$ 인 핀표면
- z_1, z_2 : 각각 $z=0, z=w$ 인 핀표면
- 1 : 1차원 근사해
- 2 : 2차원 정확해 ($hz_1 = hz_2 = 0$ 인 경우)
- 3 : 3차원 정확해
- ∞ : 주위유체

1. 서 론

확장표면에서의 열유동문제는 통상적으로 핀의 횡단온도구배가 무시될 수 있는 것으로 가정하여 1차원적으로 근사해석되고 있다^(1~3). 비록 이러한 1차원 근사를 적용하면 문제가 단순화됨으로써 해석이 용이해지지만 핀재료의 내부열전도성에 대한 방열표면의 대류열전달계수의 비인 Biot수와 Biot수의 정의에 사용된 하나의 핀 치수에 대한 나머지 핀 치수들의 상대적크기가 핀내부에서 횡단온도구배를 유발시키는 인자들이며 이러한 인자들이 극히 제한된 범위내의 값을 가질 때만 1차원 근사해가 타당성을 갖는 것으로 밝혀져 있다^(4~7). 또한, 핀의 선단표면을 제외한 방열표면들에서의 대류열전달계수 값들이 모두 서로 다를 때에도 핀내부에서 횡단온도구배가 생길 것이다. D.C. Look⁽⁸⁾는 직선핀의 상부표면의 Biot수가 하부표면의 Biot수보다 큰 경우에 대하여 2차원 직선핀을 정상상태일 때 열평형적분법으로 근사해석함으로써 핀의 상부표면과 하부표면에서의 대류열전달계수 값의 차이로 인한 1차원 근사해가 갖는 오차를 핀 베이스를 통한 열유동량들간의 상대오차로써 나타내어 조사하고 상부표면과 하부표면에서의 대류열전달계수 값들의 평균치를 적용하는 경우와 서로 다르게 주어지는 대류열전달계수 값들을 적용하는 경우에 대한 2차원 해석결과들을 서로 비교함으로써 두 대류열전달계수 값의 차이에 따른 핀 성능 해석결과의 특징을 검토하였다. 실용직선핀에 대하여 폭이 무한하거나 핀의 양측면을 통한 대류열전달이 무시될 수 있다

는 가정하에서 2차원해석에 정당성이 부여되고 있으나, 실제의 경우에는 그와 같은 가정의 도입이 합리화될 수 있는 경우들이 한정되어 있다. 따라서, 폭이 유한한 직선핀에서 핀의 양측면에서의 대류열전달계수들과 핀폭의 값들이 핀내부의 온도분포 및 핀베이스를 통한 열유동량에 미치는 효과들이 고려될 수 있도록 하기 위해서는 3차원의 열전달해석이 이루어져야 할 것이다.

본 연구에서는 대류열전달계수값들이 모두 서로 다르게 주어지는 직선핀에서의 3차원 과도열전도문제를 변수분리법과 Laplace 변환법을 사용하여 해석함으로써 핀내부에서의 과도온도분포 및 핀베이스를 통한 과도열유동량에 대한 정확해를 구하고 직선핀의 과도응답특성에 미치는 관련 매개변수들의 효과와 정상 상태조건하에서 각종 기하학적 및 열적 매개변수들이 핀성능에 미치는 영향을 조사하였다. 그리고 관련 매개변수들의 광범위한 변동에 대하여 핀베이스를 통한 열유동량의 3차원 정확해에 대한 1차원 근사해의 상대오차를 검토하였다. 또한, 핀의 좌, 우측면에서 단일인 경우에 대한 핀베이스를 통한 열유동량의 2차원 정확해의 3차원 문제의 해석에 대한 적용성을 조사하기 위하여, 3차원 정확해에 대한 2차원 정확해의 상대오차를 넓은 범위의 핀폭의 값들에 대하여도 조사하였다.

2. 3차원 해석

등방이고 균일한 재료로 만들어진 사각형 단면의 직선핀에서 냉각유체와 접촉하는 상, 하, 좌, 우

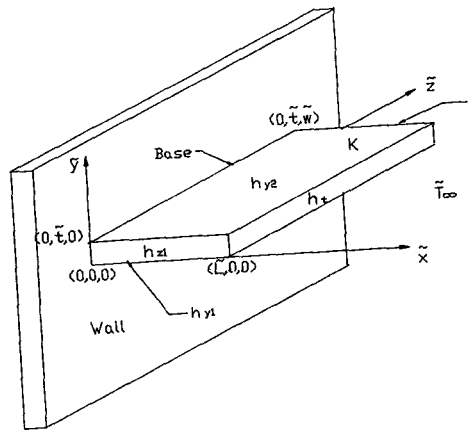


Fig. 1 Configuration of straight fin with rectangular profile

및 선단의 표면들에서의 대류열전달계수값들이 각각의 표면상에서는 위치에 무관한 상수이지만 서로 동일하지 않고, 핀내부에 열원이 없으며, 초기에 냉각유체의 온도와 동일한 온도를 유지하는 핀베이스에서의 온도가 계산함수적으로 변하는 경우를 해석모델로 설정한다(Fig. 1 참조).

그리고 해석을 용이하게 하기 위하여 핀의 모든 물성치는 일정하다고 가정한다. 이상과 같이 설정된 3차원 열전달문제에서 핀내부에서의 온도분포를 지배하는 미분방정식과 초기 및 경계조건들을 다음과 같이 무차원 형태로 나타낼 수 있다.

$$\text{미분방정식: } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1a)$$

$$\tau > 0; 0 < x < L; 0 < y < 1; 0 < z < w$$

$$\text{초기 및 경계조건} \\ T = 0, \tau = 0; 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq w \quad (1b)$$

$$T = T_b, \tau > 0; x = 0; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq w \quad (1c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -B_x T, \tau > 0; x = L; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq w \quad (1d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = B_y T, \tau > 0; 0 \leq x \leq L; y = 0; 0 \leq z \leq w \quad (1e)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -B_y T, \tau > 0; 0 \leq x \leq L; y = 1; 0 \leq z \leq w \quad (1f)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = B_z T, \tau > 0; 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq 1; z = 0 \quad (1g)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -B_z T, \tau > 0; 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq 1; z = w \quad (1h)$$

식 (1a)~(1h)를 무차원 시간 τ 에 관하여 Laplace 변환을 취하면 변환된 미분방정식과 관련된 경계조건들은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} = s \bar{T} \quad (2a)$$

$$0 < x < L; 0 < y < 1; 0 < z < w$$

$$\bar{T} = \frac{T_b}{s}, x = 0; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq w \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = -B_x \bar{T}, x = L; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq w$$

$$(2c)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = B_y \bar{T}, 0 \leq x \leq L; y = 0; 0 \leq z \leq w \quad (2d)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -B_y \bar{T}, 0 \leq x \leq L; y = 1; 0 \leq z \leq w \quad (2e)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = B_z \bar{T}, 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq 1; z = 0 \quad (2f)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = -B_z \bar{T}, 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq 1; z = w \quad (2g)$$

식 (2a)~(2g)로 표현되는 문제는 y 와 z 방향에서 homogeneous 하다. 다음과 같은 product solution이 존재한다고 하여

$$\bar{T}(x, y, z, s) = \theta(x, s) \phi(y) \Psi(z) \quad (3)$$

식 (3)을 식 (2a)~(2g)에 적용하면, 미분방정식 (2a)는

$$-\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dy^2} = \frac{1}{\theta} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - s + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = \mu^2 \quad (4)$$

으로 분리되고 다음과 같은 y 축 방향으로의 첫번째 고유치문제가 도출된다.

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} + \mu^2 \phi = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = B_y \phi, y = 0 \quad (5b)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = -B_y \phi, y = 1 \quad (5c)$$

식 (4)의 두번째 항등식을 다시 정리하면

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = \frac{1}{\theta} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - (\mu^2 + s) = \nu^2 \quad (6)$$

으로 되고 다음과 같이 z 축으로의 두번째 고유치문제가 도출된다.

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \nu^2 \Psi = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{d\Psi}{dz} = B_z \Psi, z = 0 \quad (7b)$$

$$\frac{d\Psi}{dz} = -B_z \Psi, z = w \quad (7c)$$

따라서 x 축 방향은 식 (6)의 두번째 항등식으로 부터 다음 관계를 만족시키게 된다.

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - (\mu^2 + \nu^2 + s) = 0 \quad (8a)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -B_x \theta, x = L \quad (8b)$$

여기서 남은 분리불가능한 nonhomogenous 경계 조건인 식 (2b)는 최종해를 구할 때 적용된다.

식 (5)와 식 (7)은 서로 동일한 형태의 고유치문제들이며 그 해는 다음과 같다.

식 (5)의 해

$$\phi_m(y) = A_m \phi_m^E(y) \quad (9a)$$

$$\text{고유함수} : \phi_m^E(y) = \mu_m \cos \mu_m y + B_{y_1} \sin \mu_m y \quad (9b)$$

고유치 : 다음 transcendental식의 양의 근들

$$f_1(\mu_m, B_{y_1}, B_{y_2}) = \tan \mu_m - \frac{\mu_m(B_{y_1} + B_{y_2})}{\mu_m^2 - B_{y_1} B_{y_2}} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (9c)$$

식 (7)의 해

$$\Psi_n(z) = B_n \Psi_n^E(z) \quad (10a)$$

$$\text{고유함수} : \Psi_n^E(z) = \nu_n \cos \nu_n z + B_{z_1} \sin \nu_n z \quad (10b)$$

고유치 : 다음 transcendental 식의 양의 근들

$$f_2(\nu_n, B_{z_1}, B_{z_2}) = \tan \nu_n w - \frac{\nu_n(B_{z_1} + B_{z_2})}{\nu_n^2 - B_{z_1} B_{z_2}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (10c)$$

마지막으로 식 (8)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\theta_{mn}(x, s) = c_{mn} \theta_{mn}^E(x, s) \quad (11a)$$

$$\theta_{mn}^E(x, s) = \frac{\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2 + s} \cosh(L-x) \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2 + s} + B_{x_2} \sinh(L-x) \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2 + s}}{\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2 + s} \cosh L \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2 + s} + B_{x_2} \sinh L \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2 + s}} \quad (11b)$$

따라서 식 (3)의 product solution은 다음과 같다.

$$\bar{T}(x, y, z, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \theta_{mn}^E(x, s) \phi_m^E(y) \Psi_n^E(z) \quad (12)$$

여기서 $D_{mn} = A_m \cdot B_n \cdot C_{mn}$ 이다.

식 (12)에 분리불가능 경계조건식 (2b)를 적용한 후, y 및 z 좌표에 관한 고유함수들인 식 (9b)와 식 (10b)의 직교성질을 이용하여 미지상수 D_{mn} 을 구하면 다음과 같다.

$$D_{mn} = \frac{E_{mn}}{N_m N_n} \frac{T_b}{S}$$

여기서

$$E_{mn} = \frac{1}{\mu_m \nu_n} (\mu_m \sin \mu_m - B_{y_1} \cos \mu_m + B_{y_1}) (\nu_n \sin \nu_n w - B_{z_1} \cos \nu_n w + B_{z_1})$$

N_m 과 N_n 은 각 고유함수(9b)와 (10b)에 대한 정규적분이며 다음과 같이 표시된다.

$$N_m = \frac{(\mu_m^2 + B_{y_1}^2)(\mu_m^2 + B_{y_2}^2) + (\mu_m^2 + B_{y_1} B_{y_2})(B_{y_1} + B_{y_2})}{2(\mu_m^2 + B_{y_2}^2)}$$

$$N_n = \frac{w(\nu_n^2 + B_{z_1}^2)(\nu_n^2 + B_{z_2}^2) + (\nu_n^2 + B_{z_1} B_{z_2})(B_{z_1} + B_{z_2})}{2(\nu_n^2 + B_{z_2}^2)}$$

식 (12)를 Laplace 역변환하여 무차원 과도온도분포를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_3(x, y, z, \tau) &= T_b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{mn}}{N_m N_n} \phi_m^E(y) \Psi_n^E(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \frac{e^{s\tau}}{s} \theta_{mn}^E(x, s) ds \\ &= T_b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{mn} [\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} \cosh(L-x) \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} + B_{x_2} \sinh(L-x) \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}]}{N_m N_n [\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} \cosh L \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} + B_{x_2} \sinh L \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}]} \phi_m^E(y) \Psi_n^E(z) \\ &\quad - 2T_b \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{mn} \lambda_l (\lambda_l^2 + B_l^2) \sin \lambda_l x \phi_m^E(y) \Psi_n^E(z) e^{-\tau(\lambda_l^2 \mu_m^2 + \nu_n^2)}}{N_m N_n (\lambda_l^2 L + B_l^2 L + B_l) (\lambda_l^2 + \mu_m^2 + \nu_n^2)} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 λ_l 은 다음 transcendental식의 양의 근들이다.

$$f_3(\lambda_l, B_l) = \lambda_l \cot \lambda_l L + B_l = 0, \quad (l=1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

핀 베이스를 통한 무차원 과도열유동량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 Q_3(\tau) &= - \int_0^1 \int_0^w \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy dz \\
 &= T_b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} E_{mn}^2 [\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} \sinh L \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} + B_t \cosh L \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}]}{N_m N_n [\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} \cosh L \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} + B_t \sinh L \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}]} \\
 &\quad + 2 T_b \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{mn}^2 \lambda_l^2 (\lambda_l^2 + B_t^2) e^{-\tau(\lambda_l^2 + \mu_m^2 + \nu_n^2)}}{N_m N_n (\lambda_l^2 L + B_t^2 L + B_t) (\lambda_l^2 + \mu_m^2 + \nu_n^2)} \quad (15)
 \end{aligned}$$

3. 1차원 근사해

1차원 해석에서는 핀선단 표면을 제외한 나머지 방열표면들에서의 대류열전달계수 값은 동일한 것으로 취급되므로 대류열전달계수들이 서로 다른 값을 갖는 경우에는 다음과 같이 방열면적을 고려한 산술평균으로 얻어지는 평균대류 열전달계수가 사용된다.

$$h_m = \frac{\tilde{W}(h_{y_1} + h_{y_2}) + \tilde{F}(h_{z_1} + h_{z_2})}{\tilde{T} \tilde{W}}$$

1차원 해석에 의한 핀내부의 과도온도분포 및 핀 베이스를 통한 과도열유동량의 무차원형태의 해들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 T_1(x, \tau) &= T_b \frac{\sqrt{m} \cosh(L-x) \sqrt{m} + B_t \sinh(L-x) \sqrt{m}}{\sqrt{m} \cosh L \sqrt{m} + B_t \sinh L \sqrt{m}} \\
 &\quad - 2 T_b \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda_l (\lambda_l^2 + B_t^2) \sin \lambda_l x e^{-\tau(\lambda_l^2 + m)}}{(\lambda_l^2 L + B_t^2 L + B_t) (\lambda_l^2 + m)} \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1(\tau) &= T_b \sqrt{m} \frac{\sqrt{m} \sinh L \sqrt{m} + B_t \cosh L \sqrt{m}}{\sqrt{m} \cosh L \sqrt{m} + B_t \sinh L \sqrt{m}} \\
 &\quad + 2 T_b \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda_l^2 (\lambda_l^2 + B_t^2) e^{-\tau(\lambda_l^2 + m)}}{(\lambda_l^2 L + B_t^2 L + B_t) (\lambda_l^2 + m)} \quad (17)
 \end{aligned}$$

여기서

$$m = \frac{W(B_{y_1} + B_{y_2}) + (B_{z_1} + B_{z_2})}{W}$$

이며 λ_l 은 transcendental식 (14)의 양의 근들이다.

4. 계산예 및 결과

무차원의 과도온도분포 및 과도열유동량의 해석 해들인 식 (13), (15), (16) 및 (17)의 수치적 결과를 얻기 위해서는 먼저 식 (9c), (10c) 및 (14)로 주어진 transcendental 식들의 양의 근들인 고유치들을 구해야 한다. 식 (9c)와 (10c)는 서로 평행한 두 표면에서 대류열전달이 일어나는 제 3종 경계 조건들에 대한 것들이고 식 (14)는 제 2종과 제 3종의 경계 조건이 조합된 경우이다.

다루기가 까다로운 제 3종 경계조건이 포함된 경우에 있어서 고유치를 계산하기 위한 알고리즘은 일반적으로 Newton의 방법을 기초를 두고 있으나 순번이 높은 고유치들에 대한 반복의 시작점이 tangent 또는 cotangent 곡선의 접근선 근방에 놓이기 때문에 그 시작점을 결정할 때 어려움이 발생할 뿐만 아니라 수렴이 일어나지 않는 경우들도 있다. 따라서 본 계산에서는 이러한 결점들을 보완하기 위하여 Nowak 등⁽⁹⁾이 제시한 overrelaxation 방법을 사용하여 고유치를 계산하였다. overrelaxation factor로는 경험상 가장 빠르게 수렴하는 것으로 밝혀진 값인 2를 사용하고 수렴과정의 반복은 수렴중에 연속으로 얻어지는 두 값들의 상대오차가 0.000001 이하인 경우에 종료되도록 하였으며 최종으로 얻어진 고유치의 근사값의 적합성을 다시 결정하기 위하여 식 (9c), (10c) 또는 식 (14)에 대입하여 f_1 , f_2 또는 f_3 가 0으로 간주될 수 있을 정도로 충분히 작은 값인지를 확인하였다. 핀의 과도온도분포 및 핀베이스를 통한 과도열유동량에 대한 3차원의 정확해들과 1차원의 근사해들은 모두다 단일, 2중 또는 3중의 급수합의 형태로 표시되므로 해의 수치결과를 얻기 위한 계산에서는 항의 급수합산에의 증분율(기여율)이 0.0001 미만이 될 때 합산과정이 종료되도록 하였다. 본 계산에서 고려한 무차원 시간 및 관련 매개변수들의 범위는 다음과 같다. $\tau=0.0001-\infty$; $W=1-100$; $L=0.01-50$; $B_{y_1}, B_{y_2}, B_{z_1}, B_{z_2}, B_t=0-20$ 핀 주위에서의 냉각유체의 유동방향과 유동양상에 따라서 핀의 각 방열표면들에서의 대류열전달계수 값들이 서로 달라지는 많은 경우를 예상할 수 있다. 참고문헌 (10)으로부터도 상향 방열표면과 하향 방열표면에 대한 서로 상이한 거동을 나타내는 실험식들을 도출할 수 있으며 다른 모든 매개변수들이 동일할 때 그 차이는 상당히 클 수 있다⁽⁶⁾. 비록 실제 경우에 있어서는 핀의 한 방열표면에서의 대류열전달계수 값이 위치에 무관한 상수가 아니라는 사실⁽¹¹⁾은 고려하지 않더라도 핀의 상부표면에서의 대

Table 2 Mean fin base heat flux q_b in case of $w=10$ and $B_{y_1}=B_{y_2}=B_{z_1}=B_{z_2}=B_t=10.0$

$L \backslash \tau$	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	∞
0.01	17.029	6.9039					6.9039
0.012	25.209	6.7901					6.7901
0.015	34.594	6.6274	6.6270				6.6270
0.03	42.467	7.4896	5.9255				5.9255
0.04	42.577	10.039	5.5428				5.5428
0.1	42.577	13.548	4.2636	4.0749			4.0749
0.3		13.548	4.5491	2.5360	2.5337		2.5337
0.9			4.5491	2.1910	2.0151		2.0151
2.5				2.1910	1.9952	1.9952	1.9952
3.0					1.9952	1.9952	1.9952
4.0						1.9952	1.9952

차원 시간에 대하여 무차원 핀 길이가 증가함에 따라서 핀베이스에서의 무차원 평균열플럭스 q_b 가 증가하다가 특정 무차원 길이 이상에서는 q_b 가 일정하게 유지되며 이것은 그 시간에 열이 핀 길이 방향으로 침투한 길이를 표시한다. 왜냐하면, q_b 의 증가가 없어지는 특정길이 이상의 핀길이 증가는 증가되는 핀길이 만큼의 대류열전달면적의 증가를 가져오지만 q_b 가 증가하지 않는다는 것은 핀표면과 주유체온도와의 차가 없이 초기온도를 유지됨을 뜻하기 때문이다. 또한 핀의 무차원 길이가 증가함에 따라서 정상상태에 도달하는 시간이 길어짐을 Table 1로부터 알 수 있으며 정상상태($\tau \rightarrow \infty$)인 경우에 핀의 길이증가가 q_b 의 증가와 무관해지는 무한핀의 영역 (Table 1에서는 $L \geq 12$ 이며 무한핀의 최소 무차원 길이 L_m 은 약 12임)을 쉽게 확인할 수 있다. Table 2에 나타낸 결과를 Table 1과 비교해 보면 두 가지 현저히 다른 특성이 나타난다. 먼저 핀표면에서의 Biot수들이 큰 Table 2의 경우에는 $L(L \leq L_m)$ 의 증가에 따라서 정상상태에서의 q_b 가 감소하고 있는데 이것은 핀길이의 증가가 곧 열전도저항의 증가를 가져오기 때문이다. 또 다른 점은 Table 2의 경우가 Table 1의 경우보다 일반적으로 정상상태에 도달하는 무차원 시간이 더 짧으며 주어진 무차원 시간에 열이 침투하는 거리도 짧게 나타난다. 따라서 핀표면에서 주어지는 Biot수가 클 경우에는 핀은 그 자체가 열전도 저항체로써 작용하는 효과가 커지므로 핀길이가 짧게 설계되어야 하며 Biot수가 작은 경우에는 대류열전달

면적의 증가가 열전달량을 높이므로 상대적으로 핀 길이가 크게 설계되는 것이 바람직하나 무한핀의 영역에 들지 않도록 하여야 할 것이다.

Fig. 3은 정상상태에서 L 의 변화에 따른 q_b 값의 변동을 $w=1, 5$ 및 10인 경우에 대하여 그래프로써 나타낸 것이다. 이미 앞에서 Table 1 및 2에서 검토된 바와 같이 Biot수가 클수록 무한핀의 최소 길이 L_m 의 값이 작아지며 Biot수가 10일 때는 핀이 열전도 저항체로 작용하여 $L \leq L_m$ 의 범위에서

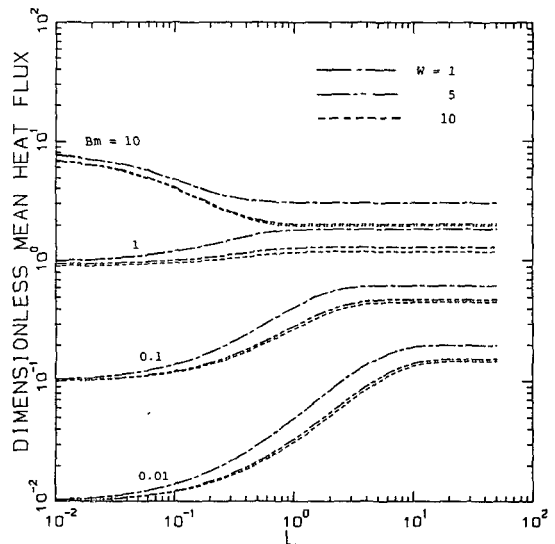


Fig. 3 Fin base heat flux for $B_{y_1}=B_{y_2}=B_{z_1}=B_{z_2}=B_t=B_m$, and $\tau \rightarrow \infty$

L 값의 증가에 따라서 q_3 는 감소한다. 또한 w 가 증가함에 따라서 q_3 는 감소하나 $w=5-10$ 의 범위에서 큰 변화가 없다.

이와 같이 어느 일정한 값 이상으로의 w 의 증가는 q_3 의 감소에 미치는 효과가 적어지게 되고 따라서 핀의 양측면으로의 방열효과가 무시되어질 수 있는 2차원 열전도현상이 지배적으로 일어나게 될 것이다. 그리고 w 의 q_3 에 미치는 효과는 L 이 작은 값을 가질수록 적어진다.

다음 Fig. 4는 핀의 상하부 방열표면들에서의 Biot수인 B_{y_1} 과 B_{y_2} (또는 대류열전달계수 hy' 과 hy'')가 서로 다르게 주어지는 경우에 그 두 값들의 차의 정도가 q_3 에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 평균 Biot수 B_m 이 작은 값을 갖거나 L 이 작은 범위에서는 B_{y_1} 과 B_{y_2} 차이에 의한 q_3 값의 변동은 거의 없으나 B_m 과 L 이 큰 값을 갖는 범위에서는 B_{y_1} 과 B_{y_2} 의 상대적 크기가 클수록 q_3 는 작아지며, $B_m < 0.1$ 일 때는 모든 L 값에 대하여 $L < 0.1$ 일

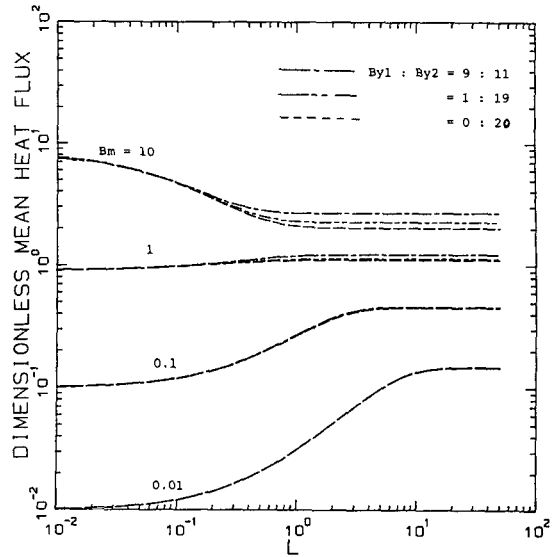


Fig. 4 Fin base heat flux for $w=10, \tau \rightarrow \infty, B_{x_1} = B_{x_2} = B_t = B_m = (B_{y_1} + B_{y_2})/2$

Table 3 Percent relative errors of the one-dimensional approximation in heat flowrates in case of $B_{y_1} = B_{y_2} = B_{x_1} = B_{x_2} = B_t = 0.1$

L	w	τ	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100
0.05		1	0.01	0.01	0.28	0.29	0.29	0.29	0.29
		5	0.13	0.13	0.41	0.42	0.42	0.42	0.42
		10	0.45	0.45	0.72	0.73	0.73	0.73	0.73
0.1		1	0.01	0.01	0.04	0.48	0.48	0.48	0.48
		5	0.13	0.13	0.16	0.65	0.65	0.65	0.65
		10	0.45	0.45	0.47	0.73	0.96	0.96	0.96
0.5		1	0.01	0.01	0.02	0.09	1.07	1.08	1.08
		5	0.13	0.13	0.14	0.21	1.57	1.57	1.57
		10	0.45	0.45	0.45	0.53	1.92	1.92	1.92
1.0		1	0.01	0.01	0.02	0.07	0.85	1.18	1.18
		5	0.13	0.13	0.14	0.19	1.23	1.89	1.89
		10	0.45	0.45	0.45	0.51	1.56	2.28	2.28
5.0		1	0.01	0.01	0.02	0.07	0.43	0.85	0.86
		5	0.13	0.13	0.14	0.19	0.61	1.49	1.56
		10	0.45	0.45	0.45	0.51	0.93	1.89	1.97
10.0		1	0.01	0.01	0.02	0.07	0.43	0.84	0.84
		5	0.13	0.13	0.14	0.19	0.61	1.45	1.49
		10	0.45	0.45	0.45	0.51	0.93	1.83	1.90

Table 4 Percent relative errors of the one-dimensional approximation in heat flowrates in case of $B_{y_1} = B_{y_2} = B_{z_1} = B_{z_2} = B_t = 1.0$

L	w	τ	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100
0.05		1	0.89	0.96	3.39	3.39	3.39	3.39	3.39
		5	5.41	5.47	7.73	7.73	7.73	7.73	7.73
		10	10.02	10.07	12.14	12.15	12.15	12.15	12.15
0.1		1	0.89	0.94	2.58	5.21	5.21	5.21	5.21
		5	5.41	5.46	6.95	9.65	9.65	9.65	9.65
		10	10.02	10.06	11.42	13.94	13.94	13.94	13.94
0.5		1	0.89	0.94	1.45	5.44	9.59	9.59	9.59
		5	5.41	5.46	5.90	10.12	16.71	16.71	16.71
		10	10.02	10.06	10.47	14.40	20.84	20.84	20.84
1.0		1	0.89	0.94	1.45	4.85	9.46	9.48	9.48
		5	5.41	5.46	5.90	9.42	17.95	18.07	18.07
		10	10.02	10.06	10.47	13.74	22.28	22.41	22.41
5.0		1	0.89	0.94	1.45	4.85	9.13	9.20	9.20
		5	5.41	5.46	5.91	9.42	17.38	17.98	17.98
		10	10.02	10.06	10.47	13.74	21.71	22.44	22.44
10.0		1	0.89	0.94	1.45	4.85	9.13	9.20	9.20
		5	5.41	5.47	5.90	9.42	17.38	17.98	17.98
		10	10.02	10.07	10.47	13.74	21.71	22.44	22.44

때는 10 이하의 모든 Bm 값들에 대하여 B_{y_1} 과 B_{y_2} 의 값의 차이가 q_3 의 변동에 미치는 영향이 무시될 수 있을 정도로 작게 나타남을 Fig. 4로부터 알 수 있다. 따라서 Bm 이 충분히 작고 $L \leq Lm$ 인 범위의 L 값에 대해서는 Bm 값을 계산에 적용할 수 있다.

Table 3, 4는 τ 의 변화에 따른 핀 베이스를 통한 열유동량의 무차원 값들인 Q_1 의 Q_3 에 대한 상대오차 백분율의 계산결과들 중에서 몇 가지 대표적인 경우들을 예로써 제시한 것이다. Table 3, 4로부터 파악할 수 있듯이 모든 경우에 있어서 τ 값이 증가함에 따라 상대오차가 증가하여 정상상태에서 최대로 나타남을 알 수 있다. 핀 표면 Biot수들이 증가하거나 무차원 핀폭 w 가 증가하거나 무차원 핀길이 $L(L \leq Lm)$ 이 증가함에 따라서 상대오차도 증가한다(Biot수가 작은 경우에는 L 의 증가에 따라서 상대오차도 증가하다가 감소하여 어느 일정한 값에 수렴함). 다만 작은 τ 값의 범위에서는 L 의 변동이 상대오차에 미치는 효과는 무시될 수 있음을 알 수 있다.

다음 Fig. 5는 1차원 해석결과의 오차거동을 조사한 예로써 $w=5$ 일 때 B_{y_1} 과 B_{y_2} 의 상대적 차이의 변화에 따른 Q_1 의 Q_3 에 대한 상대오차 백분율을 L 에 대하여 나타낸 것이다. Fig. 5에 나타나 있는 바와같이 Bm 이 증가하거나 B_{y_1} 과 B_{y_2} 의 상대적 차이가 증가함에 따라서 Q_1 의 오차는 증가하며 $L \leq Lm$ 의 범위에서 L 이 증가함에 따라서 Q_1 의 상대오차도 증가하는 경향을 보이거나 Bm 이 작은 값을 갖는 경우에는 Lm 값 근방(예를 들면, $Bm=0.01$ 일 때는 $L=3$ 근방, $Bm=0.1$ 일 때는 $L=1.5$ 근방)에서 최대상대오차를 나타낸다.

Fig. 6은 $L=10$ 일 때 $B_{y_1}=B_{z_2}=0$, $B_{y_2}=B_{z_1}=B_t=2Bm=0.1, 1, 10$ 인 경우들에 대하여 Q_1 과 Q_2 의 Q_3 에 대한 상대오차백분율을 대표적인 계산결과로서 나타낸 것이다. 여기서 Q_2 는 참고문헌 (7)의 부록에 제시되어 있는 2차원 정확해로부터 계산되었으며 그 해는 핀의 양측면이 단열($hz_1=hz_2=0$)이라는 가정하에서 도출된 것이다. Fig. 6으로부터 w 값의 변동에 따른 Q_1 의 상대오차는 둔감하게

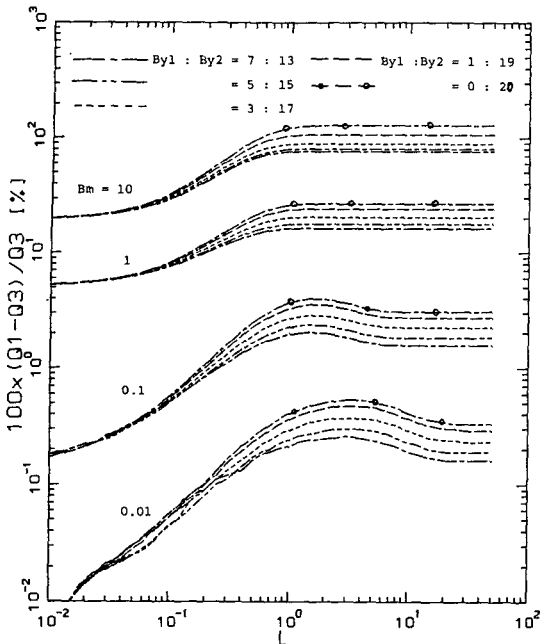


Fig. 5 Percent relative errors of the one-dimensional approximation in heat flowrates from the fin for $w=5$, $\tau \rightarrow \infty$, $B_{x_1} = B_{x_2} = B_t = B_m$

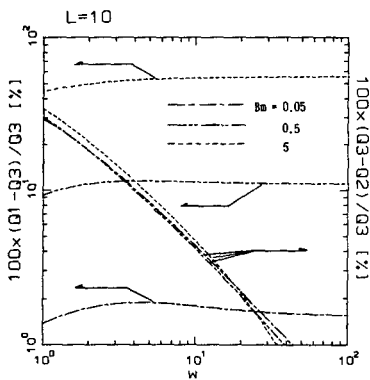


Fig. 6 Percent relative errors of the one-dimensional approximations and the two-dimensional solutions in heat flowrates from the fin for $B_{y_1} = B_{x_2} = 0$, $B_{y_2} = B_{x_1} = B_t = 2B_m$ and $\tau \rightarrow \infty$

변하고 Bm 값의 변동에 큰 영향을 받으며, 반대로 Q_2 의 상대오차는 w 값의 변동에는 민감하나 Bm 값의 변동에는 둔감한 특성을 나타냄을 알 수 있다. Q_1 의 상대오차는 w 가 작은 값을 갖는 범위($w < 10$)에서 w 값이 감소함에 따라서 Q_1 의 상대오차는 감소하고, $Bm = 0.1 - 1$ 의 범위에서는 $1 < w < 10$ 인 구간에서 최대값을 가지며 w 가 10 이상으로 계속

증가하면 Q_1 의 상대오차는 서서히 감소하다가 유한한 값으로 수렴한다. 이는 w 값이 증가하면 핀 폭방향으로의 온도구배효과가 점차 작아지기 때문에 핀 두께방향으로의 온도구배효과만이 Q_1 의 상대오차를 유발하는 요인이 되기 때문이다. 따라서 무한히 큰 w 값의 경우에 대한 Q_1 의 Q_3 에 대한 상대오차는 Q_1 의 Q_2 에 대한 상대오차와 거의 같아진다. 이러한 특성은 Fig. 6에서 Q_2 의 Q_3 에 대한 상대오차의 절대치가 w 값의 증가에 따라 거의 선형적으로 역비례하며 $L=10$, $Bm \geq 0.05$ 인 경우에 w 가 약 45보다 큰 범위에서는 Q_2 의 상대오차의 절대치가 1% 미만으로 된다. 이러한 사실은 핀폭이 증가하면 핀의 좌, 우표면적은 불변인 반면에 핀의 상, 하, 선단 표면적은 비례적으로 증가하여 핀의 전체 대류열전달면적에 대한 좌, 우측 대류열전달면적의 비가 감소하여 0에 접근하므로 핀폭이 무한히 커지면 핀의 양 측면에서의 대류열전달을 무시할 수 있게 되므로 2차원 해석에 의한 열유동량 Q_2 는 3차원 해석결과인 Q_3 와 거의 같아진다는 물리적 의미와 잘 부합된다.

그리고 계산결과들에 의하면 Q_1 은 항상 Q_3 보다 큰 값을 가지며 Q_2 는 Q_3 보다 작은 값을 가지는데, 이러한 현상은 1차원 근사해석에서 핀 두께방향과 핀 폭방향으로의 온도구배효과에 따른 핀의 상, 하, 좌, 우측면에서의 온도강화효과가 고려되지 않아서 핀 표면온도가 핀 중심부와 동일하게 주어지기 때문이며, 2차원 정확해석에서는 핀의 좌, 우측면에서의 대류열전달이 고려되지 않기 때문에 나타난다.

5. 결 론

직선핀의 방열표면들에서의 대류열전달계수 값들이 모두 다르게 주어질 때 핀 베이스에서 온도가 계단변화하는 경우의 3차원 열전도 문제를 변수분리법과 Laplace변환법을 사용하여 핀 내부의 온도 분포와 핀 베이스에서의 열 유동량에 대한 정확해를 구하고 핀의 과도응답 특성과 각종 관련 매개변수들의 변동이 핀성능에 미치는 영향을 조사하였으며 관련매개변수들의 광범위한 값들에 대하여 1차원 근사해석과 핀의 좌, 우측면이 단열된 경우에 대한 2차원 정확해석에 의한 열유동량의 3차원 정확해석결과에 대한 상대오차를 검토함으로써 1차원 근사해 및 2차원 정확해의 적용성을 조사한바 다음

과 같은 결론을 얻었다.

(1) 핀 표면의 과도온도 분포 및 핀 베이스를 통한 열유동량에 대한 1차원근사해석 결과는 과대산정되며 무차원시간 τ 및 핀의 상, 하, 좌, 우 표면들에서의 Biot수 값들의 평균치 Bm 이 클수록 현저하다.

(2) Bm 값이 클수록 무한핀이 되는 최소무차원 길이 Lm 값이 작아지며 고정된 무차원 핀길이 L 값에 대하여 정상상태에 도달하는 무차원시간이 짧아진다.

(3) $L \leq Lm$ 인 범위에서 Bm 값이 작을 때는 L 값이 증가함에 따라 핀 베이스에서의 무차원 평균 열플럭스 q_3 가 증가하나 Bm 값이 약 2 이상의 큰값을 갖는 경우에는 L 값의 증가는 열전도저항의 증가를 초래하며 q_3 가 감소하여, 무차원 핀폭 w 값이 증가하면 핀의 양측면에서의 대류열전달이 전체 열전달에 기여하는 율이 감소하므로 q_3 는 감소하고 w 값이 5 이상으로 증가하면 q_3 의 변동에 미치는 영향이 작아진다. 또한 일정한 Bm 값에 대하여 서로 평행인 양표면들에서의 Biot수 값들간의 상대적 차이가 클수록 q_3 가 감소하는 경향을 보이며 L 및 Bm 값들이 증가하면 그러한 경향은 현저하게 나타나고 Bm 및 L 의 값이 충분히 작은 경우에는 Bm 값을 적용하여 계산하여도 q_3 의 계산 결과에 나타나는 오차는 무시할 수 있을 정도로 작다.

(4) 1차원 근사해석에서는 핀두께 및 핀폭 방향으로의 횡단 온도 구배 효과가 고려되지 않으나 w , Bm 및 핀표면에서의 Biot수 값들간의 상대적 차이가 클수록 핀의 횡단온도 구배가 심해져서 3차원 열유동현상이 현저하게 나타나고 τ 값의 증가에 따른 열침투 깊이를 비롯한 L 값의 증가는 횡단온도구배가 존재하는 3차원 열유동영역을 비례적으로 증가시키므로 일반적으로 τ , $L(L \leq Lm)$, w , Bm 의 값들 및 핀표면들에서의 Biot수 값들의 상대적 차이가 증가할수록 1차원 근사해석에 의한 핀베이스를 통한 무차원 열유동량 Q_1 의 3차원 해석 결과인 Q_3 에 대한 상대오차는 크게 나타난다.

$Bm \leq 0.01$ 인 범위에서는 모든 경우의 기타매개변수 값들의 조합에 대하여 Q_1 의 상대오차는 약 0.5% 이하이다.

(5) 2차원 해석에서는 핀의 양측면에서의 대류열전달이 고려되지 않으므로 Q_2 는 Q_3 보다 과소평가되고, w 값의 증가에 따라서 핀 베이스를 통한 전

체 열유동량에 대한 핀의 양측면에서의 대류열전달 양의 비가 감소하므로 w 값이 무한히 증가하면 Q_2 값은 Q_3 값에 접근하게 되며 Q_2 의 상대오차는 거의 무시할 수 있게 된다. $L=10$ 이고 $0.05 \leq Bm \leq 5$ 일 때, Q_2 의 상대오차가 $w=1$ 에서는 약 30% 이상이고 w 가 증가함에 따라서 거의 선형적으로 감소하여 w 가 45 이상의 값을 갖는 영역에서는 1% 미만으로 되어 2차원 해석 결과가 3차원 해석 결과에 거의 일치하게 된다.

참고 문헌

- (1) Kern, D.Q. and Kraus, A.D., 1972, "Extended Surface Heat Transfer", McGraw-Hill, New York.
- (2) Suryanarayana, N.V., 1973, "Transient response of Straight Fins", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 97, pp. 417~423.
- (3) 손병진, 박희용, 이관수, 이홍주, 1982, "구일두께의 원통핀에서의 과도온도분포에 관한 연구", 한국기계학회논문집, 제 6권, 제 3호, pp. 247~255.
- (4) Irey, R.K., 1968, "Errors in the One-Dimensional Fin Solution", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 90, pp. 175~176.
- (5) Levitsky and Myron, 1972, "The Criterion for Validity of the Fin Approximation", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 10, pp. 1960~1963.
- (6) Lau, Wah, and Tan, C.W., 1973, "Errors in One-Dimensional Heat Transfer Analysis in Straight and Annular Fins", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 95, pp. 549~551.
- (7) 조종철, 서정일, 조진호, 1987, "2차원 열전도문제에 대한 열평형적분법의 응용", 대한기계학회 논문집, 제11권, 제 4호, pp. 616~628.
- (8) Look, D.C., 1988, "Two-Dimensional Fin Performance: Bi(Top Surface) \geq Bi(Bottom Surface)", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 110, pp. 780~782.
- (9) Nowak, A., Bialecki, R. and Kurpysz, K., 1987, "Evaluating Eigenvalues for Boundary Value Problems of Heat Conduction in Rectangular and Cylindrical Co-ordinate System", Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 419~445.
- (10) Özişik, M. N., 1985, "Heat Transfer-A Basic Approach", McGraw-Hill, New York.
- (11) Stachiewicz, J.W., 1969, "Effect of Variation of Local Film Coefficients on Fin Performance", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 91, pp. 21~26.