〈硏究論文〉

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 14, No. 1, June 1988

선형계획을 이용한 행렬게임의 감도분석

(Sensitivity Analysis of Matrix Game by using Linear Programming)

성 기 석*
박 순 달*

요 약 문

이 논문은 선형계획의 감도분석을 이용한 행렬게임의 감도분석을 연구하였다. 행렬게임과 선형계획과의 관계는 이미 잘 알려져 있고, 행렬게임 및 선형계획에서의 감도분석도 이미 연구되었다. 이 논문에서는 행렬게임을 선형계획 법식으로 변형시킨 후, 이 선형계획식에서 감도분석을 함으로써 원래의 행렬게임에서의 감도분석을 수행할 수 있다는 것을 보였다.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the sensitivity analysis of matrix game by means of linear programming. The relations beween matrix game and linear programming is well known. In this paper we first transform matrix game into linear programming. The sensitivity analysis of matrix game is performed by that of linear programming.

1. 서 론

행렬게임은 그 특성이나 해법은 이미 많이 연구되어 있고 선형계획과의 관계도 연구되어 있다. 또한 선형계획에서의 감도분석에 관한 연구와 함께 행렬게임에서의 감도분석에 대한 연구도 되어 있다[3]. 본 논문에서는 바로 이 행렬게임에서의 감도분석을 선형계획에서의 감도분석을 이용하여 수행해보고자 한다.

행렬게임에서의 감도분석은 최적전략의 값을 유지하는 감도분석과 최적전략의 구조를 유지하는 감도분석을 구별하고 있다. 전자를 제 1 종 감도분석이라고 하고 후자를 제 2 종 감도분석이라고 한다.

이 논문은 2절에서 선형계획과 행렬게임의 관계에 관한 이론을 알아본 후 3절에서 제2종 감도분석을 비교하고, 4절에서 제1종 감도분석을 비교하였다. 그리고 5절에서 그 결과를 요약하였다.

* 서울대학교 공과대학 산업공학과

2. 선형계획과 행렬게임

행렬게임의 해는 선형계획법을 이용하여 구할 수 있다[2, pp 105-111]. 즉 참가자 1과 2의 혼합전략 X, Y는 각각 다음의 선형계획식

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad U \\ &\text{s.t.}\ A^T X \geq U\,\mathbf{e}_n \\ &\quad \mathbf{e}_m^T X = 1 \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad U' \\ &\text{s.t.}\ A\,Y \leq U'\mathbf{e}_m \\ &\quad \mathbf{e}_n^T Y = 1 \\ &\quad Y \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

단 $\mathbf{e}_s = (1, 1, \cdots\cdots, 1)^T$: s차원 단위벡타이다.

의 최적해 X^*, Y^*와 같다. 한편 이러한 두 선형계획식을 이득행렬 A가 모두 양의 행렬계수를 가진다는 가정아래 다음과 같이 바꾸어서 최적혼합전략 X, Y를 구할수도 있다. 즉, 다음의 두 선형계획식

$$\begin{aligned} &\text{Min}\ 1/\nu = \mathbf{e}_m^T X \\ &\text{s.t.} \quad A^T X \geq \mathbf{e}_n \\ &\qquad X \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\text{Max}\ 1/\nu = \mathbf{e}_n^T Y \\ &\text{s.t.} \quad A\,Y \leq \mathbf{e}_m \\ &\qquad Y \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

의 최적해 X^*, Y^*를 구하여,

$$X = \nu\ X^* \tag{5}$$

$$Y = \nu\ Y^* \tag{6}$$

와 같이 구할 수 있다. 그런데 위의 두 선형계획식은 서로 쌍대관계에 있으므로, 다음의 선형계획식(7) 하나만을 풀어서 최적해 Y^*와 그 쌍대해 X^*를 구하여 식(5)~(6)과 같이 최적혼합전략을 구할 수도 있다. 즉,

$$\begin{aligned} &\text{Mix}\ 1/\nu = \mathbf{e}_n^T Y + 0_m^T S \\ &\text{s.t.} \quad AY + IS = \mathbf{e}_m \\ &\qquad Y, S \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

이것의 이득행렬 A가 $r \times r$행렬 M, $r \times (n-r)$ 행렬 R, $(m-r) \times r$ 행렬 F, $(m-r) \times (n-r)$ 행렬 G로 분리 되어,

$$A = \left[\begin{array}{c|c} M & R \\ \hline F & G \end{array}\right] \tag{8}$$

과 같이 나타내어지고, 이것이 최적기저 행렬인 $m \times m$ 행렬B가

$$B = \left[\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline F & I \end{array}\right] \tag{9}$$

이라하자. 그러면 그에 대응하는 목적함수 계수 C_b는

$$C_b = [\mathbf{e}^T,\ 0_{m-r}^T] \tag{10}$$

단, 이후부터 $\mathbf{e} = \mathbf{e}_r$, 즉 r차원 단위벡터라 하자.

이고, 비기저행렬인 $m \times n$ 행렬N은

$$N = \left[\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline O & G \end{array}\right]$$

이다. 그러면 최적기저행렬 B의 역행렬 B^{-1}는, M의 역행렬을 H라 할때 다음과 같이 나타내어 진다.

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} H & O \\ \hline -FH & I \end{array}\right] \tag{11}$$

그러면, 식(7)의 최적해는

$$\begin{aligned} &[Y_b \mid S_b]^T = B^{-1}\mathbf{e}_m \\ &= \left[\begin{array}{c|c} H & O \\ \hline -FH & I \end{array}\right]\mathbf{e}_m = [H\mathbf{e} \mid -FH\mathbf{e} + \mathbf{e}_{m-r}]^T \end{aligned} \tag{12}$$

이고, 할인가는

$$C=C_bB^{-1}[A \mid I]-[\mathbf{e}_n^T \mid 0_m^T]$$
$$=[C_bB^{-1}A-\mathbf{e}_n^T \mid C_bB^{-1}]$$
$$=[[0_r^T \mid \mathbf{e}^THR-\mathbf{e}_{n-r}] \mid [\mathbf{e}^TH \mid 0_{m-r}^T]] \tag{13}$$

이므로, 쌍대해는

$$X=[\mathbf{e}^TH \mid 0_{m-r}^T] \tag{14}$$

이다. 따라서 참가자 1과 2의 최적혼합전략 X, Y는 그 기저전략들의 값 $\overline{X}$, $\overline{Y}$를 다음과 같이 구할 수 있다. 즉,

$$Y_b=H\mathbf{e}$$

$$\overline{Y}=\frac{Y_b}{\mathbf{e}^TY_b}=\frac{H\mathbf{e}}{\mathbf{e}^TH\mathbf{e}} \tag{15}$$

$$X^T=[\mathbf{e}^TH \mid 0_{m-r}^T]$$
$$X_b^T=\mathbf{e}^TH$$

$$\overline{X}^T=\frac{X_b^T}{X_b^T\mathbf{e}}=\frac{\mathbf{e}^TH}{\mathbf{e}^TH\mathbf{e}} \tag{16}$$

이때 게임의 값은

$$\nu=\frac{1}{\mathbf{e}_n^T Y}=\frac{1}{\mathbf{e}^T H\mathbf{e}} \tag{17}$$

이다.

여기서 위의 식(15) (17)이 Shapley와 Snow에 의한 게임의 기저해(X, Y)에 관한 식과 동일함을 알 수 있다[12]. 그리고 참가자 1과 2의 기저전략의 집합 I1, J1 비기저전략의 집합 I2, J2를 각각

I1 = {i | x_i는 $\overline{X}$의 한요소}
J1 = {j | y_j는 $\overline{Y}$의 한요소}
I2 = I / I1
J2 = J / J1

라고 하면, 식(8)의 이득행렬 A에서 M, R, F, G는 각각

$M=(a_{ij})$ $i\in I1, j\in J1$
$R=(a_{ij})$ $i\in I1, j\in J2$
$F=(a_{ij})$ $i\in I2, j\in J1$
$G=(a_{ij})$ $i\in I2, j\in J2$

와 같이 됨을 알수 있다. 즉, M은 참가자 1과 2의 모두의 기저전략에 속하는 요소들로 이루어진 부분행렬이고 R은 참가자 1의 기저전략, 참가자 2의 비기저전략에 속하는 요소들로 이루어진 부분행렬, F는 참가자 1의 비기저전략, 참가자 2의 기저전략에 속하는 요소들로 이루어진 부분행렬, 그리고 G는 참가자 1과 2의 모두의 비기저전략에 속하는 요소들로 이루어진 부분행렬이다.

그리고 A의 행 $a_{i.}$ 중 M을 이루는 열에 대응되는 요소들만으로 이루어진 행을 $\overline{a}_{i.}$, A의 열 $a_{.j}$ 중 M을 이루는 행에 대응되는 요소들 만으로 이루어진 열을 $\overline{a}_{.j}$라고 하자.

한편 식(7)의 최적기저해가 유지되려면 원가능성과 쌍대가능성을 유지하여야 하므로, 식(12)로 부터

$$H\mathbf{e} \geq 0 \tag{18}$$
$$-FH\mathbf{e}+\mathbf{e}_{m-r} \geq 0 \tag{19}$$

이어야 하며, 또 식(13)으로부터

$$\mathbf{e}^THR-\mathbf{e}_{n-r} \geq 0 \tag{20}$$
$$\mathbf{e}^TH \geq 0 \tag{21}$$

이어야 한다.

3. 제 2 종 감도분석

행렬계수 A의 한 요소 a_{pq}가 $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다고 하고 선형계획식 식(7)의 최적기저해가 유지되는 α의 변화 범위를 구해보자.

가. a_{pq}가 R의 한 요소일 때,

이 경우는 $p\in I1, q\in J2$인 경우이다. 식(18)~(21)중 식(18), (19), (21)은 그대로 유지된다. 식

(20)에서 보면,

$\mathbf{e}^T HR' - \mathbf{e}_{n-r} \geq 0$ 이어야 한다. 그런데,

$R' = [\bar{a}_{.r+1} \bar{a}_{.r+2} \cdots \bar{a}'_{.q} \cdots \bar{a}_{.n}]$

이므로,

$\mathbf{e}^T H \bar{a}_{.q}' - 1 \geq 0$ 즉,

$$\mathbf{e}^T H a_{.q} + \alpha (\mathbf{e}^T H)_p - 1 \geq 0 \tag{22}$$

을 만족하면 된다. 그런데 식(15)~(17)으로 부터

$$\nu \mathbf{e}^T H = \overline{X}^T \tag{23}$$

$$\nu H \mathbf{e} = \overline{Y} \tag{24}$$

이다. 또 여기서

$$\bar{a}_q^T \overline{X} = l_q \tag{25}$$

$$\bar{a}_{p.} \overline{Y} = k_p \tag{26}$$

라고 놓으면 식(22)에서

$l_q + \alpha x_p - \nu \geq 0$

이어야 한다. 따라서 α의 범위는

$$\alpha > \frac{\nu - l_q}{x_p} \tag{27}$$

나. a_{pq}가 F의 한 요소일 때.

이 경우는 $p \in I2, q \in J1$인 경우이다. 식(18)~(21)중 식 (18), (19), (21)은 그대로 유지된다. 식(19)에서 보면,

$-F'H \mathbf{e} + \mathbf{e}_{m-r} \geq 0$ 이어야 한다. 그런데,

$F' = [\bar{a}_{r+1.}^T \bar{a}_{r+2.}^T \cdots \bar{a}'^T_{p.} \cdots \bar{a}_m^T]^T$

이므로,

$-\bar{a}_{p.}' H \mathbf{e} - 1 \geq 0$ 즉,

$$-\bar{a}_{p.} H \mathbf{e} - \alpha (H \mathbf{e})_q + 1 \geq 0 \tag{28}$$

을 만족하면 된다. 마찬가지로 식(23)~(26)을 식(28)에 대입하여 정리하면

$k_p + \alpha y_q - \nu \leq 0$

이어야 한다. 따라서 α의 범위는

$$\alpha \leq \frac{\nu - k_p}{y_q} \tag{29}$$

다. a_{pq}가 G의 한 요소일 때.

이 경우는 $p \in I1, q \in J2$인 경우이다. 그런데 G가 어떻게 변하드라도 식(18)~(19)는 모두 그대로 유지된다. 즉, G의 한 요소인 a_{pq}가 어떻게 변하더라도 선형계획식(7)의 최적기저해에 아무런 영향을 주지 못한다.

따라서 α의 범위는

$$-\infty \leq \alpha \leq \infty \tag{30}$$

이다.

라. a_{pq}가 M의 한 요소일 때.

이 경우는 $p \in I1, q \in J1$인 경우이다. 이 경우에는 식(18)~(21) 모두에 대해서 고려해 보아야 한다. 우선 M의 역행렬은 다음과 같이 변한다.

$M' = M + \alpha \mathbf{e}_{pq}$

$H' = H - \Phi$

단 $\Phi = \dfrac{\alpha}{1 + \alpha h_{qp}} h_{.p} h_{q.}$ 이고, 이때

$$1 + \alpha h_{qp} > 0 \tag{31}$$

이어야 한다.

$H = (h_{ij})$. 즉, h_{ij}는 H의 요소이다.

먼저 식(21)로 부터

$\mathbf{e}^T H' \geq 0$

$\mathbf{e}^T (H - \Phi) \geq 0$이면 된다. 즉, $\mathbf{e}^T H \geq \mathbf{e}^T \Phi$

따라서,

$$\underset{i \in I1, c_i < 0}{\mathrm{Max}} \left[\frac{x_i}{c_i} \right] \leq \alpha \leq \underset{i \in I1, c_i > 0}{\mathrm{Min}} \left[\frac{x_i}{c_i} \right] \tag{32}$$

단 $c_i = x_p h_{qi} - x_i h_{qp}$

식 (18)로 부터

$H' \mathbf{e} \geq 0$

$(H - \Phi) \mathbf{e} \geq 0$이면 된다. 즉, $H \mathbf{e} \geq \Phi \mathbf{e}$

따라서,

$$\underset{j \in J1, c_j < 0}{\mathrm{Max}} \left[\frac{y_j}{c_j} \right] \leq \alpha \leq \underset{j \in J1, c_j > 0}{\mathrm{Min}} \left[\frac{y_j}{c_j} \right] \tag{33}$$

단 $c_j = y_q h_{jp} - y_j h_{qp}$

또한 식 (19)로 부터

$-FH'\mathbf{e}+\mathbf{e}_{m-r} \geq 0$

$\bar{a}_{i.}H'\mathbf{e} \leqq 1$

$\bar{a}_{i.}(H-\Phi)\mathbf{e} \leqq 1$ 이것을 정리하면,

$\alpha\{y_q(\bar{a}_{i.}\ h_{.p})-(\bar{a}_{i.}\bar{Y}-\nu)h_{pq}\} \geq \bar{a}_{i.}\bar{Y}-\nu$

$\forall i \in I2$

따라서,

$$\underset{i\in I2,\, d_i>0}{\mathrm{Max}}\left[\frac{k_i-\nu}{d_i}\right] \leqq \alpha \leqq \underset{i\in I2,\, d_i<0}{\mathrm{Min}}\left[\frac{k_i-\nu}{d_i}\right]$$

단 $d_i = y_q\,(\bar{a}_{i.}h_{.p}) - (k_i - \nu)h_{pq}$ (34)

식 (20)으로 부터

$\mathbf{e}H'R-\mathbf{e}_{n-r} \geq 0$

$\bar{a}_{.j}\mathbf{e}^T H' \geq 1$

$\bar{a}_{.i}\mathbf{e}^T(H-\Phi) \geq 1$ 이것을 정리하면,

$\alpha\{x_p(h_{q.}\bar{a}_{.j})-(\bar{X}\bar{a}_{.j}-\nu)h_{pq}\} \geq \bar{X}\bar{a}_{.j}-\nu$

$\forall j \in J2$

따라서,

$$\underset{j\in J2,\, d_j<0}{\mathrm{Max}}\left[\frac{l_j-\nu}{d_j}\right] \leq \alpha \leq \underset{j\in J2,\, d_j>0}{\mathrm{Min}}\left[\frac{l_j-\nu}{d_j}\right]$$

단, $d_j = x_p(h_{q.}\bar{a}_{.j}) - (l_j - \nu)\ h_{pq}$ (35)

이상과 같이 선형계획식(7)의 최적기저를 유지하는 행렬계수 a_{pq}의 변화 범위 즉, 선형계획식(7)의 감도분석 범위는 a_{pq}의 각 경우에 대해 식(27),(29),(30), 및 식 (31)~(35)의 공통범위와 같이 나타난다.

그런데 이러한 감도분석 범위는 행렬 게임에서의 제2종 감도분석의 경우와 비교하여 보면 그것과 일치함을 알 수 있다. 즉 행렬게임에서 어떠한 게임의 기저해 (X, Y)에 대한 감도분석 범위는 그 게임을 선형계획식 (7)과 같이 바꾸어서 그 게임의 기저해에 대응되는 선형계획식의 기저해에 대해 감도분석한 범위와 일치한다.

4. 제1종 감도분석

한편 선형계획식 (7)의 최적해의 값이 유지되는 α의 범위는 어떻게 되겠는가. 즉, 최적해의 기저가 유지되는 범위가 아니라 값이 유지되는 범위를 구해보고자 한다. 이 범위는 앞의 식 (18)~(21)를 만족해야 할 뿐만 아니라 식 (12)에 나타난 최적해 $Y_b=H\mathbf{e}_r$의 값이 변하지 않아야 한다.

그러면 여기서 A의 한 계수 a_{pq}가 $a'_{pq}=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다고 하고 선형계획식 식 (7)의 최적해의 값이 유지되는 α의 변화 범위를 구해보자.

가. a_{pq}가 R의 한 요소일 때.

이 경우는 x_p가 쌍대최적해의 기저이고, y_q가 원최적해의 비기저인 경우이다. 따라서, $x_p>0$, $y_q=0$인 경우라 할 수 있다. 이 경우 a_{pq}가 M에 속하지 않으므로 최적해의 값 Y_b는 그대로 유지된다. 또한 식 (18)~(21)중 식(18),(19),(21)는 그대로 만족되고, 식 (20)에 대해서만 보면 된다. 이것은 앞의 최적기저해가 유지되는 범위에서 가.의 경우와 동일하다. 즉,

$$\alpha \geq \frac{\nu-l_q}{x_p} \tag{36}$$

나. a_{pq}가 F의 한 요소일 때.

이 경우는 x_p가 쌍대최적해의 비기저이고, y_q가 원최적해의 기저인 경우이다. 따라서 $x_p=0$, $y_q>0$인 경우라 할 수 있다. 이 경우에도 a_{pq}가 M에 속하지 않으므로 최적해의 값 Y_b는 그대로 유지된다. 또한 식 (18)~(21)중 식 (18),(20),(21)는 그대로 만족되고, 식 (19)에 대해서만 보면 된다. 이것은 앞의 최적기저해가 유지되는 범위에서 나.의 경우와 동일하다. 즉,

$$\alpha \leqq \frac{\nu-k_p}{y_q} \tag{37}$$

다. a_{pq}가 G의 한 요소일 때.

이 경우는 x_p가 쌍대최적해의 비기저이고, y_q도 원최적해의 비기저인 경우이다. 따라서 $x_p=0$, $y_q=0$인 경우라 할 수 있다. 이 경우에도 a_{pq}가 M에 속하지 않으므로 최적해의 값 Y_b는 그대로 유지된다. 또한 M이 어떻게 변하드라도 식 (18)~(21)는 모두 그대로 만족된다. 이것은 앞의 최적기저해가 유지되는 범위에서 다.의 경우와 동일하다. 즉,

$$-\infty \leq \alpha \leq \infty \tag{38}$$

이다.

라. a_{pq}가 M의 한 요소일 때.

이 경우는 x_p가 쌍대최적해의 기저이고, y_q도 원최적해의 기저인 경우이다.

따라서, $x_p > 0$, $y_q > 0$인 경우라 할 수 있다. 이 경우에는 a_{pq}가 M의 한 요소이므로 α가 변화하면 최적해의 값 $Y_b=He_r$도 항상 변화한다. 따라서 현재의 최적해 Y_b의 값을 유지시키려면

$$\alpha=0 \tag{39}$$

이어야 한다.

이상과 같이 선형계획식 (7)의 최적해의 값을 유지하는 행렬계수 a_{pq}의 변화 범위를 구한 결과, 식 (36)~(39)와 같이 나타난다. 그런데 이들 범위를 행렬게임에서의 제1종 감도분석과 비교하여 보면 그것과 일치함을 알 수 있다.

즉 행렬게임에서 어떠한 최적전략의 값을 유지하는 감도분석 범위는 그 게임을 선형계획식 (7)과 같이 바꾸어서 그 게임의 최적해에 대응되는 선형계획식의 최적해에 대해 그 값을 유지하는 범위와 일치한다.

5. 결 론

본 논문에서 선형계획의 감도분석을 현재의 최적 기저해의 값을 유지하는 변화범위와 현재의 최적 기저해의 기저를 유지하는 변화범위의 두 가지로 구분하여, 전자를 제1종 감도분석, 후자를 제2종 감도분석이라 하였다.

본 논문 결과에 의하면, 행렬게임을 선형계획의 형태로 바꾸어서 그것에서의 제1종 및 제2종 감도분석한 범위는 원래의 행렬게임에서 행한 제1종 및 제2종 감도분석의 범위와 일치한다.

Reference

1. 박순달. 게임이론(1982) 대영사.
2. 박순달. 선형계획법(1984) 대영사.
3. 박순달, 성기석. "행렬게임에서의 감도분석" 한국경영과학회지.(발간예정)
4. Bohnenblust H.F., S.Karlin, L.S.Shapley "Solution of Discrete Two Person Games" Annals of Mathematics study No.24.
5. Dresher M. Games of Strategy (1961) Prentice-Hall pp. 36–49
6. Kaplansky I. "A Contribution to Von Neumann's Theory of Games" Annals of Mathematics Vol.46, No.3. July 1945.
7. Gal T. Postoptimal Analysis. parametric Programming & Related Topics (1979) McGraw-Hill

8. Gale D., S. Sherman "Solution of Finite Two Persion Games" Annals of Mathematics Study No.24.
9. Jones A.J. Game Theory (1980) Ellis Howood.
10. Morgenstern O., Von Neumann Theory of Games and Economic Behavior 3rd ed (1953) Princeton University Press. Princeton.
11. Murty K. Linear and Combinatorial programming (1976) John Wiley & Sons.
12. Shapley L., Snow R. "Basic Solutions of Discrete Games" Annals of Mathematics Study No.24.
13. Wald A. "Genralization of a Theorem by Von Neumann Concerning Zero Sum Two Person Games" Annals of Mathematics Vol.46. No.2. April 1945.
14. Weyl H. "Elementary Proof of a Minimax Theorem Due to Von Neumann" Annals of Mathematics Study No.24.