

# 유한요소법을 이용한 螺旋形 곡선부재의 정적해석에 관한 연구

## A Study on the Static Analysis of the Helically Curved Members using Finite Element

任 性 淳\*  
Yhim, Sung Soon  
張 丞 弼\*\*  
Chang, Sung Pil

### Abstract

The curved structures in space, such as multi-level interchanges, ramped structures, and circular curved structures can be modelled as helically curved members with constant helix angle.

This paper presents a finite element approach for the analysis of the static and the free vibration characteristics of the helically curved members by using the 7th order Hermite interpolation functions.

This method is used to find more accurate solution of the static and dynamic responses of them than those of the previous studies.

### 요 지

인터체인지나 램프시설과 같은 구조물은 일정한 나선기울기를 갖는 나선형 곡선부재로 이상화시킬 수 있다.

이러한 나선형 곡선부재의 정적 및 자유진동 해석을 하기 위해 7차 hermite 형상함수를 이용한 유한요소 모델을 제시하였다.

다른 유한요소를 이용한 기존연구결과와 비교하여 나선형 유한요소는 적은수의 유한 요소로서, 보다 더 정확한 결과를 보였으며 직선 부재, 원형곡선 부재등에도 적용할 수 있음을 보였다.

### 1. 서 론

인터체인지나 램프시설과 같은 구조물은 곡선부재로 구성된 대표적인 구조물들이며 이러한 구조물들은 일정한 나선기울기를 갖는 나선형곡

선부재로 이상화시킬 수 있다.

본 논문에서는 곡선부재로 구성된 구조물의 해석을 위해 나선형 곡선부재요소를 이용한 유한요소법을 정립하였다. 특히, 나선형 곡선부재는 아아치나 셸 요소의 복합된(coupled) 면내 거동과 뒹(warping)이 고려된 薄壁 곡선부재 요

\* 正會員 · 檀國大學校 工科學 講師

\*\* 正會員 · 서울大學校 工科學 教授

소의 변위거동을 하는 部材로 가정하여 이러한 특성을 조합(coupled)시켜야 한다.

그러므로 본 논문에서는 나선형 곡선부재들로 구성된 구조물의 정확한 해석을 위해 7차 hermite 다항식을 사용한 나선형 유한 요소법을 정립하였다.

몇개의 예제를 통해 이러한 7차 변위 형상함수의 사용이 적절하며 타당한 가를 검증하였다.

## 2. 나선형 곡선부재의 기본이론

본 논문에서는 곡선형 구조물을 그림 2.1 과 같은 나선형 곡선부재로 이상화 하였고 그림 2.2 와 같은 미소요소에 대해, 한 절점의 자유도는 축방향(tangential direction), 2축수직방향(binormal direction) 및 반경방향(normal direction)의 변위  $w, v, u$  와 축방향 회전각변위  $\phi$  로 구성 되어 있다.

본 논문에서 사용하고 있는 나선의 기하학적 기본특성인 곡률  $k$  와 torsion  $\tau$  는 다음과 같이 표현된다.

$$k = \cos^2 \alpha / a \quad (2.1)$$

$$\tau = -\sin \alpha \cos \alpha / a \quad (2.2)$$

여기서  $a$  는 그림 2.1 에서 알 수 있듯이 나선

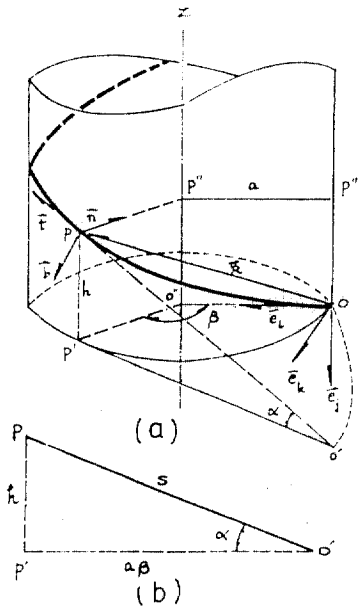


그림 2.1 Configuration of Helically Curved Member

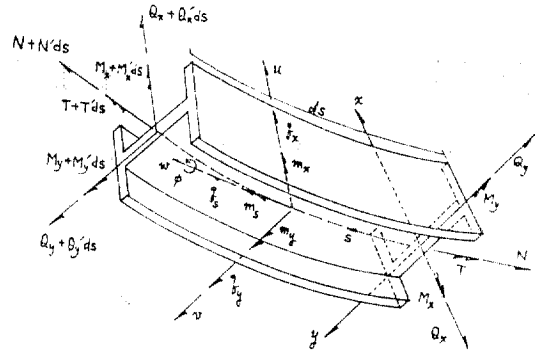


그림 2.2 Stress Resultants and Uniform Loads of Differential Element

반경이며  $\alpha$  는 나선기울기이며 이들은 나선중심 각  $\beta$ , 부재축방향거리  $s$  와 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$\beta = s \cdot \cos \alpha / a \quad (2.3)$$

## 3. 유한 요소법

### 3.1 변위 형상 함수

나선형 곡선부재 요소내의 임의의 점에 대한 각 변위는 요소 절점변위와 절점변위의 1, 2, 3차 도함수로 표현된다.

$$\left. \begin{aligned} w &= s_1 w_1 + s_2 w_1' + s_3 w_1'' + s_4 w_1''' \\ &\quad + s_5 w_2 + s_6 w_2' + s_7 w_2'' + s_8 w_2''' \\ u &= s_1 u_1 + s_2 u_1' + s_3 u_1'' + s_4 u_1''' \\ &\quad + s_5 u_2 + s_6 u_2' + s_7 u_2'' + s_8 u_2''' \\ v &= s_1 v_1 + s_2 v_1' + s_3 v_1'' + s_4 v_1''' \\ &\quad + s_5 v_2 + s_6 v_2' + s_7 v_2'' + s_8 v_2''' \\ \phi &= s_1 \phi_1 + s_2 \phi_1' + s_3 \phi_1'' + s_4 \phi_1''' \\ &\quad + s_5 \phi_2 + s_6 \phi_2' + s_7 \phi_2'' + s_8 \phi_2''' \end{aligned} \right\} (3.1)$$

여기서, 변위 형상함수  $s_i$  는 다음과 같은 hermite 다항식을 이용하였고  $x = s/L$  이며  $L$  은 나선형 곡선부재 요소의 길이를 의미한다.

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 1 - 35x^4 + 84x^5 - 70x^6 + 20x^7 \\ s_2 &= L(x - 20x^4 + 45x^5 - 36x^6 + 10x^7) \\ s_3 &= \frac{L^2}{2}(x^2 - 10x^4 + 20x^5 - 15x^6 + 4x^7) \\ s_4 &= \frac{L^3}{6}(x^3 - 4x^4 + 6x^5 - 4x^6 + x^7) \\ s_5 &= 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7 \\ s_6 &= L(-15x^4 + 39x^5 - 34x^6 + 10x^7) \end{aligned} \right\} (3.2)$$

$$s_7 = \frac{L^2}{2}(5x^4 - 14x^5 + 13x^6 - 4x^7)$$

$$s_8 = \frac{L^3}{6}(-x^4 + 3x^5 - 3x^6 + x^7)$$

나선형 곡선부재 요소내의 임의의 점에 대한 변위벡타

$$\{d\} = \{w, u, v, \phi\} \quad (3.3)$$

를 절점변위벡타  $\{d\}_e$ 와 변위 형상함수로 구성된 매트릭스  $[N]$ 으로 표시하면 다음과 같다.

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} w \\ u \\ v \\ \phi \end{Bmatrix} = [[N_1][N_2]] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}_e = [N]\{d\}_e \quad (3.4)$$

여기서  $[N]$  매트릭스는  $4 \times 32$ 의 변위형상함수 매트릭스이며 이 매트릭스는 다음과 같은  $4 \times 16$ 의  $[N_1], [N_2]$  매트릭스로 구성되어 있다.

$$[N_1] = \begin{bmatrix} s_1 s_2 s_3 s_4 & & & 0 \\ & s_1 s_2 s_3 s_4 & & \\ & & s_1 s_2 s_3 s_4 & \\ 0 & & & s_1 s_2 s_3 s_4 \end{bmatrix} \quad (3.5. a)$$

$$[N_2] = \begin{bmatrix} s_5 s_6 s_7 s_8 & & & 0 \\ & s_5 s_6 s_7 s_8 & & \\ & & s_5 s_6 s_7 s_8 & \\ 0 & & & s_5 s_6 s_7 s_8 \end{bmatrix} \quad (3.5. b)$$

### 3.2 변형도 및 절점변위와의 관계

그림 2.2에서와 같이 축력,  $x, y$  축에 대한 휨 모멘트, st. venant 비틀림모멘트 그리고 바이모멘트의 영향을 고려하여 외적일 즉, 포텐셜에너지를 구하기 위해 다음과 같이 변형도벡터를 구성하였다.

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_c k_y k_x \Omega - \Omega' k_y k_x - \Omega''\} \quad (3.6)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_c \\ k_y \\ k_x \\ \Omega \\ -\Omega' \\ k_y' \\ k_x'' \\ -\Omega'' \end{array} \right\}$	1	$-k$								$\left\{ \begin{array}{l} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \\ u \\ u' \\ u'' \\ u''' \\ v \\ v' \\ v'' \\ v''' \\ \phi \\ \phi' \\ \phi'' \\ \phi''' \end{array} \right\}$	(3.7)
	$k$	$-\tau^2$	1	$-2\tau$							
	$-k\tau$		$-2\tau$	$\tau^2$	$-1$	$k$					
		$k\tau$		$k$		1					
			$-k\tau$		$-k$	$-1$					
	$k_y'$	$k$	$-\tau^2$	1	$-2\tau$						
	$k_x''$	$-k\tau$		$-2\tau$	$\tau^2$	$-1$	$k$				
	$-\Omega''$		$-k\tau$		$-k$	$-1$			$-1$		

여기서, 변형도 벡타  $\{\epsilon\}$ 는 나선의 기하학적 특성치인 곡률  $k$ , torsion  $\tau$ 와 요소내변위, 그도함수들과 다음과 같은 관계식이 성립된다<sup>(3,4)</sup>.

식 (3.5)를 이용하여 요소내의 변위와 도함수로 구성된 벡타는 절점변위벡타와 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$[N_{11}]$		$[N_{22}]$			
	$[N_{11}]$		$[N_{22}]$		
		$[N_{11}]$		$[N_{22}]$	
			$[N_{11}]$		$[N_{22}]$

(d), (3.8)

여기서,  $[N_{11}], [N_{22}]$  매트릭스는 다음과 같이 표시되는 매트릭스이다.

$$[N_{11}] = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1' & s_2' & s_3' & s_4' \\ s_1'' & s_2'' & s_3'' & s_4'' \\ s_1''' & s_2''' & s_3''' & s_4''' \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{EI_y}{2} \int_0^L (u'' - \tau^2 u - 2\tau v' + kw')^2 ds \\
 & + \frac{EI_\alpha}{2} \int_0^L (k\tau u' + kv'' + \phi')^2 ds \\
 & + \frac{GK_t}{2} \int_0^L (k\tau u + kv' + \phi')^2 ds \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{1}{2} \{d\}^T [C]^T [K_A] [C] \{d\}_e \\
 & + \frac{1}{2} \{d\}^T [C]^T [K_x] [C] \{d\}_e \\
 & + \frac{1}{2} \{d\}^T [C]^T [K_y] [C] \{d\}_e \\
 & + \frac{1}{2} \{d\}^T [C]^T [K_\alpha] [C] \{d\}_e \\
 & + \frac{1}{2} \{d\}^T [C]^T [K_t] [C] \{d\}_e \quad (3.16. a)
 \end{aligned}$$

혹은

$$\Pi = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_e] \{d\}_e \quad (3.16. b)$$

여기서  $[K_e]$ 는 식(3.17)과 같이 표시되며

$$\begin{aligned}
 [K_e] = & [C]^T ([K_A] + [K_x] + [K_y] \\
 & + [K_\alpha] + [K_t]) [C] \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$[K_A]$ ,  $[K_x]$ ,  $[K_y]$ ,  $[K_\alpha]$  및  $[K_t]$ 는 각각 축력  $N$ ,  $x$ 축,  $y$ 축에 대한 휨모멘트  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $B$ ; 바이모멘트 그리고 St. Venant 비틀림모멘트  $T_w$ 에 대한 요소강도 매트릭스들이다.

### 3.5 절점하중벡터

그림 2.2에서 표시한 나선형 곡선부재에 작용하는 등분포하중은  $q_x, q_y, q_s, m_s$  만 작용한다고 가정하였으므로 하중벡터는 다음과 같이 표시된다.

$$\{p\} = \{q_x, q_y, q_s, m_s\} \quad (3.18)$$

가상일의 원리를 적용시켜 하중벡터를 절점하중벡터  $\{r\}_e$ 로 표시하면 다음과 같다.

$$\{r\}_e = \int_0^L [N]^T \{p\} ds = L \int_0^1 [N]^T \{p\} dx \quad (3.19)$$

요소내 임의의 점에 집중하중 벡터  $\{p\}$ 가 작용하면 이 집중하중벡터는 식(3.20)과 같이 표시되며 절점하중벡터  $\{R\}_e$ 로 표시하면 식(3.21)과 같다.

$$\{P\} = \{P_x, P_y, P_s, M_s\} \quad (3.20)$$

$$\{R\}_e = [N]^T \{P\} \quad (3.21)$$

여기서,  $[N]_p$  매트릭스는 집중하중  $\{P\}$ 가 작용하는 점에 대해 계산한 변위형상함수 매트릭스이다.

### 3.6 질량 매트릭스

하중벡터와 마찬가지로 식(3.22)와 같은 D'Alembert 힘만을 고려하여 consistent 질량매트릭스를 구하면 식(3.23)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} q_s \\ q_x \\ q_y \\ m_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho A & & & \\ & -\rho A & & \\ & & -\rho A & \\ & & & -\rho I_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$[M]_e = \rho A L \int_0^L [N]^T [\rho_0] [N] dx \quad (3.23)$$

여기서  $[\rho_0]$  매트릭스는 다음과 같다.

$$[\rho_0] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & I_P/A \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

여기서  $A$ 는 단면적,  $I_P$ 는 극관성모멘트이다.

### 3.7 경계 조건

본 논문에서는 나선형 薄壁 곡선부재의 경계조건을 쉽게 적용시키기 위하여 절점 변위벡터를 다음과 같이 변위, 회전각, 곡률 및 곡률의 도함수로 구성된 절점변위벡터를 사용하였다. 이와 같은 절점변위벡터를 사용하는 경우 각 절점의

표 3.1 Definition of Boundary Conditions

Boundary Condition		Displacement			
Axial Direction	Free	$w$	$\varepsilon_s$	$w''$	$w'''$
	Fixed	0	0		
Radial Direction	Free	$u$	$\theta_y$	$k_y$	$k_y'$
	Pinned	0		0	
	Fixed	0	0		
Vertical Direction	Free	$v$	$\theta_x$	$k_x$	$k_x'$
	Pinned	0		0	
	Fixed	0	0		
Torsional Direction	Free(WF)	$\phi$	$\Omega$	$\Omega'$	$\Omega''$
	Pinned	0		0	
	Fixed(WC)	0	0		

\*0 : Constrained Degree of Freedom

WF : Warping Free

WC : Warping Constraint

변위성분들이 서로 복합된(coupled) 경우 경계 조건 적용 및 부재력 계산이 용이하기 때문이다.

$$\{U\}_e = \{w_i, \epsilon_i, w'_i, w''_i, u_i, \theta_y, k_y, v_i, \theta_x, k_x, \phi_i, \Omega_i, \Omega'_i, \Omega''_i\} \quad (3.25)$$

절점의 경계조건을  $w, u, v, \phi$  자유도 방향으로 표시하면 표 3.1 과 같다.

### 3.8 좌표 변환

본 논문에서는 식(3.25)와 같은 절점변위벡터

를 사용하므로  $\{d\}_e$ 를  $\{U\}_e$ 로 좌표변환하면 다음과 같이 표현된다.

$$\{d\}_e = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} T_u & 0 \\ 0 & T_v \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}_e = [T_0] \{U\}_e \quad (3.26)$$

여기서  $[T_0]$ 는  $[T_u]$  매트릭스로 형성된  $32 \times 32$  매트릭스이며  $[T_v]$  매트릭스는 식(3.27)과 같다.

w	1									w
w'		1	k							w'
w''			1							w''
w'''				1						w'''
u					1					u
u'	-k				1		$\tau$			$\theta_y$
u''	-k	$-(k^2 + \tau^2)$			1		$-2\tau$			$k_y$
u'''	$k\tau^2$	-k	$-3\tau^2$		1	$-\tau^3$	$-2\tau$	$2k\tau$		$k_y'$
v						1				v
v'							-1			$\theta_x$
v''	$k\tau$		$-2\tau$		$-\tau^2$	-1		k		$k_x$
v'''	$k\tau$	$\tau(k^2 + \tau^2)$	$-2\tau$		$k^2 + 3\tau^2$	-1		k		$k_x'$
$\phi$								1		$\phi$
$\phi'$					k			1		$\Omega$
$\phi''$			$k\tau$			k	$-k^2$	1		$\Omega'$
$\phi'''$			$k\tau$		$-k(k^2 + \tau^2)$	k	$-k^2$	1		$\Omega''$

식(3.26)을 변형 에너지에 대한 식(3.16. b)에 대입하여 정리하면 식(3.28)과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \{U\}_e^T [T_0]^T [K_e] [T_0] \{U\}_e \quad (3.28)$$

그러므로  $\{U\}_e$ 의 절점변위벡터로 표시한 강성도 매트릭스, 질량매트릭스, 절점하중벡터는 다음과 같다.

$$[K_u]_e = [T_0]^T [K_e] [T_u] \quad (3.29)$$

$$[M_u]_e = [T_0]^T [M_e] [T_u] \quad (3.30)$$

$$\{r_u\}_e = [T_0]^T \{r\}_e \quad (3.31)$$

$$\{R_u\}_e = [T_0]^T \{R\}_e \quad (3.32)$$

따라서 전체 좌표계  $\{U\}_e$ 로 표시한 운동방정식은 다음과 같다.

$$[K_u]_e \{U\}_e + [M_u]_e \ddot{\{U\}}_e = \{R_u\}_e$$

## 4. 해석 예

본 논문에서 제시한 나선형 유한 요소모델을 이용하여 원형곡선부재와 나선형 곡선부재에 대한 정적 및 자유진동 해석을 실행하여 해석결과를 도표화하였다.

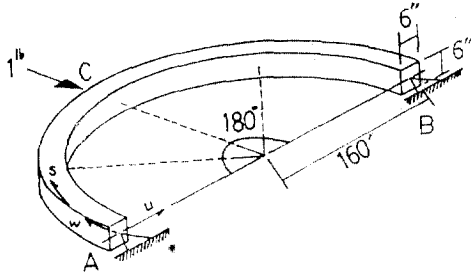
### 4.1 원형 곡선 부재

원형곡선부재의 면내거동을 조사하기 위하여 곡률반경이 160ft이며 6 in×6 in의 단면을 갖는 아이치를 선택하여 그 결과를 Ashwell의 결과와 비교하였다. 단면 및 크기는 그림 4.1과 같으며 해석 결과는 표 4.1과 같다.

원형곡선부재의 면외거동을 조사하기 위하여 길이가 180 in, 곡률 반경이 240 in인 W10×49

단면에 대해, 집중하중  $P=20$  k,  $T=-20$  k-in 이 작용할 경우와 등분포하중  $p=0.22$  k/in  $t=-0.222$  k-in/in 가 작용하는 경우, 처짐과 휨 모멘트를 계산하였다.

단면 및 크기는 그림 4.2와 같으며 해석 결과를 Heins 와 Spates 의 해석 결과와 비교하였다. 표 4.2.a 는 단순지지된 원형 곡선부재, 표 4.2.b 는 양단이 고정단인 원형곡선부재의 해



$$a=160 \text{ ft}, \quad A=36 \text{ in}^2, \quad I_x=I_y=108 \text{ in}^4$$

$$I_{\theta}=0, \quad K_x=216 \text{ in}^4, \quad \alpha=0,$$

$$\beta=180^\circ, \quad E=30 \times 10^6 \text{ psi}, \quad \nu=0.3,$$

$$\rho=0.000735 \text{ lb-sec}^2/\text{in}^4.$$

그림 4.1 Horizontally Curved Beam with 6''\*6'' Cross Section

표 4.1 (a) In-Plane Bending Moment  $M_y$  of Ashwell's Model

(in ft-lb)				
Position (radians)	Ashwell	Present	Exact	Error (%)
0		(17.7090)	17.6969	
$\pi/32$	11.0216	10.8815	10.8814	0.0009
$3\pi/32$	-0.0257	-0.1833	-0.1833	0
$\pi/8$		(4.3255)	-4.3261	
$5\pi/32$	7.3170	7.4865	7.4866	0.0013
$7\pi/32$	-10.5740	-10.7476	-10.7477	0.0009
$\pi/4$		(-10.8198)	-10.8168	
$9\pi/32$	-9.6689	-9.8413	-9.8414	0.0010
$11\pi/32$	-4.6382	-4.8023	-4.8024	0.0021
$3\pi/8$		(-0.7999)	-0.7874	
$13\pi/32$	4.3253	4.1756	4.1755	0.0024
$15\pi/32$	16.8770	16.7475	16.7474	0.0006
$\pi/2$		(24.2736)	24.2357	

\* 16 Helically Curved Finite Element in Present Study  
8 Helically Curved Finite Element in Parent-hesis

석결과이다. 또한 단순지지된 원형곡선부재에 대한 자유진동 해석결과를 정확해와 비교하여 표 4.3에 표시하였다.

면의거동에 대한 또다른 예로써, 그림 4.3과 같이 곡률반경이 100 in이며 5 in x 10 in 의 구형

표 4.1 (b) Shear Force  $Q_x$  in  $x$ -Axis of Ashwell's Model

(in inches)				
Position (radians)	Ashwell	Present	Exact	Error (%)
0		(-0.4617)	-0.4591	
$\pi/32$	-0.4075	-0.4079	-0.4079	0.
$3\pi/32$	-0.2939	-0.2942	-0.2942	0.
$\pi/8$		(-0.2342)	-0.2330	
$5\pi/32$	-0.1691	-0.1692	-0.1692	0.
$7\pi/32$	-0.0377	-0.0377	-0.0377	0.
$\pi/4$		(0.0287)	0.0289	
$9\pi/32$	0.0951	0.0952	0.0952	0.
$11\pi/32$	0.2243	0.2245	0.2245	0.
$3\pi/8$		(0.2903)	0.2862	
$13\pi/32$	0.3449	0.3452	0.3452	0.
$15\pi/32$	0.4522	0.4526	0.4526	0.
$\pi/2$		(0.5073)	0.5000	

\* 16 Helically Curved Finite Element in Present Study  
8 Helically Curved Finite Element in Parent-hesis

표 4.1 (c) Axial Force  $N$  of Ashwell's Model

(in lb)				
Position (radians)	Ashwell	Present	Exact	Error (%)
0			0.5004	
$\pi/32$	0.5417	0.5434	0.5426	0.1474
$3\pi/32$	0.6108	0.6121	0.6118	0.049
$\pi/8$			0.6375	
$5\pi/32$	0.6563	0.6580	0.6574	0.0913
$7\pi/32$	0.6767	0.6784	0.6778	0.0885
$\pi/4$			0.6782	
$9\pi/32$	0.6710	0.6727	0.6721	0.0893
$11\pi/32$	0.6396	0.6411	0.6406	0.0761
$3\pi/8$			0.6155	
$13\pi/32$	0.5836	0.5853	0.6155	0.1369
$15\pi/32$	0.5051	0.5845	0.5059	-0.2767
$\pi/2$			0.4621	

\* 16 Helically Curved Finite Element in Present Study

㊦ 4.2 (a) Vertical Displacements and Out-of-Plane Bending Moments of Chaudhri Model with Both Ends Pin-Jointed

Load	Case	Vertical Displacement			Out-of-Plane Bending Moment		
		1/4-span	1/2-span	3/4-span	1/4-span	1/2-span	3/4-span
		(in)	(in)	(in)	(k-in)	(k-in)	(k-in)
1) CL $P=20$ (k) $T=-20$ (k-in)	Exact	0.5797	0.8224	0.5797	50.08	98.41	50.08
	2 HF		0.8224				
	2 AF		0.8210				
	4 HF	0.5797	0.8224	0.5797	50.00	98.27	50.00
	4 AF	0.5790	0.8210	0.5790			
2) DL $p=0.22$ (k/in) $t=-0.222$ (k-in/in)	Exact	0.7349	1.038	0.7349	73.74	98.62	73.74
	2 HE		1.038			90.27	
	2 AF						
	4 HE	0.7349	1.038	0.7349	73.29	98.17	73.29
	4 AF	0.7375	1.025	0.7375			

\* CL : Concentrated Load

DL : Distributed Load

HF : Helically Curved Finite Element in Present Study

AF : Horizontally Curved Finite Element in Ashwell's Study

(a) Both Ends Pin-Jointed about  $M_x$  and  $T$

㊦ 4.2 (b) Vertical Displacements and Out-of-Plane Bending Moments of Chaudhri Model with Both Ends Fixed

Load	Case	Vertical Displacement			Out-of-Plane Bending Moment		
		1/4-span	1/2-span	3/4-span	1/4-span	1/2-span	3/4-span
		(in)	(in)	(in)	(k-in)	(k-in)	(k-in)
1) CL $P=20$ (k) $T=-20$ (k-in)	Exact	0.0095	0.0200	0.0095	-49.58	-3.028	-49.58
	2 HF		0.0200			-2.281	
	2 AF		0.0200				
	4 HF	0.0095	0.0200	0.0095	-49.31	-2.887	-49.31
	4 AF	0.0100	0.0200	0.0100			
2) DL $p=0.22$ (k/in) $t=-0.222$ (k-in/in)	Exact	0.00966	0.01825	0.00966	-44.65	-21.89	-44.65
	2 HF		0.01825			-22.75	
	2 AF		0.01820				
	4 HF	0.00966	0.01825	0.00966	-44.67	-22.03	-44.67
	4 AF	0.00965	0.01824	0.00965			

\* CL : Concentrated Load

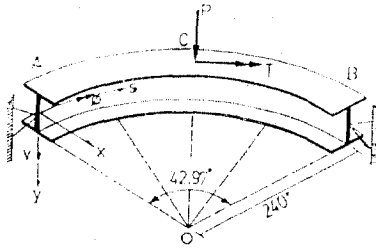
DL : Distributed Load

HF : Helically Curved Finite Element in Present Study

AF : Horizontally Curved Finite Element in Ashwell's Study

(b) Both Ends fixed about Out-of-Plane Bending Moment and Total Torsion





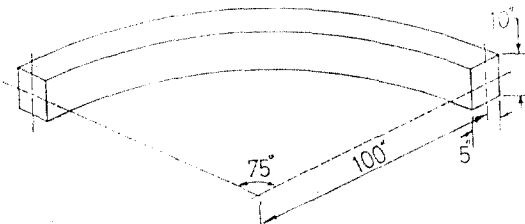
$E=29 \times 10^6$  ksi,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=0.735 \times 10^{-4}$  k-sec<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>,  
 $A=14.41$  in<sup>2</sup>,  $I_x=273.2$  in<sup>4</sup>,  $I_y=93$  in<sup>4</sup>,  
 $K_x=1.39$  in<sup>4</sup>,  $I_{\Omega}=2073$  in<sup>4</sup>,  $a=240$  in,  
 $L=180$  in,

그림 4.2 Horizontally Curved Beam with W10x49 Cross Section

표 4.3 Natural Frequencies of Chaudhuri's Model

Mode No.	Exact Frequency	2 HCFEM (radians/sec)	4 HCFEM (radians/sec)
1	61.982	61.983	61.933
2	493.555	684.890	491.546
3	784.152		777.967
4	1265.131		1192.010
5	1334.168		1307.304

\* HCFEM : Helically Curved Finite Element Method in Present Study



$E=30 \times 10^6$  psi  $\nu=0.3$   $\rho=0.735 \times 10^{-8}$  lb-sec<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>  
 $A=50$  in<sup>2</sup>  $I_x=416.67$  in<sup>4</sup>  $I_y=104.167$  in<sup>4</sup>  
 $K_x=286.25$  in<sup>4</sup>  $I_{\Omega}=0$   $a=100$  in  
 $\beta=75^\circ$

그림 4.3 Horizontally Curved Beam with 5"x10" Cross Section

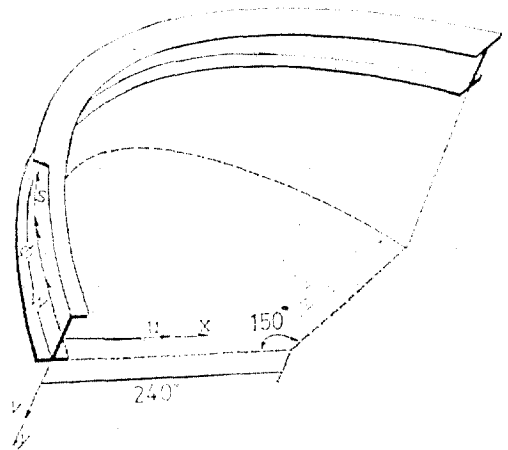
단면을 갖는 원형곡선부재에 대해, 양단이 단순 지지된 경우의 자유진동해석 결과를 Chaudhuri의 해석결과와 비교하여 표 4.4에 표시하였다.

#### 4.2 나선형 곡선부재의 거동.

나선형 곡선부재의 해석으로, Abdul-Baki와 Bartel이 선택한 나선반경 240 in이며, 나선중

표 4.4 Natural Frequencies of Horizontally Curved Beam with 5"x10" Cross Section

Mode Number	Natural Frequencies in radians/second		
	Present Theory	Chaudhuri	Error(%)
1	214.7	214.2	0.21
2	1180.0	1171.0	0.77
3	2825.0	2791.4	1.19



$A=55.8$  in<sup>2</sup>  $I_x=1890$  in<sup>4</sup>  $I_y=589$  in<sup>4</sup>  
 $K_x=48.8$  in<sup>4</sup>  $I_{\Omega}=23600$  in<sup>4</sup>  $\nu=0.3$   
 $E=30 \times 10^6$  psi  $\rho=0.735 \times 10^{-8}$  lb-sec<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>  
 $a=240$  in  $\alpha=25^\circ$   $\beta=150^\circ$

Helically Curved Beam under Vertical Distributed Load 0.5 k/ft

그림 4.4 Helically Curved Beam with W12x190 Cross Section

심각이 150°인 W12x190 단면에 대하여, 나선 기울기가 25°이며 양단이 고정단인 경우와 양단이 단순지지된 경우로 구분하여 등분포하중 0.5 k/ft가 작용할 때의 정적 해석을 실행하였다.

그림 4.4에 단면 및 크기를 표시하였으며 표 4.5와 표 4.6은 각각 양단이 고정단일 경우와 양단이 단순지지된 경우, 8개, 16개의 나선형 유한요소를 사용하여 계산한 부재력을 표시하였다.

표 4.5 End Reactions of Both Ends Fixed Helically Curved Beam with  $\alpha=25^\circ$  and  $\beta=150^\circ$

Case (Unit)	$Q_x$ (k)	$Q_y$ (k)	$N$ (k)	$M_x$ (k-in)	$M_y$ (k-in)	$T$ (k-in)
8 HF	-0.499	-13.01	-1.56	1441.7	-387.6	512.16
16 HF	-0.433	-13.09	-1.61	1442.0	-387.3	512.03
Abdul-Baki	-0.370	-13.09	-1.35	1476.0	-324.0	487.60

\* HF : Helically Curved Finite Element Method

표 4.6 End Reactions of Both Ends Simply Supported Helically Curved Beam with  $\alpha=25^\circ$  and  $\beta=150^\circ$

Case (Unit)	$Q_x$ (k)	$Q_y$ (k)	$N$ (k)	$M_x$ (k-in)	$M_y$ (k-in)	$T$ (k-in)
16 HF	0.	-13.09	0.	1663.74	0.	393.85
Abdul-Baki	0.	-13.09	0.	1663.20	0.	391.85

\* HF : Helically Curved Finite Element Method

## 5. 결 론

1) 표 4.1에서 알 수 있듯이 Ashwell의 해석 결과는 정확해와 비교하여 0.2%의 차이를 나타내며 본 논문에서 제시한 나선형 유한요소법에 의한 해석결과는 정확해와 비교하여 최대 0.1%의 차이를 나타낸다. 특히 Ashwell은 원형곡선부재의 초기곡률을 고려한 유한요소법을 적용시켰으며 16개의 유한요소로 분할하여 해석하였다. 본 논문에서 제시한 나선형 유한 요소 8개를 사용하였을 경우 정확해와 비교하여 최대 0.2%의 차이를 나타내므로 본 논문에서 제시된 나선형유한요소법의 해석결과가 Ashwell의 해석결과에 비해 보다 정확하며 적절하다는 것을 알 수 있다.

2) 면의 거동에 대해, Heins와 Spates, 그리고 Chaudhuri가 선택한 단면은 Vlasov의 미분방정식으로부터 정확해를 구한 Heins와 Spates의 연구가 있으며 원형곡선부재에 대한 변위형상함수를 가정하여 계산한 Chaudhuri의 해석 결과가 있다.

Chaudhuri의 해석결과는 Heins와 Spates의 정확해와 비교하여 최대 8%의 차이를 나타내지만 본 논문에서 제시된 나선형 유한요소법에 의한 해석결과를 정확해와 비교하여 최대 4.7%의 차이를 나타내고 있다.

그러므로 본 논문에서 제시된 나선형유한요소를 이용하여 면의 거동에 대한 해석결과도 기존의 해석방법과 비교하여 정확해로 수렴하는 속

도가 좋다는 것을 알 수 있다.

3) 나선형 곡선부재에 대한 해석 예에서는 측면형과 뒹효과를 무시하고 계산한 Abdul-Baki의 해석결과와 본 논문에서 제안한 나선형 유한요소법에 의한 해석결과를 비교하였다.

본 논문의 방법으로 계산한 결과에 비해 Abdul-Baki의 해석결과는 전체 비틀모멘트는 4.8%, 축력은 16%의 차이를 나타내고 있다.

Abdul-Baki의 해석방법은 측면형과 뒹효과를 무시한 방법이며 박벽단면을 갖는 나선형 곡선부재에 대해서는 측면형과 뒹효과를 고려해야 하므로 본 논문에서와 같이 뒹효과 및 측면형을 고려한 나선형 유한요소 모델이 요구된다.

## 참 고 문 헌

1. D.J. Struik, *Lecture on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley Press Inc., Cambridge, Maa., 1950.
2. J.J. Connor, *Analysis of Structural Member System*, The Ronald Press Co., 1976.
3. V.Z. Vlasov, *Thin-Walled Elastic Beams*, O'S 61-11400, National Science Foundation, Washington, D.C.
4. A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Dover Publications, New York, 1944, pp. 381~454.
5. C.F. Kollbrunner and K. Basler, *Torsion in Structures. An Engineering Approach*, Springer-Verlag, 1969.

6. 정진환 : 곡선프리스트레스트 콘크리트 형교의 정적 탄성 해석, 공학박사 학위논문, 서울대학교, 1985.
7. M.M. Tabbia and C.S. Turkstra, Free Vibration of Curved Box Girders, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 54, No. 4, 1977, pp. 501~514.
8. C.P. Heins, *Bending and Torsional Design in Structural Members*, Lexlugton Books, 1975.
9. R.O. Rabizadeh, *Static and Dynamic Analysis of Horizontally Curved Box Girder*, Ph.D. Thesis, Univ. of Pennsylvania, 1974.
10. P.P. Christiano, *The Dynamic Responses of Horizontally Curved Bridge Subject to Moving Loads*, Ph.D. Thesis, Carnegie-Mellon Univ., 1967.
11. R. Dabrowski, *Thin-Walled Girders, Theory and Analysis*, Cement and Concrete Association, Translation 114, London, England, 1972.
12. S.K. Chaudhuri and S. Shore, Thin-Walled Curved Beam Finite Element, *Journal of The Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 103, No. EM5, Oct., 1977, pp. 921~939.
13. A. Abdul-Baki and A. Shukair, Continuous Helicoidal Girders, *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 99, No. ST7, July, 1969, pp. 1407~1429.
14. K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
15. R.D. Cook, *Concepts and Application of Finite Element Analysis*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 1981.
16. C.P. Heins and S.R. Spates, Behavior of Single Horizontally Curved Girder, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 96, No. ST7, July, 1970, pp. 1511~1524.
17. A.B. Sabir and D.G. Ashwell, A Comparison of Curved Beam Finite Elements when used in Vibration Problems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, No. 4, 1971, pp. 555~563.

(接受 : 1988. 4. 28)