財務管理硏究 第六卷 第一號(1989)

多期間 財務模型에 관한 硏究

南 壽 鉉*

〈目 次〉

Ⅰ. 序 言

일반적으로 재무이론에서 많이 사용되고 있는 마코윗츠의 포트폴리오 선택이론은 單一期間에 기반을 두고 있는 분석방법이다. 그러나, 현실적으로 투자자들은 多期間에 기반을 둔 포트폴리오 의사결정을 하는 경우가 보다 일반적인 경우라 할 수 있다. 따라서, 투자자의 목적도 1期間의 期末 富로부터 얻어지는 효용의 극대화라기 보다 투자자의 一生동안 얻어지는 各期의 富(消費)로 부터 얻어지는 효용의 극대화라고 가정하는 것이 보다 일반적이다. 그러나, 기간이 길어지게 됨에 따라 투자자들의 耆好(tastes)나 소비재의 가격, 소비기회집합등이 변하기 쉽고 期間別 효용간에 상관관계가 존재할 가능성이 있다. 따라서 多期間 次元에서의 제반 의사결정은 單一期間 次元에서의 경우보다 훨씬 복잡해 질 수 밖에 없다. 그러나, 불행히도 이 多期間 次元에서의 제반문제를 산뜻하게 해결해 줄 만한 모델이나 분석방법이 아직 개발되어 있지 못하다. 上記의 불확실성을 모두 포함하여 하나의 일관된 모델로 만든다는 것은 매우 어려운 일이며 이는 앞으로 재무분야의 한 과제라고 볼 수 있다. 따라서 본 논문에서는 이 문제의 원천적 해결보다도 오히려 어떠 어떠한 제약하에서 多期間 意思決定이 單一期間 意思決定과 동일해 지는가 하는 점에 촛점을 두고 그 제약조건의 도출과 그 조건이 갖는 경제적 의미등을 살펴보도록 한다.

*東義大學校 商經大學 傳任講師

II. 多期間모형의 狀態分析的 接近法

1. 單一期間모형의 경우

재무론의 주된 관심사인 불확실성을 분석하는 방법에는 狀態的 接近法과 確率的 接近法이 있다. 상태적 접근법은 미래의 수익이 나타날 수 있는 모든 가능한 상태를 분석의 단위로 삼는 방법이며, 확률적 접근법은 불확실한 미래의 수익이 나타내는 수익 자체의 확률분포를 분석의 단위로 이용하는 방법이다. 前者는 미래의 불확실성을 그 근원별로 명확하게 나타낼 수 있다는 장점이 있는 반면에, 미래의 상태를 구별해서 표현하는 것이 실제적으로 불가능하다는 단점을 지닌다. 반면에 後者는 위험을 수익의 확률분포로서 인식하게 되므로 실제적 측정과 분석에 적합한 분석방법이다. 그러나, 상태적 접근법은 실제 이용상 어려움이 있지만 理論上 미래의 불확실성에 대한 명확한 분석의 틀을 제공해 주므로 모든 의사결정이론의 기본적 분석개념이 되고 있다. 여기서는 우선 單一期間模型의 경우의 상태적 접근법을 살펴보도록 한다.

1) 純粹證券(pure security)과 保險性狀態(insurable state)

순수증권은 상태조건부 청구권(contingent claim)이라고도 불리우는데, 미래의 한 특정상태에서만 1원의 수익을 발생시키고 나머지 다른 상태에서는 수익이 없는 증권을 의미한다. 순수증권의 수익을 벡타 R_s로 표시하면 $R_1'=(1, 0, \cdots, 0)$이 된다. 모든 포트폴리오 또는 개별자산의 수익은 순수증권의 수익을 선형결합한 형태라고 볼 수 있다. 만일 서로 독립적인 자산의 數와 상태의 數가 같다면, 순수증권의 價格을 알 수 있다. 이처럼 資産의 數와 狀態의 數가 같아서 순수증권의 가격을 구할 수 있는 시장을 完成市場(complete market)이라고 한다. 완성시장에서는 순수증권의 가격이 유일하게 결정되지만, 未完成市場(incomplete market)에서는 유일하게 결정되어지지 않는다.

한편 保險性狀態란 이와같이 순수증권의 가격을 정확히 알아낼 수 있는 상태(state)를 의미한다. 즉 어느 특정 한 상태에서만 수익이 발생하고 나머지 상태에서는 수익이 발생하지 않는 포트폴리오를 구성할 수 있을때 그 해당 상태를 보험성상태라 한다. 아래 (1) 式에 의하면 (1) 式을 만족시키는 포트폴리오 η가 존재할 때 상태 s는 보험성상태라 할 수 있다.

$$Z\eta = l_s \quad \cdots\cdots (1)$$

Z : 수익률 行列(S × N) S는 상태의 수, N은 자산의 수를 의미

η : 포트폴리오(각 자산에의 투자금액)

l_s : 각 상태에서의 포트폴리오 수익(恒等行列) (identity matrix)의 S번째 列)

일반적으로 상태 s가 보험성 상태이면 Z행렬의 s行은 나머지 行들과 線形獨立인 관계에 있다고 할 수 있다.

2) 裁定去來와 價格決定

재정거래의 기회가 있다는 얘기는 투자비용을 들이지 않고서도 ($1\geq 0$) 陽의 수익을 얻을 수 있는 투자기회가 존재한다는 것을 의미한다. 이러한 재정거래가 가능하기 위해서는 포트폴리오의 각 상태별 수익에 있어서 어느 한 포트폴리오의 수익벡터가 다른 포트폴리오의 수익벡터를 완전히 능가하는 支配-

被支配(dominating-dominated)의 관계가 존재하여야 한다. 일반적으로 포트폴리오 w_1의 상태수익벡터(Zw_1)가 포트폴리오 w_2의 상태수익벡터(Zw_1)보다 적지 않으면 포트폴리오 w_1은 포트폴리오 w_2를 지배한다고 한다.

$$Zw_1 \geq Zw_2 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

式(2)에서 不等式 $\geq$ 의 의미는 두 수익벡터의 원소들을 비교함에 있어 Zw_1의 원소들 중 적어도 하나의 원소 이상이 Zw_2의 원소들보다 크다는 것을 의미한다.(물론 모두 같은 경우도 포함함) 두 포트폴리오 사이에 이와 같은 관계가 성립하면, 모든 사람들은 지배 포트폴리오를 선택하려 하지 피지배 포트폴리오를 선택하려고 하지는 않을 것이다. 이 경우 투자자들의 최적투자결정을 피지배 포트폴리오를 무한히 空賣(short selling)하여 얻은 무한한 資金으로 지배 포트폴리오를 무한히 구입하는 것이 될 것이다. 따라서 이 경우 피지배 포트폴리오는 초과공급상태에 놓이게 되고 지배 포트폴리오는 초과수요상태에 놓이게 되므로 균형에 도달하기가 힘든다. 이 때 초과수요나 초과공급의 크기가 둘 다 무한대이므로 피지배 포트폴리오의 가격은 0이 되어 자본시장에서 사라지고, 지배 포트폴리오는 이제 더 이상 지배의 위치를 누릴 수 없으므로 초과수요가 발생하지 않게 된다. 지배관계를 잃어버린 이 포트폴리오의 가격은 다른 포트폴리오와의 적절한 비교로서 이루어 질 것이다. 결국, 현재 자본시장에서 자산이나 포트폴리오들이 어떤 가격으로 거래되고 있다는 사실은 곧, 이들 자산사이에 式(2)와 같은 지배관계가 없다는 뜻이다.

한편, 재정거래와 순수증권의 가격과의 관계를 논의해 보면 순수증권의 가격이 陰이면 반드시 재정거래기회가 존재한다는 것이다. 이는 逆도 성립한다. 따라서 陽의 순수증권 가격벡터는 재정거래기회의 不在를 보장해 주는 것이된다[1]

2. 多期間模型의 경우

여기서는 多期間모형의 경우를 살펴보고자 한다. 多期間모형에 있어서의 불확실성 문제도 前術한 바와 같이 狀態的 接近法에 의해 해결해 보고 이러한 불확실성이 多期間모형에 어떠한 형태로 나타나게 되는가를 논의해 보도록 하자

1) 現在價値의 一般的 表現

多期間모형에서 어떤 자산의 현재가치는 아래 式 (3)과 같이 표현될 수 있다.

$$V_t = \sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{E[\tilde{d}_\tau]}{(1+K)^{\tau-t}} + \frac{E[\tilde{v}_T]}{(1+K)^{T-t}} \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

여기서 $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \cdots$는 기간 1, 2, …에 있어서의 현금배당을 의미하고 $v_o, \tilde{v}_1, \cdots$은 기간 0, 1, …에 있어서의 배당락가치를 의미하며 K는 이 자산에 대한 적절한 할인율을 뜻한다. 單一期間에서의 자산의 현재가치를 나타내는 식은 $V=E[\tilde{y}]/Z$이다. 여기서 $\tilde{y}$는 1期間 후의 成果(payoff)인 배당과 終價의 合을 의미하며 $K \equiv Z-1$로서 기대수익률을 의미한다.

---

1) 재정거래기회에는 1次型과 2次型 재정거래기회 두가지가 있다. "⊕의 순수증권 가격 벡터가 존재한다 → 1.2次型 재정거래기회가 모두 존재하지 않는다." 이 정리의 증명과 보기는 Ingersoll[1987] pp. 54~57 참조

2) 多期間모형의 狀態的 接近法

$h_{t,T}$: (t+1)期로부터 T期까지의 상태를 나타내는 벡터[2)]

$$h_{t,T} \equiv (\tilde{S}_{t+1}, \tilde{S}_{t+2}, \cdots\cdots\cdots, \tilde{S}_T)'$$

$P(h_{o\tau} \mid h_{ot})$: τ時點에서 $1을 주는 증권의 t時點과 그 이후의 기간에서의 가치[3)]

이 개념들을 이용하여 多期間模型에 있어서의 資産의 價値를 표시해 보자. $d_i(h_{ot})$는 h_{ot}가 발생했을 때 t時點에서의 資産i의 配當落價値(ex-dividend value)를 의미한다.

$$V_i(h_{ct}) = \sum_{\tau=t+1}^{T} \sum_{h_{t\tau}} di\ (h_{o\tau})\ P(h_{o\tau} \mid h_{ot}) + \sum_{h_{tT}} Vi(h_{oT} \mid h_{ot}) \quad \cdots\cdots (4)$$

이 식에서 $\sum_{h_{t\tau}} di(h_{o\tau})\ P(h_{o\tau} \mid h_{ot})$는 τ時點에서 지불되는 확률적 배당(stochastic dividend)의 현재時點(t時點)에서의 가치를 의미하며 이는 (3)式의 $E[\tilde{d}\tau]/(1+k)^{\tau\text{-}t}$와 같은 개념이다. 마지막 項인 $\sum_{h_{tT}} Vi(h_{o\tau} \mid h_{ot})$은 T時點에 있어서의 자산의 배당락 가치의 현재시점에서의 가치이며 (3)式의 $E[\tilde{V}_T]/(1+k)^{T\text{-}t}$에 해당한다.

多期間模型의 경우에도 재정기회와 가격간에는 單一期間의 경우와 동일한 관계가 성립한다. 즉 재정거래기회가 존재하지 않으면 각 history에 대한 상태 가격(state price)이 陽이어야 한다. 陽의 상태 가격은 재정기회 不在에 대한 充分條件이 되는 것이다.

III. 期間別 消費·投資 意思決定

투자자들의 궁극적인 목적은 그가 死亡할 때까지의 소비로 부터 얻게 되는 기대효용을 극대화하는 데 있다. 그는 각 기간별로 적절한 투자행위를 함으로써 그의 총 생애에 걸친 소비계획을 세울 수 있다. 물론 최후 연도의 소비는 遺産으로서 후손에게 남기게 될 것이다. 문제는 이러한 多期間에 걸친 소비·투자 의사결정을 하는 데 있어서 우리가 일반적으로 사용하고 있는 單一期間의 소비·투자 의사결정 루울을 그대로 적용시킬 수 있는가 하는 점이다. 사실 많은 점에서 多期間 소비·투자문제는 單一期間 소비·투자문제와 유사하다. 그러나 다른 점 또한 많다. 따라서 여기서는 이 두가지 문제 사이의 차이를 이어 주는 다리 역할을 하는 수단을 발견하는 데 그 목적이 있다.

1. 期間別 消費·投資模型

總 T기간동안의 최적 소비와 투자문제에 직면한 투자자는 예산제약하에서 다음과 같은 함수를 극대화시킬려고 할 것이다.

$$\text{Max } E[\tilde{U}(C_o, \tilde{C}_1, \cdots\cdots, \tilde{C}_T; \tilde{h}_{oT})] \quad \cdots\cdots (5)$$

효용함수에 history $\tilde{h}_{ot}$가 內在되어 있는 것은 효용함수가 상태의존적이라는 것을 의미한다. 즉 효용함

2) history 또는 evolution이라고 부른다.

3) $h_{ot} \equiv (\tilde{S}_1, \cdots, \tilde{S}_t)'$를 아는 상태하에서 $\tilde{S}_\tau$의 다양한 state중 어느 일정 state에서 $1을 지불하는 순수증권이 t시점(혹은 그 이후)에서 어떻게 평가되는가를 나타낸 순수증권의 가격벡타(state price를 의미)

수는 미래 나타날 수 있는 여러 상태에 따라 그 형태가 바뀌어 질 수가 있다는 것이다. 이는 투자자의 선호의 변화, 투자기회집합의 변화등에 起因하는 것으로 볼 수 있다. 한편 (5)式을 單一期間에서의 T個의 消費財를 선택하는 문제로 해석할 수도 있다. 물론 여기에는 효용함수가 期間別 獨立性을 갖고 있는 효용함수중에서 가장 대표적인 分離可算形 효용함수이다. 이 함수는 아래와 같이 쓰여진다.

$$\hat{U}(C_o, \cdots\cdots, C_T; h_{oT}) = \sum_{t=o}^{T} U(C_t, h_{ot}) \quad \cdots\cdots (6)$$

이 式을 우리가 극대화하려고 하는 목적함수인 (5)式에 적용시켜 보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} E[\hat{U}(C_o; C_1 \cdots\cdots, C_T; h_{oT})] &\equiv \sum_{h_{oT}} \pi(h_{oT}) \sum_{t=o}^{T} U(C_t, h_{ot}) \\ &= \sum_{t=o}^{T} \sum_{h_{oT}} \pi(h_{ot})\ U(C_t, h_{ot}) \sum_{h_{tT}} \pi(h_{tT} \mid h_{ot}) \quad \cdots\cdots (7) \\ &= \sum_{t=o}^{T} \sum_{h_{ot}} \pi(h_{ot})\ U(C_t, h_{ot}) \end{aligned}$$

여기서 두번째 등식은 $\sum_{h_{oT}}$ 와 $\sum_{t=1}^{T}$ 의 순서를 바꾸고 history를 두 부분으로 나눈 것이며, 마지막 등식은 $\sum_{h_{tT}} \pi(h_{tT} \mid h_{ot})$가 모든 가능한 미래의 확률의 合을 의미하므로 1이 되어 성립하게 되는 것이다. 따라서 $\sum_{h_{tT}}$도 $\sum_{h_{ot}}$로 바뀌게 된다.

2. 富의 期間 配分모형

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & T\text{-}1 & & T \\ W_o < \begin{matrix} C_o \\ W_o - C_o \rightarrow \end{matrix} & \tilde{W}1 < \begin{matrix} C_1 \\ \tilde{W}1 - C_1 \rightarrow \end{matrix} & W_2 & & \tilde{W}_{T-1} < \begin{matrix} C_{T-1} \\ \tilde{W}_{T-1} - C_{T-1} \rightarrow \end{matrix} & & \tilde{W}_T \end{array}$$

$\max\ EU(C_o, C_1, \cdots\cdots, C_{T-1}\ W_T \mid \phi_T)$

C_t : t期에 있어서의 소비

T : 마지막 期

W_T : 사망 후 상속자에게 물려주는 유산

ϕ_T : T期까지 이용가능한 정보집합

1) 動的 計劃法(Dynamic Programming)

동적계획법은 一連의 연쇄적 의사결정을 포함하고 있는 문제를 해결하는데 유용한 수학적 모델이다. 이 계획법은 일련의 사건이나 임의의 계획기간 동안에 여러 단계에 걸쳐 발생하는 문제를 해결할 수 있도록 하는 체계적 수단인 것이다. 동적계획법은 Richard Bellman에 의해 1947년에 처음으로 발표되었으며 그 후 여러가지 분야의 단계적 또는 연쇄적 의사결정문제에 널리 사용되어 왔다. 동적계획법은 문제를 여러가지의 부속문제로 분할하고 이 분할된 각 단계의 상호관련성을 고려하여 의사결정하게 된다.

동적계획법에는 前方 동적계획법(forward DP)과 後方 동적계획법(backward DP)의 두 가지가 있는데 前方 計劃法은 첫단계부터 차례로 의사결정해 나가는 방법이고 後方 計劃法은 마지막단계부터 먼저 의사결정하고 逆順으로 거슬러 내려오면서 의사결정하는 방법이다. 期間別 消費·投資 意思決定問題는

後方 동적계획법에 근거를 둔다. 총 생애동안 얻는 각 기간의 소비들에 대한 기대효용을 극대화하기 위하여서는 가장 마지막 단계에서 부터 최적 소비 · 투자 의사결정을 해 나가는 것이 타당하기 때문이다.[4] 이에 의하면 아래와 같은 순환적 관계를 얻게 된다.

$$F_T\ (C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_{T-1},\ W_T \mid \phi_T) \equiv E[U(C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_{T-1},\ W_T \mid \phi_T)]$$

$$F_{T-1}\ (C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_{T-2}\ W_{T-1} \mid \phi_{T-1}) = \max_{C_{T-1},\ h_{T-1}} E[F_T(C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_{T-1},\ W_T \mid \phi_T)] \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

C_{T-1} : (T-1)期에서의 소비

h_{T-1} : (T-1)期에서 각 자산에 투자한 투자비율

이와같이 (T-1)期에서의 소비와 투자결정은 T期에서의 소비 · 투자 결정이 최적으로 이루어 졌다는 전제조건하에 이루어진다. 따라서 F_T 함수는 F_{T-1} 함수의 투입물(input)로서 사용되게 되는 것이다. 이를 일반적인 t期에 대해 유도해 보면 다음과 같다.

$$F_t\ (C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_{t-1},\ W_t \mid \phi_t) = \max_{C_t,\ h_t} E[F_{t+1}(C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_t,\ W_{t+1} \mid \phi_{t+1})] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

따라서 t期에서의 최적 소비 · 투자의사결정은 (t+1)期와 그후의 期間에서의 소비 · 투자의사결정이 최적으로 이루어졌다는 전제조건하에서 최적 소비액과 각 자산에의 투자비율을 결정하는 것이다.

여기서 多期間 모델 F_t는 單一期間 모델인 f_t로 바꿀수 있다. 왜냐하면 이용가능한 정보집합 ϕ_t하에서 $C_1,\ C_2\ \cdots,\ C_{t-1}$은 모두 알려진 수치가 되도록 의사결정이 이루어지기 때문이다. 따라서 上記 F_t 式은 아래와 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} F_t(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_{t-1},\ W_t \mid \phi_t) &= \max_{C_t,\ h_t} E[F_{t+1}(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_t,\ W_{t+1} \mid \phi_{t+1})] \\ &= \max_{C_t,\ h_t} E[f_{t+1}(C_t,\ W_{t+1} \mid \phi_{t+1})] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10) \end{aligned}$$

만약 위와같은 조작이 불가능하다면 각 기간에 따른 여러 상태에 대한 모든 경우의 數를 다 찾아내야 하므로 매우 복잡한 계산이 되게 된다. 그러나, 여기서 효용함수 $F_T(\cdot)$와 誘導된 효용함수(derived utility funciton) $F_t(\cdot)$ 혹은 $f_t(\cdot)$가 그 특성上 동일한 효용함수 일 수는 없다. Fama[5]는 다음과 같은 정리가 성립함을 증명함으로써 다기간 모델과 단일기간 모델 사이에 다리를 놓았다.

(정리1) $F_{t+1}(\cdot)$가 單調增加 強오목 (monotonically increasing and strictly concave) 效用函數이면 $F_t(\cdot)$도 역시 單調增加 強오목 효용함수이다.

즉 위의 정리가 성립함으로써 式(10)의 $F_t(\cdot)$의 의사결정문제를 單一期間인 $f_{t+1}(\cdot)$의 문제로 단순화 시킬 수 있다. 물론 이 정리가 둘 사이의 문제를 완전히 없애 하나의 合一된 모형으로 만들어 주는 것은 아니다. 그러나 단조증가 강오목이란 특성이, 유도된 효용함수에서도 그대로 보존되므로 위험회피 투자자란 일관된 기준이 유지되어 질 수 있는 것이다. 따라서 (10)式은 狀態依存的 效用(state-dependent utilities)을 가진 위험회피 투자자의 소비 · 투자 의사결정을 위한 單一期間 모형이라 할 수 있다.

---

4) backward DP의 多期間 消費 · 投資問題에의 적용例는 Francis & Archer[1979]의 pp. 285~288을 參照할 것.

5) Fama, Eugene F. "Multiperiod Consumption-Investment Decisions", American Economic Review 60, (1970) pp. 163~74.

그러나 (10)式은 투자자의 행동에 대한 어떠한 산뜻한 가설도 제시해 주지 못한다. 단지 투자자가 위험회피적 성향을 가지고 행동한다는 정도의 의미밖에 나타내 주지 못한다. 투자자의 행동에 관한 모델이 도출되기 위해서는 우선 (10)式의 효용함수가 狀態 ϕ_{t+1}에 의존하는 상태의존적 효용함수에서 벗어나야 한다. 일반적으로 상태의존적 효용은 다음 3가지 원천에서 기인하는 것으로 볼 수 있다. ① 소비재 묶음(bundle)에 대한 嗜好(tastes)가 상태의존적인 경우 ② 주어진 소비금액으로 얻을 수 있는 효용이 소비재의 이용가능성과 그 가격에 의존하는 경우 ③ 미래의 투자기회가 앞으로 발생할 事象에 의존하는 경우의 3가지이다. 따라서 이러한 상태의존적인 효용을 배제하기 위해서는 아래와 같은 가정이 필요하다.

1. 소비자의 기호가 상태와 독립적이다.
2. 소비자들은 어떤 기간의 始初에 소비 기회와 가격을 미리 알고 행동한다.

위의 가정下에서 $f_{t+1}(C_t, W_{t+1} \mid \phi_{t+1})$은 $f_{t+1}(C_t, W_{t+1})$로 쓸 수 있으며, $f_{t+1}(\cdot)$은 기간에 따라 변하지 않고 항상 일정하다.

2) 等彈力的 效用函數(Isoelastic Utility Functions)

위의 가정대로 嗜好나 機會가 상황에 의존하지 않는 효용함수를 가진 위험회피자는 동적계획법에 의해 多期間 문제를 單一期間 문제로 바꿀 수 있다. 그러나, 이 때의 효용함수가 어떠한 함수형태인가에 따라 투자가의 포트폴리오 선택행위가 달라지게 된다. 즉 우리는 앞의 가정에 의해 모든 기간의 유도된 효용함수는 동일한 것으로 추론하게 되었다. 그러나 일정 집합에 속하는 효용함수를 가진 투자자는 훨씬 산뜻한 투자행위를 하게 될 것이다.

(정리2) 투자자가 等彈力的 효용함수를 가지면 多期間의 경우도 單一期間의 경우와 같이, 각 期間別로 近視眼的인 포트폴리오 선택(myopic period-by-period selection of Markowitz-efficient portfolio) 행위가 최선의 투자행위가 된다.

等彈力的 效用函數란 相對危險回避(Relative Risk Aversion : RRA)가 常數인 효용함수를 말한다. Arrow-Pratt의 RRA는 富의 증가에 따른 위험자산에의 투자비율을 의미하는 것으로서 이는 결국 富에 대한 限界效用의 탄력성을 나타내는 것으로 해석할 수 있다.[6]

등탄력적 효용함수는 富와 수익을 분리시킨다. 따라서, 투자자의 효용은 투자자의 富의 수준과는 관계없이 投資收益만을 분석함으로써 극대화되어 질 수 있다. 즉 최적 포트폴리오는 富의 변화와는 무관하게 결정된다는 뜻이다. 이러한 분리의 성질(seperability property)은 각 기간을 다른 수준의 투자금액을 가지고 시작하는 多期間 투자자의 효용분석에 크게 도움을 준다. 등탄력적 효용함수를 가진 투자자들은 그들의 부가 매기간 어떻게 변하든 관계없이 동일한 收益의 效用函數(utility of return function)를 극대화하면 된다. 이러한 近視眼的 투자행위는 단순하면서도 최적의 행동이 되는 것이다. Mossin[7]은 등탄력적 효용함수의 보기로 아래 3가지를 들었다.

① $U(W)=\ln(W)$ ·· logarithmic

---

6) $e = -\dfrac{\triangle U'/U}{\triangle W/W} = -\dfrac{W}{U'} \cdot \dfrac{\triangle U'}{\triangle W} = -\dfrac{W}{U'} \cdot \dfrac{dU'}{dW} = -\dfrac{U''}{U'} \cdot W = RRA$

7) Jan Mossin, "Optimal Multiperiod Portfolio Polices", journal of Business, April 1968, pp. 215~229.

② $U(W)=W^{1-p}$ $0<p<1$ ·· positive fractional power

③ $U(W)=W^{1-p}$ $p>1$ ··· negative exponential

Ⅳ. 多期間 포트폴리오 選擇

다기간에 걸친 최적 포트포리오의 선택문제를 아래와 같은 가정과 예산제약하에서 분석하여 보기로 하자.

(가정)

① 투자자는 각 기간에 걸친 소비로부터의 기대효용을 극대화하려고 한다.(Max Ea{U (C_0, C_1, ···, C_{T-1}, W_T)})

② 사망년도 T가 알려져 있다.

③ 효용함수는 분리 可算型(additively seperable)이다.

$$U(C_0, C_1, \cdots, W_T)=\sum_{t=0}^{T-1} U(C, t)+B(W_T, T) \quad \cdots\cdots (11)$$

U(·);오목형 소비효용함수

B(·);오목형 유산효용함수

(예산제약)

$$W(t) + Y(t) - C(t) \equiv I(t)=\sum_{t=0}^{T} N_i(t) \ P_i(t) \quad \cdots\cdots (12)$$

$P_i(t)$; i증권의 t시점에서의 가격

$N_i(t)$; i증권의 t시점에서의 구입 株數

W(t) ; t시점의 투자자의 富

C(t) ; t시점의 비자본 수입(non-capital income)

$$W(t+1)=I(t) \sum_{t=0}^{T} w_i(t) \ Z_i(t)$$

$$=[W(t) - C(t) + Y(t)] \ [\sum_{t=1}^{T} w_i(t) \ [Z_i(t) - R] + R] \quad \cdots\cdots (13)$$

$w_i(t) \equiv N_i(t) \ P_i(t) / I(t)$: i자산에의 투자비율

$\tilde{Z}_i(t)=\tilde{P}_i(t+1) / P_i(t)$: i자산의 수익율

(분석방법)

① 먼저 수명이 1년 남은 투자자의 최적 소비, 최적 portfolio를 구하고, 다음 수명이 2년 남은 투자자의 최적 소비, 최적 portfolio를 구하며, 이를 일반화시켜 (T-t)년 남은 투자자의 최적 소비, 최적 portfolio를 구한다.

② 문제의 성격이 다단계식 의사결정인 만큼 D.P의 최적성의 원리(principles of optimality)를 사용한다.

③ 각 단계에서의 최적화 조건을 유도하고 이의 경제적 의미를 밝힌다.

④ 특정 효용함수하에서 C*, Z*의 특징을 살펴본다.

1. 最適 消費와 포트폴리오 選擇

誘導된 富의 效用函數(derived utility of wealth function)를 아래와 같이 정의하자.

$$J[W(t),\ t] \equiv \text{Max}\ E_t[\sum_{s=t}^{T-1} U(C,\ S) + B(W_T,\ T)] \tag{14}$$

$$J[W(T),\ T] \equiv B[W(T),\ T]$$

효용함수 J가 시간의 함수로 표시된 것은, 효용이 시간선호에 따라 변화할 수 있다는 可視的 效果외에도 효용이 투자자에게 이용가능한 정보와 기회집합의 변화에 따라 변할 수 있다는 暗黙的 效果도 포함하고 있다고 볼 수 있다.

1) t=T−1인 경우

$$\begin{aligned} J[W(T-1),\ T-1] &= \underset{C,\ w_i}{\text{Max}}\ E_{T-1}\ [U(C,\ T-1) + B(W(T),\ T)] \\ &= \underset{C,\ w_i}{\text{Max}}\ [U(C,\ T-1) + E_{T-1}B(W(T),\ T)] \end{aligned} \tag{15}$$

이 式의 1次條件(first-order condition)을 구하면 아래와 같다.

$$O = \frac{\partial J}{\partial C} = U_c(C,\ T-1) - E_{T-1}[Bw_T(\cdot)(\sum_1^N w_i[Z_i - R] + R\ \ ] \ \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(16a)}$$

$$O = \frac{\partial J}{\partial w_i} = E_{T-1}[Bw_T(\cdot)(Z_i - R)] \ \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(16b)}$$

효용함수 U(·)와 B(·)가 오목함수이므로 2次條件은 만족될 것이다. 그러나, 최적해 C*가 陰일 가능성은 여전히 존재한다. 여기서는 그러한 가능성은 例外로 하기로 하자.

(16a)式은 $U_c = E[Z^* B_w]$와 같이 쓸 수 있다. 이는 현재 소비의 한계효용이 미래 富의 기대한계효용과 같다는 것을 의미한다. (16b)式을 사용하면 이 식은 아래와 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$U_c = E_{T-1}[B_w Z^*] = R\ \ E_{T-1}[B_w] \ \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(17)}$$

(17)式은 현재소비의 한계효용이 누적 기대한계효용과 같다는 것을 의미한다. 이와 같이 미래의 기대한계효용이 할인되어 지지 않고 누적되어 있는 형태로 표시 가능한 이유는 효용함수가 자체내에 할인요소를 암묵적으로 내포하고 있다고 볼 수 있다. 즉, 효용함수 U(c, t)로 부터 할인요소를 분리하여 $U(c,\ t) = \delta^t u(C)$로 표시하고 B(W, T)도 $\delta^T b(W)$와 같이 표현하면 (17)式은 아래와 같이 표시되어 미래의 기대한계효용이 할인되어 진다.

$$u_c = \delta R\ \ E_{T-1}(b_w) \ \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(18)}$$

이 관계는 다음과 같은 과정을 거쳐 표현될 수도 있다. C*와 w_i^*를 (15)式에 대입하고 이를 W에 대해 미분하면 (이 때 (13)式과 chain rule을 사용) 아래와 같다.

$$J_w = U_c \frac{\partial C^*}{\partial W} + E_{T-1}[B_w(\cdot)\ [Z^*(1 - \frac{\partial C^*}{\partial W}) + \sum_{i=1}^N (Z_i - R) I^* \frac{\partial W_i^*}{BW}]] \ \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(19)}$$

$$J_w = [U_c - E_{T-1}[Z^* B_w(\cdot)]] \frac{\partial C^*}{\partial W} + I^* \sum_{i=1}^N \frac{\partial w}{BW_i} E_{T-1}[B_w(\cdot)\ (Z_i - R)] + E_{T-1}[B_w(\cdot) Z^*] \tag{20}$$

여기서 첫번째 項은 (17)式에 의해 0이고 두번째 項도 (16b) 式에 의해 0이다. 따라서 아래 式이 성립하게 되고 이 等式을 envelope condition이라 부른다.

$$J_w = E_{T-1}[B_w(\cdot)\tilde{Z}^*] = R\ \ E_{T-1}[B_w(\cdot)] = U_c \quad \cdots\cdots (21)$$

2) t = T-2인 경우

$$\begin{aligned} J[W(T-2),\ T-2] &= \text{Max}\ (U(C,\ T-2) + E_{T-2}\ [U(\tilde{C},\ T-1) + B(\tilde{W},\ T)]) \\ &= \text{Max}_{T-2}(U(C,\ T-2) + E_{T-2}\ \text{Max}_{T-1}E_{T-1}\ [U(\tilde{C},\ T-1) + B(\tilde{W},\ T]) \quad \cdots\cdots (22) \\ &= \text{Max}_{T-2}\ (U(C,\ T-2) +\ \ E_{T-2}\ J[\tilde{W}(T-1),\ T-1]) \end{aligned}$$

이는 B대신 J를 代入한 점을 제외하고는 (15)式과 동일한 형태이다. 따라서 마찬가지의 방법으로 최적 소비 · 투자 의사결정이 이루어지고 이로부터 envelope condition도 도출되게 된다.

3) t=t인 경우

$$\begin{aligned} J[W(t),\ t] &= \text{Max}(U(C,\ t) + E_t[\sum_{s=t+1}^{T} U(\tilde{C},\ s) + B(\tilde{W},\ T)]) \\ &= \text{Max}(U(C,\ t) + E_t(J[\tilde{W}(t+1),\ t+1])) \quad \cdots\cdots (23) \end{aligned}$$

이도 역시 (15)式과 동일한 형태이며, 마찬가지의 조작 방법을 사용하여 최적 조건을 도출해 내면 아래와 같다.

$$U_c(C,\ t) = E_t[J_w((W-C)\ \tilde{Z}^*,\ t+1)] \quad \cdots\cdots (24a)$$

$$E_t[J_w(W-C)\ \tilde{Z}^*,\ t+1)\ (\tilde{Z}_i - R)] = 0,\ i = 1,\ \cdots,\ n \quad \cdots\cdots (24b)$$

위 式은 $U_c(C,\ t) = J_w(W,\ t)$와 같이 다시 쓸 수 있고, 이는 envelope condition인 것이다. 이 조건의 의미는 투자자가 소비하게 되는 최적수준은 소비의 한계효용과 부의 한계효용이 같아지는 점까지 라는 것이다. 최적 포트폴리오 선택문제는 (24b)式에서와 같이 단일기간 문제로 풀려질 수 있게 된다. 그러나, 이것이 단일기간 문제와 완전히 동일한 것이라고 볼 수는 없다. 왜냐하면 다음 기간의 유도된 효용함수는 미래 투자기회에 따라 변할 수 있는 미래의 최적 포트폴리오에 의존하기 때문이다.

2. 特定 效用函數의 경우

1) 로그 효용함수(Y = 0)

효용함수를 $U(C,\ t) = \delta^t \ln C$, $B(W,\ T) = \delta^T \ln(W)$라 하자. 최적 소비수준 결정식(16a)으로 부터 아래와 같은 식을 유도할 수 있따.

$$U_c = E_{T-1}\ [B_{W_T}[(W_{T-1} - C^*),\ T]\ \tilde{Z}^*] \quad \cdots\cdots (25)$$

$$\frac{\delta^{T-1}}{C^*} = E_{T-1}\left[\frac{\tilde{Z}^*\delta^T}{(W_{T-1} - C^*)\tilde{Z}^*}\right] = \frac{\delta^T}{W_{T-1} - C^*} \quad \text{or} \quad C^*_{T-1} = \frac{W_{T-1}}{1+\delta}$$

따라서 최적소비수준은 富에 비례하고 δ에 반비례한다고 볼 수 있다. 時差選好가 0인 경우(δ = 1)는 殘餘 富의 半은 소비되고 半은 저축된다고 볼 수 있으며, 時差選好가 陽인 경우 (δ<1)는 半이상이 소비되어 진다고 볼 수 있다.

한편, 최적 포트폴리오를 구하기 위해 (16*b*)式을 사용하면 아래와 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$E_{T-1}[B_w(\cdot)\ Z_i] = R\ E_{T-1}[B_w(\cdot)]$

$$\delta^T E_{T-1}\ [\frac{Z_i}{Z^*(W_{T-1} - C)}] = \delta^T R E_{T-1}[\frac{1}{Z^*(W_{T-1} - C)}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

$$E_{T-1}\ [\frac{Z_i}{Z^*}] = R\ E_{T-1}[\frac{1}{Z^*}] \qquad i = 1, \cdots, n$$

(26)의 맨 마지막 式의 양변에 w_i^*를 곱하고 모든 자산에 대해 이를 더하면 $E(1) = RE[1/Z^*]$를 얻는다. 따라서 우리는 최적 포트폴리오를 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$E_{T-1}\ [\frac{Z_i}{Z^*}] = 1 \qquad i = o, 1, \cdots, n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

따라서 이 문제의 解는 單一期間을 가진 로그 효용함수 투자자의 포트폴리오 선택행위와 동일하게 된다.

이제 기간을 보다 더 확장해 보자 T = T가 아닌 그 以前의 기간의 문제를 풀기 위해서는 유도된 효용함수 J(W, T-1)등을 구해야 한다. envelope condition과 (25)式을 사용하고 이를 한번 積分하면 아래와 같은 式을 얻는다.

$$J_w(W,\ T-1)\ =\ U_c\ = \frac{\delta^{T-1}}{C^*} = \frac{\delta^{T-1}(1+\delta)}{W_{T-1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

$J(W,\ T\text{-}1) = \delta^{T-1}(1+\delta)\ ln\ W + k$ (k : 적분상수)

(15)式을 사용하여 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J(W,\ T\text{-}1) &= \delta^{T-1}\ ln\ C^* + E_{T-1}\ B[\tilde{W}_T^*,\ T] \\ &= \delta^{T-1}\ ln\ (\frac{W}{1+\delta}) + \delta^T\ E_{T-1}\ ln[Z^*(W - C^*)] \\ &= \delta^{T-1}\ ln\ (\frac{W}{1+\delta}) + \delta^T\ E_{T-1}\ ln\ Z^* + \delta^T\ ln[W(1 - \frac{1}{1+\delta})] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (29) \\ &= \delta^{T-1}(1+\delta)\ ln\ W + \delta^{T-1}[\delta\ ln(\frac{\delta}{1+\delta}) - ln(1+\delta) + \delta\ E_{T-1}\ ln\ Z^*] \\ &= \delta^{T-1}(1+\delta)\ ln\ W + \phi(T\text{-}1) \end{aligned}$$

이 式을 앞의 (22)式의 경우와 같은 적절한 조작을 하면 J(W, T-2)도 역시 로그함수라는 것을 알 수 있다. 따라서 이 경우 일반적인 모든 유도된 효용함수는 로그함수라는 것을 알 수 있다. 일단 유도된 효용함수가 그 형태가 변하지 않는다는 사실을 알았으므로 이제 가장 일반적인 t=t의 경우의 최적 소비·투자문제를 논해보기로 하자.

$J(W,\ t+1) = \delta^{t+1}\ f(t+1)\ ln\ W + \phi(t+1)$이라 하고 (23)式을 이용하면

$$U_c\ = \frac{\delta^t}{C^*} = E_t[J_w(\cdot)Z^*]\ =\ \delta^{t+1}\ f(t+1)\,E_t\ \frac{Z^*}{(W_t - C^*)Z^*} \cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

를 얻는다. 위의 조건으로 부터 최적 소비수준을 구하면

$$\dot{C}_t = [1 + \delta\ f(t + 1)]^{-1}\ W_t \equiv h(t)\ W_t \quad \cdots\cdots (31)$$

와 같다. 이를 (23)式에 대입하면 아래와 같아진다.

$$\begin{aligned} J(w,\ t) &= \delta^t\, ln[h(t)W] + E_t\{\delta^{t+1} f(t + 1)\ ln[Z^* W(1-h(t))] + \phi(t + 1)\} \\ &= \delta^t [1 + \delta f(t + 1)] ln W + \phi(t) \quad \cdots\cdots (32) \end{aligned}$$

이 式을 $J(w, t + 1)$의 式과 비교하여 잘 관찰해 보면 $f(t) = 1 + \delta f(t + 1)$이라는 것을 알 수 있다. $f(T) = 1$이라 하고 각 기간별로 이 관계에 의해 반복적으로 $f(t)$를 평가하면

$$f(t) = 1 + \delta + \cdots + \delta^{T-t} = \frac{1 - \delta^{T-t+1}}{1-\delta}$$

이 되게된다. 따라서 최적 소비는 (31)式과 (33)式에 의해 아래와 같이 표시되고 이는 富의 一定部分이 된다.

$$C(t) = \frac{1 - \delta}{1 - \delta^{T-t+1}} W(t) \quad \cdots\cdots (34)$$

이는 여러 분리가산형 효용함수 중에서도 「로그」 효용함수에만 적용되는 독특한 성질이다.

$\phi(t)$에 대한 반복과정을 기술해 보면 $\phi(t)$가 $\phi(t + 1)$을 통하여 미래의 투자기회에 의해 영향을 받는다는 것을 알 수 있다.

$$\phi(t) = \delta^{t+1}\ f(t + 1)\left[ln\left(\frac{f(t)-1}{f(t)}\right) - \frac{ln\, f(t)}{\delta f(t + 1)} + E_t\, ln\, Z^*\right] + E_t[\phi(t + 1)] \quad \cdots\cdots (35)$$

그러나, 이 때문에 최적 포트폴리오 선택문제가 영향을 받지는 않는다. 왜냐하면 포트폴리오 선택문제는 J_w에 의해서만 영향을 받지 ϕ_t에 의해서는 영향을 받지 않기 때문이다. (24b)式으로부터 최적 포트폴리오 선택조건을 유도하면 아래와 같고 이는 單一期間 「로그」 효용함수 투자자의 포트폴리오 선택문제와 꼭 같아지게 되는 것이다.

$$\delta^t f(t)\, E_t[[\frac{f(t)-1}{f(t)} W \sum_{0}^{n} w_i Z_i]^{-1} (Z_i - R)] = 0 \quad \cdots\cdots (36)$$

이상에서 살펴 본 바와 같이 「로그」 효용함수의 경우는 최적 소비가 현재와 미래의 이용가능한 수익에 의존하지 않고, 최적 포트폴리오 선택문제도 미래의 투자기회에 의해 영향을 받지 않는 단일기간 선택문제와 동일하다는 것을 알 수 있다.

2) power 效用函數

효용함수를 $U(C, t) = \delta^t\ C^\gamma/\gamma$, $B(W, T) = \delta^T\ W^\gamma/\gamma$와 같이 power 형태로 나타내 보자.

우선 맨 마지막 期에 있어서의 최적 소비와 포트폴리오 선택문제를 논의해 보기로 하자. (16a)式에 의해 $t = T-1$에 있어서의 최적 소비수준은 아래와 같다.

$$U_c = E_{T-1}\ [B_w(\cdot)\ Z^*]$$

$$\delta^{T-1}(C^*)^{\gamma-1} = \delta^T E_{T-1}[(W_{T-1} - C^*)^{\gamma-1} .(Z^*)^{\gamma}] \quad \cdots\cdots (37)$$

$$\frac{1}{\delta}(\frac{C^*}{W_{T-1}-C^*})^{\gamma-1} = E_{T-1}[(Z^*)^{\gamma}]$$

$$C_{T-1^*} = a_{T-1} \ W_{T-1} \ (a_{T-1} \equiv [1 + (E_{T-1}[(Z^*)^{\gamma}] \ \delta)^{1/(1-\gamma)}]^{-1} \quad \cdots\cdots (38)$$

따라서 이 경우는 앞의「로그」효용함수의 경우와는 달리 최적 소비수준이 이용가능한 투자기회에 의존하게 된다. 또, (16b)式에 의해 $t = T-1$에 있어서의 최적 포트폴리오 선택 문제를 풀면 아래와 같다.

$$E_{T-1}[B_w(\cdot) \ Z_i] = R \ E_{T-1}[B_w(\cdot)]$$

$$\delta^T E_{T-1}[(W_{T-1} - C^*)^{\gamma-1}(Z^*)^{\gamma-1} Z_i] = R\delta^T E_{T-1}[(W_{T-1} - C^*)^{\gamma-1} \ (Z^*)^{\gamma-1}] \quad \cdots\cdots (39)$$

$$E_{T-1}[(Z^*)^{\gamma-1} (Z_i] = R \ E_{T-1}[(Z^*)^{\gamma-1}] \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

따라서 최적 포트폴리오 선택문제는 소비·저축문제와 독립적으로 결정되어 질 수 있다.

(38)式과 envelope condition을 사용하여 유도된 富의 效用函數를 구하면 다음과 같다.

$$J_w(W, \ T-1) = U_c(C^*, \ T-1) = \delta^{T-1}(a_{T-1} \ W)^{\gamma-1} \quad \cdots\cdots (40)$$

$$J(W, \ T-1) = \frac{\delta^{T-1} a_{T-1}^{\gamma-1} W^{\gamma}}{\gamma} + k \qquad (k : \text{적분상수})$$

적분상수 k의 값을 구하기 위하여 (15)식을 사용하여 J를 구하면 아래와 같고 이 式에서 [ ]안은 1이 되므로 $k=0$이 된다.

$$\begin{aligned} J(W, \ T-1) &= \frac{\delta^{T-1}(C^*)^{\gamma}}{\gamma} + E_{T-1}(B[(W-C^*)Z^*, \ T]) \\ &= \delta^{T-1}\frac{(aW)^{\gamma}}{\gamma} + \delta^{T}\frac{((1-a)W)^{\gamma}}{\gamma} \ E_{T-1}[(Z^*)^{\gamma} \quad \cdots\cdots (41) \\ &= \delta^{T-1}\frac{W^{\gamma}}{\gamma} a^{\gamma-1}[a + \frac{\delta(1-a)^{\gamma}}{a^{\gamma-1}} E[(Z^*)^{\gamma}]] \\ &= \frac{(\delta^{T-1} a_{T-1}^{\gamma-1})W^{\gamma}}{\gamma} \end{aligned}$$

다음으로 $t=T-2$에 있어서의 소비-투자 선택문제를 논의해 보기로 하자. 먼저 최적 소비수준 결정문제를 다루어 보면 그 조건은 $U_c = E[Z^* \ J_w]$와 같다. 이를 이 문제에 적용하면 아래와 같은 최적 소비수준이 결정되고, 따라서

$$\delta^{T-2}/C^{\gamma-1} = \delta^{T-1} \ E_{T-2}[Z^{\gamma} \ a_{\gamma-1}^{T-1}] \ (W_{T-2} - C)^{\gamma-1}$$

$$C_{T-2^*} = W_{T-2} \ [1 + (\delta \ E_{T-2} \ a_{\gamma-1}^{T-1} \ Z^{\gamma}))^{1/1-\gamma}]^{-1} \quad \cdots\cdots (42)$$

최적소비는 Z와 a_{T-1}을 통한 현재와 미래의 투자기회에 의존하게 된다. 한편 최적 포트폴리오 선택조건은 아래와 같이 쓸 수 있으며

$$\delta^{T-1} E_{T-2}[(W_{T-2} - C_{T-2})^{\gamma-1} \ (Z^*)^{\gamma-1} \ a_{\gamma-1}^{T-1} (Z_i - R)] = 0$$

$$E_{T-2}[a_{\gamma-1}^{T-1} (Z^*)^{\gamma-1} \ (Z_i - R)] = 0 \quad \cdots\cdots (43)$$

이도 역시 미래의 투자기회에 의존하게 된다. 이도 앞의 「로그」 효용함수처럼 단일기간 문제로 볼 수 있으나, 그와 다른 점은 期末 富의 효용함수가 狀態依存的이라는 것이다. 한계효용은 $a_{T-1}^{\gamma-1}$에 비례하며, $a_{T-1}^{\gamma-1}$은 (T − 1)期의 이용가능한 수익률에 의존한다.

이제 기간을 일반화시켜 t = t일때의 소비 · 투자 선택문제를 논의해 보기로 하자. 유도된 효용함수 $J(W, t+1) = \delta^{t+1} a_{t-1}^{\gamma-1} W^{\gamma}/\gamma$라 하자. (24a)式으로 부터 최적소비조건을 끄집어 내면 아래와 같다.

$$U_c = E_t[J_w(\dot{W}, t+1)\dot{Z}_t]$$

$$\delta^t C^{\gamma-1} = \delta^{t+1} (W_t - C)^{\gamma-1} E_t[(\dot{Z})^{\gamma} \ a_{t-1}^{\gamma-1}] \quad \cdots\cdots (44)$$

$$C_t^* = a_t W_t, \ a_t \equiv [1 + (\delta E_t[(Z_t^*)^{\gamma} a_{T-1}^{\gamma-1}])^{1/(1-\gamma)}]^{-1}$$

또 (24b)式으로 부터 최적 포트폴리오 조건을 끄집어 내면 아래와 같다.

$$E_t[\delta^{t+1} \ a_{t-1}^{\gamma-1} (W_t - C_t)^{\gamma-1} \ (Z_t^{*\gamma-1} \ (Z_i - R)] = 0 \quad \cdots\cdots (45)$$

$$E_t[\tilde{a}_{t+1} \ Z_t^*)^{\gamma-1} (Z_i - R)] = 0$$

이상에서 보는 바와 같이 최적 소비수준은 Z_t^*와 $\tilde{a}_{t+1}$을 통해 현재와 미래의 투자기회에 의존한다.최적 포트폴리오도 역시 미래의 투자기회에 의존하며, 효용함수는 상태의존적이다. 만약 $(\dot{Z}_t)^{\gamma}$와 $a_{t-1}^{\gamma-1}$이 서로 상관관계가 없다면, 최적 포트폴리오 조건에서 나타나는 期末 富의 效用函數가 狀態獨立的이 된다. 물론 이는 $\tilde{a}_{t+1}$과 Z_{it}가 독립적일 때 성립되게 되며, 이와같이 효용함수가 상태독립적이 되면 투자자들은 近視眼的 方式으로 투자행위를 하게 될 것이며, 이 때 그 행위는 최적의 투자 의사결정 행위가 되는 것이다. 그러나, 투자기회집합이 시간이 경과함에 따라 변하는 경우에는, 투자자들은 근시안적인 투자결정을 할 수 없고 다음 期 이후의 먼 미래까지도 고려에 넣어야 한다.

3) HARA 효용함수

부호의 단순화를 위해 $B(W, T) = \delta^T (W - \hat{C})^{\gamma}/_{\gamma}$, $U(C, t) = \delta^t \ (C - \hat{C})^{\gamma}/_{\gamma}$, $\gamma<1$이라 한자. 또 투자기회집합이 일정하다고 가정하자. 만약 투자기회집합이 일정하지 않다면, 결과가 상태의존적 효용함수에 맞도록 수정되어져야 할 것이다.

결론부터 이야기하자면 HARA효용함수를 가진 투자가들은 power효용함수를 가진 투자자들과 매우 유사한 방식으로 행동하게 되며, HARA 함수의 특성들이 유도된 間接效用函數에도 그대로 나타나게 된다는 것이다. 구체적으로 이 결론들을 도출하기 위하여 우선 $\hat{W} \equiv \hat{C} \sum_{s=t}^{T} R^{t-s}$라 정의하자. 그러면 최적 소비와 포트폴리오가 다음과 같은 富의 函數로 나타난다.

$$C_t^*(W) = \hat{C} + \frac{W-\hat{W}_t}{W} C_t^p \quad \cdots\cdots (46a)$$

$$W_{ot}^*(W) = \frac{\hat{W}_{t+1}}{(W - C_t^*)R} + \frac{\hat{W} - C_t^* - \hat{W}_{t+1}/R}{(W - C_t^*)} w_o^p \quad \cdots\cdots (46b)$$

$$w_i^*(W) = \frac{W - C_t^* - \hat{W}_{t+1}/R}{W - C_t^*} w_i^p \qquad i = 1, \cdots, n \cdots\cdots (46c)$$

여기서 C^p와 w_i^p는 동일한 指數를 가진 power 효용함수의 최적 소비-포트폴리오 선택을 의미한다. 만약 투자자들이 동일한 γ를 가지고 있다면 이들 투자자들은 동일한 비율로서 위험자산을 소유하게 될 것이다. 또, 유도된 부의 효용함수를 도출하면 다음과 같다.

$$J(W, t) = J^p(W - \hat{W}_t, t) = \frac{\delta^t f(t) (W - \hat{W}_t)^\gamma}{\gamma} \quad \cdots\cdots (47)$$

이제 이상의 사실들을 증명해 보도록 하자. 우선 최적 소비조건을 증명하기 위해 유도된 효용함수를 위 (47)式과 같이 가정하고 envelope condition $U_c = J_w$를 사용하면 아래와 같다.

$$f(t) \ (W - \hat{W}_t)^{\gamma-1} = (C^* - \hat{C})^{\gamma-1} \quad \cdots\cdots (48)$$

$$C^* = \hat{C} + [f(t)]^{1/(\gamma-1)} (W - \hat{W}_t)$$

power효용함수를 가진 투자자는 그의 富의 $[f(t)]^{1/(\gamma-1)}$ 부분만큼을 소비하므로 결국 (48)式은 (46a)式을 의미하는 것이 된다. 두번째, 최적 포트폴리오 조건을 증명해 보도록 하자. 우선 예산제약이 만족되도록 아래 등식이 성립한다는 것에 주의하자.

$$\sum_0^n w_i^* = (W - C)^{-1} \left[\frac{\hat{W}}{R} + \left(W - C - \frac{\hat{W}}{R}\right) \sum w_i^p\right] = 1 \quad \cdots\cdots (49)$$

또 (46a), (46b)式으로 부터 다음이 성립함도 알 수 있다.

$$Z^* = \sum w_{it}^* Z_i = (W - C)^{-1}\left[\hat{W}_{t+1} + \left(W - C - \frac{\hat{W}_{t+1}}{R}\right) \sum w_i^p Z_i\right] \quad \cdots\cdots (50)$$

$$(W_t - C_t) Z^* - \hat{W}_{t+1} = \left(W_t - C_t - \frac{W_{t+1}}{R}\right) Z^p = (W_t - C_t + \hat{C} - \hat{W}_t) Z^p \quad \cdots\cdots (51)$$

(51)式을 (24b)式에 대입하면 다음과 같다.

$$\delta^t f(t) E_t[((W - C) Z^* - \hat{W}_{t+1})^{\gamma-1} (Z_i - R)] = \delta^t f(t) (W_t - C_t + \hat{C} - \hat{C}_t)^{\gamma-1}) E_t[(Z^p)^{\gamma-1} (Z_i - R)]$$

$$\cdots\cdots (52)$$

포트폴리오 Z_p가 power 효용함수의 경우 최적 포트폴리오를 의미하므로 (52)式은 0가 되며, 이는 포트폴리오 Z^*가 (24b)式을 만족시킨다는 뜻이다. 따라서 (46a), (46b) 두 式은 HARA함수의 경우의 최적

포트폴리오 조건이 되는 것이다. 마지막으로 유도된 부의 효용함수가 (47)式과 같이 나타나는 것을 증명해 보자. (23), (48), (51)式을 이용하면,

$$J(W, t) = U(C^*, t) + E_t[J(\tilde{W}, t+1)]$$

$$= \frac{\delta^t (C^* - \hat{C})^\gamma}{\gamma} = \delta^{t+1} f(t+1) E_t \frac{(\tilde{W}_{t+1} - \hat{W}_{t+1})\gamma}{\gamma}$$

$$+ \quad \delta^t [f(t)]^{\gamma-1} \frac{(W - W\pm_t)^\gamma}{\gamma} + \delta^{t+1} f(t+1) E_t \frac{(W - \hat{W}_t)^\gamma}{\gamma (\tilde{Z}^p)^\gamma} \cdots\cdots\cdots\cdots (53)$$

$$\equiv \frac{\delta^t f(t) \, (W - \hat{W}_t)^\gamma}{\gamma}$$

여기서 $f(t) = [f(t)]^{\gamma/(\gamma-1)} + \delta f(t+1) \; E[(\tilde{Z}^p)^\gamma]$의 解이다.

이제, 좀 더 가정을 완화시켜 보자. 만약 투자기회집합이 확정적으로(deterministically) 변화한다면, 이론 전개상 다소 변화는 있겠지만 그 결론은 실질적으로 앞의 경우와 다름이 없게 된다. 또 만약 투자기회집합이 확률적으로 (stochastically) 변화하고 이자율이 일정한다면, $\hat{W}_t = \hat{C} \sum_{s=t}^{T} R^{t-s}$로 前述한 바와 동일하고 최적 소비와 포트폴리오 선택을 나타내는 (46)式도 여전히 성립하게 된다. 그러나 유도된 부의 효용함수는 더 이상 (47)式과 같은 형태를 유지할 수 없을 것이다. 나아가 이자율마저 확률적으로 변화한다면, 유도된 부의 효용함수는 HARA型 마저도 가지지 못하게 될 것이다.

V. 結　　言

이상에서 살펴 본 바와 같이 多期間 模型에서의 소비 및 포트폴리오 선택이론은 동적계획법의 후방접근법에 의해 이루어진다. 그러나, 이것은 단순한 문제해결의 방법일 뿐 실제 解가 구체적 의미를 갖기에는 아직 부족한 해법이다. 즉, 다기간 소비・투자문제가 단일기간 소비・투자문제의 해법을 그대로 원용할 수 있다면 매우 다행스러운 일이나, 그러기 위해서는 많은 제약조건이 필요한 것이다. 우선 동적계획법에서 나타나게 되는 간접 효용함수(유도된 부의 효용함수)가 원래의 효용함수와 동일한 형태여야 하며, 또 기간이 변함에 따라 나타나게 되는 소비자의 기호나 재화의 가격의 변화로 인한 효용함수의 변화도 고려에 넣어야 한다. 만약 이러한 변화가 없다고 가정한다면 우리는 상태독립적인 효용함수를 가정할 수 있고 이에 따라 비교적 의미있는 해의 도출이 가능하다. 특히 等彈力的 효용함수를 가정할 경우 완전한 단일기간 의사결정이 곧바로 다기간 의사결정의 최적해가 될 수 있는 것이다. 이 경우 다기간 모형은 복잡성은 모두 제거되어 질 수 있다.

参 考 文 獻

1. Jonathan E. Ingersoll, Jr., Theory of Financial Decision Making, Rowman & Littlefield, 1987.
2. Jack C. Francis and Stephen H. Archer, Portfolio Analysis, 2nd ed., Prentice-Hall Inc., 1979.
3. Eugene F. Fama and Merton H. Miller, The Theory of Finance, Dryden Press, 1972.
4. Eugene F. Fama, "Multi-period Consumption-Investment Decisions", *American Economic Review*, 1970, pp. 163~174.
5. Nils H. Hakansson, "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a class of Utility Function", *Econometrica*, 1970, pp 587~607.
6. Paul A. Samuelson, "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", *Review of Economics and Statistics*, 1969, pp 239~246.