

역샘플링법을 이용한 포와슨과정의 비교**

Compasion of Two-time Homogeneous Poisson Processes Using Inverse Type Sapling Plans

장 증 순*
 임 춘 우*
 정 유 진*

Abstract

This study is concerned with the comparison of two time homogeneus Poisson processes.

Traditionally, the methods of testing equality of Poisson processes were based on the binomial distribution or its normal approximations. The sampling plans used in these methods are to observe the processes concurrently over a predetermined time interval, possibly different for each process. However, when the values of the intensities of the processes are small, inverse type sampling plans are more appropriate since there may be cases where only a few or even no events are observed in the predetermined time interval.

This study considers 9 inverse type sampling plans for the comparison of two Poisson processes. For each sampling plans considered, critical regions and the design parameters of the sampling plan are determined to guarantee the significance level and the power at some values of the alternative hypothesis.

The problem of comparing of two Weibull processes are also considered.

1. 서 론

포와슨 과정은 발생강도가 시간에 따라 변화하지 않고, 사건들이 독립적으로 발생하는 대표적인 추계적 과정으로서, 다른 추계적 과정의 성질규명에 필요한 기초이론을 제공할뿐 아니라, 신뢰도공학·대기행렬론·재고이론 등 많은 분야에 응용되고 있다.

본연구에서는 두개의 포와슨 과정의 동등성을 검정하는 문제를 다루고자 한다. 이와같은 문제는 생산설비의 고장의 수, 서비스 시스템에 도착하는 손님의 수, 교차로에서 발생하는 교통사고의 수 등을 비교하는 등 많은 경우에서 그 예를 찾아볼 수 있다.

포와슨 과정의 동등성을 비교하는 문제는 과거부터 많은 학자들의 관심을 집중시킨바, 한 과정에서 발생한 사건의 수의 두 과정에서 발생한 사건의 수의 합에 대한 조건부분포는 이항분포가 된다는 사실을 이용한 UMPU 검정(Lehmann; 1959), 정규 근사를 이용한 검정(Huffman; 1985) 등이 개발되었다. 특히 Sichel (1973)은 두 포와슨 과정에서 발생하는 사건의 수를 일정시간 관찰하여 두 과정을 비교하는 문제를 다루었고, Shiu와 Bain(1982)은 서로 다른 시간동안 관찰하여 비교하는 문제를 다루었다.

포와슨 과정을 비롯한 각 추계적 과정에서의 통계적 추론을 위하여는 먼저 데이터를 어떤 방법으로 얻을 것인가하는 샘플링방법이 결정되어야 한다. 위의 연구들에서 채택하고 있는 샘플링 방법은 대부분의 추계적 과정의 추론에 대한 연구에서처럼 추계적 과정을 일정시간 동안만 관찰하는 고정시간 샘플링방법이다. 그러나 포와슨 과정에서는 사건의 발생 강도가 작은 경우 일정시간 동안만 관찰을 하면 적은 수의 사건이 발생하거나 하나도 발생하지 않을 수 있다.

이러한 경우에는 고정시간 샘플링법을 이용하는 것보다 미리 정해진 수의 사건이 발생할 때까지 관찰을 계속하는 역샘플링 방법이 더 유용하다.

역샘플링법은 독립 베르누이 시행에 대하여 Haldane(1945)이 처음 연구하였다. 한편 Girshick et al.(1946)

*아주대학교 산업공학과

**본 연구는 한국과학재단 기초연구비지원에 의해 수행되었음.

과 DeGroot(1959)는 역이항 샘플링법을 이용하여 베르누이 시행의 모수를 추정하였고, Kim과 Bai(1979)는 이들의 방법을 중속 베르누이 시행으로 확장시켰다. Kim(1979)는 또 베르누이 시행에 있어 역이항 샘플링법을 포함한 9가지의 일반적인 역샘플링 방법을 제시하였으며, 이를 유클리디언 평면상에 격자점의 경로로서 표시하였다.

한편 포와슨 과정의 비교문제에서도 이와같은 역샘플링법이 이용되어, Gail(1974)은 두 포와슨 과정에서 발생한 사건수들의 합이 미리 정해진 수에 도달할 때까지 관찰하는 역샘플링법을 사용하였다.

본연구에서는 Kim(1979)가 제시한 9가지의 역샘플링법을 이용하여 포와슨 과정을 비교하는 문제를 다루고자 한다.

2. 포와슨 과정의 비교

$\{N_i(t), t > 0\}$, $i=1, 2$ 를 발생강도 $\lambda_i > 0$ 를 갖는 포와슨 과정이라고 하자. 두 과정들의 발생강도를 비교하기 위하여 다음의 가설들을 검정하고자 한다.

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda_1 > \lambda_2 \quad \dots \dots \dots (1)$$

또는

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

여기서 만일 $\rho = \lambda_2 / \lambda_1$ 이라고 하면, (1)과 (2)의 가설은 각각

$$H_0 : \rho = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \rho < 1, \quad \dots \dots \dots (3)$$

또는

$$H_0 : \rho = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \rho \neq 1 \quad \dots \dots \dots (4)$$

의 가설들과 동치가 된다.

위의 가설들을 검정하기 위하여 다음과 같은 샘플링방법을 사용한다.

• 샘플링 방법

두 과정에서 관찰된 사건수의 합이 최소사건의 수 M_1 개가 될 때까지 관찰하거나, 또는 $N_1(t)$ 에서 N_2 개의 사건들이 관찰하거나, $N_2(t)$ 에서 N_2 개의 사건들이 관찰되거나 또는 두 과정에서 관찰된 사건의 수의 합이 M_2 개가 될 때까지 관찰한다. 단 $M_1 \leq M_2$ 이다.

위와같은 샘플링방법은 $S(\cdot; M_1, M_2, N_1, N_2)$ 로 표시하기로 한다. τ 를 관찰이 중지되는 시간을 나타내는 관찰정지 시간(stopping time)이라 하고,

$$\delta = \begin{cases} 1. & N_1(\tau) + N_2(\tau) = M_1, \\ 2. & N_1(\tau) = N_1, \\ 3. & N_2(\tau) = N_2, \\ 4. & N_1(\tau) + N_2(\tau) = M_2 \end{cases}$$

인 확률변수라고 하자.

정리 1. δ 의 값이 주어진 경우 δ 의 조건부 최우 추정치는

$$\rho = \begin{cases} N / (M_1 - N), & \delta = 1, \\ N / N_1, & \delta = 2, \\ N_2 / N, & \delta = 3, \\ N / (M_2 - N), & \delta = 4, \quad \dots \dots \dots (5) \end{cases}$$

이다. 단 여기서 $N = N_2(\tau)$ 이다.

증명 : τ 가 주어진 경우 조건부 우도 함수는

$$L = \begin{cases} \lambda_1^{M_1-n} \lambda_2^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau}, & \delta = 1, \\ \lambda_1^{N_1} \lambda_2^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau}, & \delta = 2, \\ \lambda_1^n \lambda_2^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau}, & \delta = 3, \\ \lambda_1^{M_2-n} \lambda_2^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau}, & \delta = 4, \dots \dots \dots \end{cases} \quad (6)$$

이다. 단 여기서 n은 N의 값을 나타낸다.

(6)으로부터 (5)는 쉽게 구해진다.

정리 1로부터 (3)과 (4)의 가설에 대한 검정은 τ 까지 발생한 사건의 수인 N으로부터 구해질 수 있음을 알 수 있다.

3. 샘플링방법과 검정절차의 시각화

2절에서 (3)과 (4)의 가설은 관찰정지시간 τ 보다 그 때까지 발생한 사건의 수들로부터 검정절차를 구할 수 있음을 알 수 있다. 따라서 우리의 관심은 발생하는 사건의 수에만 있으므로, 샘플링방법 $S(\cdot; M_1, M_2, N_1, N_2)$ 를 유클리디언 직교좌표상의 격자점들로 이루어진 경로로써 시각화할 수 있다. 즉 샘플링방법은 원점을 출발하여 $N_1(t)$ 에서 사건이 발생하면 수평으로 +1만큼 가고, $N_2(t)$ 에서 사건이 발생하면 수직으로 +1만큼 진행하는 경로로서 표시될 수 있다. 이를 위하여 수평축을 N^1 , 수직축을 N^2 라고 표시하고, 점 r 을 $N^1(r)$ 과 $N^2(r)$ 이 모두 음이 아닌 정수인 격자점으로 생각하자. 여기서 r_0 을 원점이라고 하고, 집합 $\{r_0, r_1, \dots, r_n\}$ 을

$$\begin{aligned} N^1(r_{k+1}) &= N^1(r_k) + 1, \\ N^2(r_{k+1}) &= N^2(r_k) \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7)$$

이거나

$$\begin{aligned} N^1(r_{k+1}) &= N^1(r_k), \\ N^2(r_{k+1}) &= N^2(r_k) + 1, \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (8)$$

중 어느 하나를 만족하는 점들이라고 하자($k=0, 1, \dots, n-1$). 위와같은 성질을 만족하는 $\{r_0, \dots, r_n\}$ 은 원점을 출발하여 점 r_n 에 이르는 경로임을 알 수 있다. B를 원점으로부터의 경로가 적어도 하나 이상 존재하고, 그 점에 도달하면 관찰을 중지하는 경계점들의 집합이라고 하자. 위와같이 정의하면 어떠한 역샘플링방법도 경계점의 집합 B로서 특정지어질 수 있는데, 본연구에서 고려한 $S(\cdot; M_1, M_2, N_1, N_2)$ 는 다음과 같은 경계점들을 갖는 샘플링방법이다.

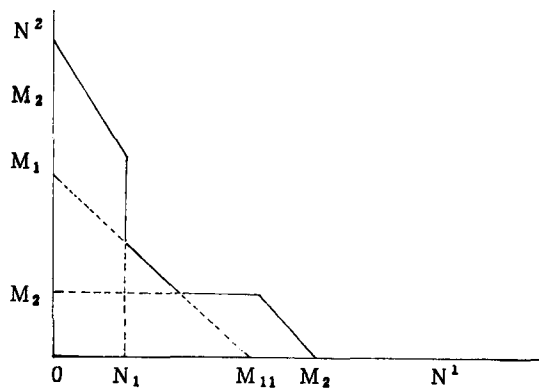


그림 1. $S(\cdot; M_1, M_2, N_1, N_2)$ 의 경계점

즉 $S(\cdot; M_1, M_2, N_1, N_2)$ 는 그림 1에서 원점을 출발하여 $N_1(t)$ 에서 사건이 발생하면 N^1 축으로 +1을, $N_2(t)$ 에서 사건이 발생하면 N^2 축으로 +1만큼을 진행시키다가 실선으로 표시된 경계점에 도달하면 관찰을 중지하는 방법이다.

$S(\cdot; M_1, M_2, N_1, N_2)$ 에서 M_1, M_2, N_1, N_2 의 값을 조정하면 그림 2에서 그림 9까지와 같은 특수한 샘플링방법을 얻을 수 있다.

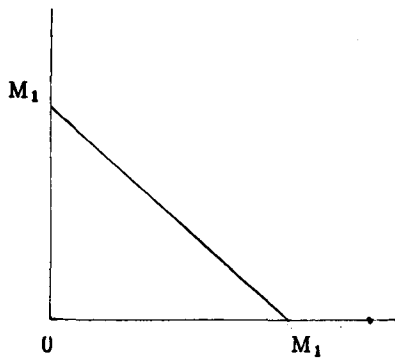


그림 2. $S_1(\cdot; M_1, M_1, 0, 0)$

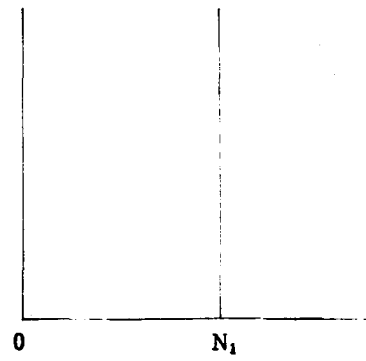


그림 3. $S_2(\cdot; 0, \infty, N_1, 0)$

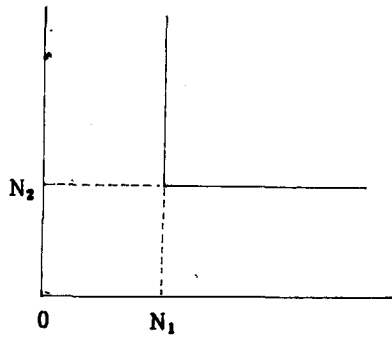


그림 4. $S_3(\cdot; 0, \infty, N_1, N_2)$

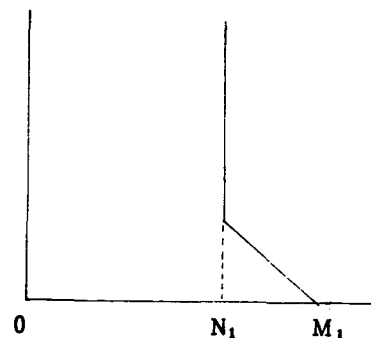


그림 5. $S_4(\cdot; M_1, \infty, N_1, 0)$

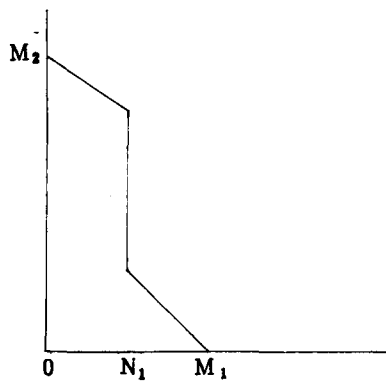


그림 6. $S_5(\cdot; 0, M_2, N_1, 0)$

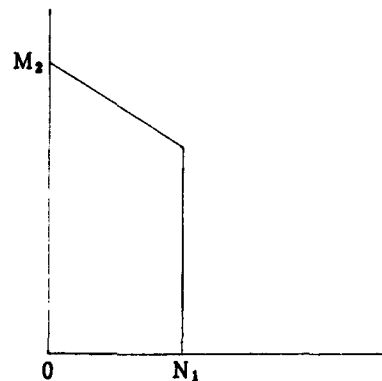


그림 7. $S_6(\cdot; M_1, M_2, N_1, 0)$

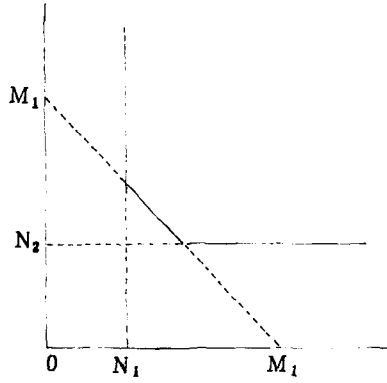


그림 8. $S_7(\cdot; M_1, \infty, N_1, N_2)$

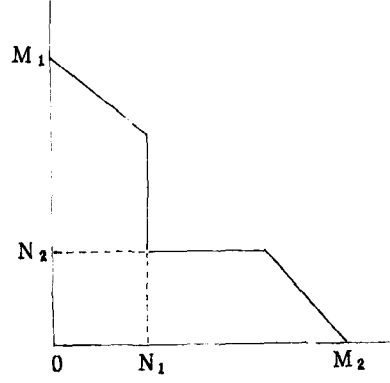


그림 9. $S_8(\cdot; 0, M_2, N_1, N_2)$

편의상 $S(\cdot; M_1, M_2, N_1, N_2)$ 를 $S_9(\cdot; M_1, M_2, N_1, N_2)$ 라고 표시하자. 샘플링방법 $S_i, i=1, \dots, 9$ 에 대해서 B_i 를 S_i 에서의 경계점들의 집합이라고 하자. 또 $P(r_k | r_1, \dots, r_{k-1})$ 을 원점을 출발한 경로가 r_1, \dots, r_{k-1} 를 통과하였다는 조건하에 점 r_k 에 도착할 확률이라고 하자. 그러면 어떤 경로가 $(r_0, \dots, r_n), r_n \in B_i$ 를 통과할 확률은

$$\prod_{k=1}^n P(r_k | r_0, \dots, r_{k-1}) \dots \dots \dots (9)$$

이 된다. 따라서 샘플링방법 S_i 에서 B_i 위의 점 r_n 에서 샘플링이 중지될 확률은 (9)를 원점에서 r_n 까지의 모든 가능한 경로에 대하여 합하면 된다. 즉

$$P_{S_i}(r_n) \approx \sum \prod_{k=1}^n P(r_k | r_0, \dots, r_{k-1}) \dots \dots \dots (10)$$

정리 2. $\{r_0, \dots, r_n\}$ 을 (7) 또는 (8)을 만족하는 경로라고 하자.

이 경우 모든 n 에 대하여

$$P(r_n | r_0, \dots, r_{n-1}) = P(r_1 | r_0) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{1-k} \dots \dots \dots (11)$$

을 만족한다. 단 $k=N^1(r_1)$ 이다.

증명: 포와슨 과정은 정상 독립증분을 가지므로

$$\begin{aligned} P(r_n | r_0, \dots, r_{n-1}) &= P(r_n | r_{n-1}) \\ &= P(r_1 | r_0) \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{1-k} \end{aligned}$$

이다.

이제 $K_{S_i}(r)$ 을 샘플링방법 S_i 에서 경계점 r 에 도달가능한 경로들의 수라고 하자. 그러면 정리 2로부터

$$P_{S_i}(r) = K_{S_i}(r) \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^M \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^N \dots \dots \dots (12)$$

단, $M=N^1(r), N=N^2(r)$,

가 된다. $K_{S_i}(r)$ 을 구하여 보면

$$\begin{aligned} K_{S_1}(r) &= M_1 \\ &\quad N \\ K_{S_2}(r) &= N_1 + N - 1 \\ &\quad N_1 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{S_3}(r) &= \begin{matrix} N_1 + N_2 - 1 \\ N_m \end{matrix}, \quad N_m = \max(M, N) \\
 K_{S_4}(r) &= \begin{matrix} M_1 \\ N \end{matrix}, \quad N > M_1 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} N_1 + N - 1 \\ N_1 - 1 \end{matrix}, \quad N > M_1 - N_1, \\
 K_{S_5}(r) &= \begin{matrix} M_2 \\ N \end{matrix}, \quad N > M_2 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} N_1 + N - 1 \\ N_1 - 1 \end{matrix}, \quad N < M_2 - N_1 \\
 K_{S_6}(r) &= \begin{matrix} M_1 \\ N \end{matrix}, \quad N < M_1 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} N_1 + N - 1 \\ N_1 - 1 \end{matrix}, \quad M_1 - N_1 < N < M_2 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} M_2 \\ N \end{matrix}, \quad N > M_2 - N_1, \\
 K_{S_7}(r) &= \begin{matrix} M + N - 1 \\ N - 1 \end{matrix}, \quad N = N_2, \quad M > M_1 - N_2, \\
 &\quad \begin{matrix} M_1 \\ N \end{matrix}, \quad N_2 < N < M_1 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} N_1 + N - 1 \\ N_1 - 1 \end{matrix}, \quad N > M_1 - N_1, \\
 K_{S_8}(r) &= \begin{matrix} M_2 \\ N \end{matrix}, \quad N < N_2 \text{ 또는 } N > M_2 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} N_1 + N - 1 \\ N_1 - 1 \end{matrix}, \quad N_2 < N < M_2 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} N_1 + N_2 \\ N_1 \end{matrix}, \quad N = N_2, \quad M = N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} M + N_2 - 1 \\ N_2 - 1 \end{matrix}, \quad N = N_2, \quad N_1 < M < M_2 - N_2, \\
 K_{S_9}(r) &= \begin{matrix} M_2 \\ N \end{matrix}, \quad N < N_2, \quad M > M_2 - N_2, \\
 &\quad \text{또는 } N > M_2 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} N_1 + N - 1 \\ N_1 - 1 \end{matrix}, \quad M_1 - N_1 < N < M_2 - N, \\
 &\quad \begin{matrix} M_1 \\ N \end{matrix}, \quad N_2 < N < M_1 - N_1, \\
 &\quad \begin{matrix} M + N_2 - 1 \\ N_2 - 1 \end{matrix}, \quad N = N_2, \quad M_1 - N_2 < M < M_2 - N_2,
 \end{aligned}$$

이 됨을 알 수 있다.

위에서 임의의 경계점에 도달할 확률을 구했는바, 이를 이용하면 (3) 또는 (4)의 가설에 대한 검정절차도 구할 수 있다. 먼저 (3)의 가설의 경우에는 만일 대립가설 $\rho < 1$ 이 성립한다고 하면 각 샘플링방법에서 N^1 축으로 1만큼 증가할 확률은 $\frac{1}{1+\rho}$ 이고, N^2 축으로 1만큼 증가할 확률은 $\frac{\rho}{1+\rho}$ 이므로, 원점을 출발한 경로들은 대부분 각 경계의 아래쪽이나 오른쪽에 아래부분에 도달할 것이므로, 따라서 기각역은 이 부분에 설정하는 편이 바람직하다고 판단된다. 즉 CB_1^i 을 샘플링방법 S_i 에서 (3)의 가설에서 대한 기각역이라고 할 때

$$CB_1^i = \{r: M > C_i\} \dots\dots\dots (13)$$

또는

$$CB_1^1 = \{r: N < C_i\}$$

의 형태를 취하는 것이 바람직하다.

또 (4)의 가설에서는 대립가설이 참인 경우 경도들이 오른쪽 아래부분 또는 왼쪽 윗 부분에 도달할 가능성이 많으므로, S_i 에서의 기각역 CB_i^1 는

$$CB_i^1 = \{r: M < d_i^1, M > d_i^2\} \dots\dots\dots (14)$$

또는

$$CB_i^2 = \{r: N < d_i^1, M > d_i^2\}$$

의 형태를 취하는 것이 바람직하다. 여기서 C_i, d_i^1, d_i^2 들은 유의수준 α 와 주어진 점 ρ_0 에서의 제2종 과오의 확률 β 가 주어지면 구할 수 있는 상수들이다. 즉 $\Psi_i(\rho)$ 를 S_i 하에서 CB_i^1 를 기각역으로 하는 검정력 함수라고 할 때 C_i, d_i^1, d_i^2 등은

$$\Psi_i(1) \leq \alpha \dots\dots\dots (15)$$

를 이용하여 구할 수 있다. 또 각 샘플링방법을 특정시키는 (M_1, M_2, N_1, N_2) 는 주어진 ρ_0 에서의 제2종 과오의 확률 β 를 만족시킬 수 있도록 구해질 수 있는 바, 부록에는 이를 이용하여 구한 예를 일부 예시하고 있다. 여기서 d_i^1 과 d_i^2 는 제1종 과오의 편측 확률이 $\frac{\alpha}{2}$ 이상이 되도록 조정하였다. 부록에는 또 이들 검정방법의 검정력 함수를 몇가지 경우에 대하여 제시하였다.

4. 검정절차의 성질

본절에서는 3의 검정절차의 성질을 알아보려고 한다. 이를 위하여 먼저 점 r_1 과 r_2 가 만일 $||r_1 - r_2|| < 1$ 이면 r_1 과 r_2 는 인접한 점이라고 부르기로 하자. 단 여기서 $|| \cdot ||$ 는 $r=(M, N)$ 일 때 $||r|| = \max(|M|, |N|)$ 을 나타낸다. 각 샘플링방법 S_i 의 경계 B_i 는 인접한 점들의 집합으로 이루어져 있다.

이제

$$H_0: \rho = 1 \quad \text{vs} \quad H_1: \rho = \rho_0 (\rho_0 \neq 1) \dots\dots\dots (16)$$

의 가설을 생각하여 보자. (16)의 가설을 검정하기 위하여 경도가 어떤 경계점 $r=(M, N)$ 에 도달하였을 때의 우도비 $q(r)$ 을 구하여 보면

$$q(r) = \frac{P_{S_i}(r: \rho = \rho_0)}{P_{S_i}(r: \rho = 1)} \\ = \left(\frac{2}{1 + \rho_0}\right)^{M+N} \rho_0^N$$

이 된다. 이제 점과의 인접점들에서의 우도비를 비교하여 보면

인접점 x'	우도비의 비 $(q(r')/q(r))$
$(M+1, N)$	$2/(1 + \rho_0)$
$(M+1, N-1)$	$1/\rho_0$
$(M, N - 1)$	$(1 + \frac{1}{\rho_0})/2$

74 장중순 · 임춘우 · 정유진

표1에서 고려된 인접점의 형태는 각 샘플링방법에서 왼쪽 위로부터 출발하여 각 경계점들을 따라가면 발견될 수 있는 인접점의 형태를 모두 고려한 것이다. 그런데 이와같이 할 경우 $\rho_0 < 1$ 인 경우는 각 우도비의 비는 모두 1보다 크고, $\rho_0 > 1$ 인 경우는 모두 1보다 작음을 알 수 있다. 즉 각 샘플링방법의 경계에서 어느 한 점을 출발하여 경계점들을 따라 움직이면, 각 경계점의 우도비는 단조 증가 또는 단조 감소함을 알 수 있게 된다.

따라서 (16)의 가설을 검정하기 위해서는 만일 $\rho_0 < 1$ 인 경우는 경계의 오른쪽 아래에 있는 경계점들로 이루어진 기각역이 가장 좋은 검정이 되고 $\rho_0 > 1$ 인 경우에는 왼쪽 윗부분에 있는 경계점들의 집합으로 이루어진 기각역이 가장 좋은 검정이 됨을 알 수 있다.

이와같은 사실을 이용하면 (3)과 (4)의 가설에 대해 본연구에서 제시한 검정방법의 타당성도 입증될 수 있는 바 이 검정방법들은 특히 일양 최강력 불편점정과 근사한 형태임도 알 수 있다.

왜냐하면 각 샘플링방법에서 어떤 경계점에 도달할 확률은

$$P_{s_i}(r) = K_{s_i}(r) e^{N \log p - (M+N) \log(1+p)}$$

$$= K_{s_i}(r) e^{M \log \frac{1}{\rho} - (M+N) \log(1 + \frac{1}{\rho})}$$

로 표시될 수 있어, $P_{s_i}(r)$ 은 여러개의 모수를 갖는 지수족(exponential family)의 일종이므로 Lehmann(p. 136, Theorem 3)의 결과에 의하여 (3) 또는 (4)의 가설은 제1종 과오의 확률을 유의수준과 같아지도록 혼합전략(mixed strategy)을 사용하면 본연구에서 제안한 형태의 기각역이 일양 최강력 불편검정이 됨을 알 수 있다. 그런데 본연구에서는 혼합전략을 사용하지 않고 단순전략만을 사용하였으므로 이는 일양최강력 불편검정과 근사한 형태임을 알 수 있다.

5. 와이블 과정의 비교

$\{N_i(t), t > 0\}$ 를

$$P \{N_i(t) = n\} = \frac{(H_i(t))^n e^{-H_i(t)}}{n!}, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

인 비정상 포와슨 과정이라고 하자($i=1, 2$). 여기서 $H_i(t) = \lambda_i t \beta$ 이라고 하면 $N_i(t)$ 는 보통 와이블 과정이라고 불리우는데, 이는 응급수리를 고려한 시스템의 정비정책 등에서 그 예를 찾을 수 있다.

여기서 두 와이블 과정의 발생강도 함수가 같은가를 비교하는 것은 결국 (1) 또는 (2)의 가설을 검정하는 것이 되는 바, 이 경우에서도 본 연구에서 제안한 검정절차가 쓰일 수 있음을 알 수 있다.

정리3. $\{r_0, \dots, r_n\}$ 을 (8) 또는 (9)를 만족하는 경로라고 하자.

그러면 와이블 과정에서

$$P(r_n | r_0, \dots, r_{n-1}) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{1-k}$$

단 $k = N^1(r_n) - N_1(r_{n-1})$

이다.

증명: T_{ij} 를 i 과정에서 j 번째 사건이 발생하는 시각이라고 하자.

$i=1, 2, j=1, 2, \dots$, 만일 $k=1$ 이면

$$P(r_n | r_0, \dots, r_{n-1}) = P \{T_{1u} < T_{2v} | T_{1,u-1} < T_{2v}, T_{2,v-1} < T_{1u}\},$$

단 $u = N^1(r_n), v = N^2(r_n)$ 이다.

또 $k=0$ 이면

$$P(r_n | r_0, \dots, r_{n-1}) = P \{T_{1u} > T_{2v} | T_{1,u-1} < T_{2v}, T_{2,v-1} < T_{1u}\}$$

가 된다. 그런데 $(T_{i,m-1}, T_{im})$ 의 결합확률 밀도함수는

$$f_{T_{i,m-1}, T_{im}}(t,s) = \frac{e^{-H_i(t)} e^{-H_i(s)} h_i(t) h_i(s)}{(m-2)!}, \quad 0 < t < s, m > 2,$$

단 $h_i(t) = dH_i(t)/dt, i=1, 2,$

이므로

$$\begin{aligned}
 & P \{T_{1u} < T_{2v} \mid T_{1,u-1} < T_{2v}, T_{2,v-1} < T_{1u}\} \\
 &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty p |x < T_{1u} < y|^{T_{2,v-1}} T_{2v}^{T_{2,v-1}} dx dy}{\int_0^\infty \int_0^\infty P \{T_{1u-1} < y, T_{1u} > x\}^{T_{2,v-1}} T_{2v}^{T_{2,v-1}} dx dy} \\
 &= 1/(1+p)
 \end{aligned}$$

이고,

$$P \{T_{1u} > T_{2v} \mid T_{1,u-1} < T_{2v}, T_{2,v-1} < T_{1u}\} = \frac{\rho}{1+\rho}$$

이다.

정리 3의 결과는 정상 포와슨 과정의 결과와 같게되는 바, 따라서 어떤 경계점 r에 도달할 확률은 (11)식과 같이

$$P_{s_1}(r) = K_{s_1}(r) \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^M \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^N$$

이 되므로, 본연구에서 제안한 검정절차가 이 경우에도 훌륭히 적용될 수 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

본연구에서는 두 개의 포와슨 과정의 동등성을 역샘플링법을 이용하여 검정하는 문제를 다루었다. 본연구에서는 이 검정문제가 유클리디언 평면상의 격자점들의 집합으로 이루어진 경로와 관찰을 중지하는 경계점으로 시각화될 수 있음을 보이고, 그 과정에서 가장 바람직한 형태의 검정방법을 도출하고 이러한 검정방법이 일양 최강력 불편검정과 근사한 형태임을 보였다. 본연구에서는 또 이러한 검정방법이 비정상 포와슨 과정의 일종인 와이불 과정의 비교문제에도 적용될 수 있음을 보였다.

포와슨 과정의 동등성을 검정하는 과거의 연구들은 대부분 샘플리방법에는 큰 관심을 두지 않았으나, 본연구에서는 이 문제를 샘플리방법에 초점을 맞추어 검정방법을 찾아냈다는 데에서, 본연구의 결과를 많은 다른 문제로 확장시킬 수 있다고 본다.

인용문헌

- 1) DeGroot, M. H., "Unbiased Sequential Estimation for Binomial Populations," *Ann. Math. Statist.*, 30, 80-101, 1959.
- 2) Gail, M., "Power Computations for Designing Comparative Poisson Trials." *Biometrics*, 30, 231-237, 1974.
- 3) Girshick, F. A., Mosteller, F. and Savage, L. J., "Unbiased Estimation for Certain Binomial Sampling Problems with Applications", *Ann. Math. Statist.*, 17, 13-23, 1946.
- 4) Haldane, J. R. S., "On a Method of Estimating Frequencies," *Biometrika*, 33, 222-225, 1945.
- 5) Huffman, M. D., "Comparing Two Poisson Parameters: What to Do When the Optimal Isn't Done," *Comm. Statist.—Theor. Meth.*, 14, 3663-3074, 1985.
- 6) Jang, J. S., Efficient Sequential Estimation in Continuous Time Branching Processes and Counting Processes, Unpublished Ph.D. Thesis, KAIST, 1986.
- 7) Kim, S. I. Estimation in Bernoulli Trials with Dependence under a Generalized Sampling Plan, Unpublished Ph. D. Thesis, KAIST, 1979.
- 8) Kim, S. I. and Bai, D. S., "Estimation of Transition Probabilities in a Two State Markov Chain," *Comm. Statist.—Theor. Meth.*, 8, 591-599, 1979.
- 9) Lehman, E. L., "Testing Statistical Hypothesis, Wiley, 1959.
- 10) Salvia, A. A., "Testing Equality of Binomial Parameters Based on Inverse Sampling," *IEEE Trans. Rel.*, 33, 377-378, 1984.
- 11) Shiue, W. K. and Bain, L. J., "Experiment Size and Power Computations for Two Sample Poisson Tests," *Applied Statist.*, 31, 130-134, 1982.

- 12) Sichel, H. S., "On a Significance Test for Two Poisson Variables." *Applied Statist.*, 22, 50-58, 1973.
- 13) Tweedie, M. C. K., "The Estimation of Parameters from Sequentially Sampled Data on a Discrete Distribution," *JRSS, Ser. B.*, 14, 238-245, 1952.

부 록

표 A-1. S1(·; M, M, 0, 0)의 기각역
기각역 { r : N > C1 }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M	C 1
1	0.01	5	0
2	0.02	5	0
3	0.05	8	1
4	0.10	11	2
5	0.20	18	5
6	0.30	28	9
7	0.40	44	16
8	0.50	78	31
9	0.60	139	59

표 A-1.1 S1(·; M, M, 0, 0)의 기각역
기각역 { r ≤ d₁ 또는 N > d₁ }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M	d ₁	d ₁ ²
1	1.5	263	115	148
2	2.0	92	36	56
3	2.5	56	20	36
4	3.0	42	14	28
5	4.0	28	8	20
6	5.0	23	6	17
7	6.0	17	4	13
8	7.0	17	4	13
9	8.0	15	3	12
10	10.0	12	2	10
11	15.0	12	2	10

표 A-2. S2(·; 0, ∞, N1, 0)의 기각역
기각역 { r : N > C2 }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	N 1	C 2
1	0.01	5	0
2	0.02	5	0
3	0.05	7	1
4	0.10	9	2
5	0.20	13	5
6	0.30	19	9
7	0.40	28	16
8	0.50	47	31
9	0.60	80	59

표 A-2.2 S2(·; 0, ∞, N1, 0)의 기각역
기각역 { r : N ≤ d₁ 또는 M > d₂ }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	N 1 = N 2	d 3
1	0.01	6	15
2	0.05	6	15
3	0.10	6	15
4	0.15	6	15
5	0.20	8	18
6	0.25	10	24
7	0.30	12	36
8	0.40	21	56
9	0.50	37	74
10	0.60	56	74
11	2.00	56	55
12	2.50	36	45
13	3.00	28	35
14	4.00	20	35
15	5.00	17	31
16	6.00	13	25
17	7.00	13	25
18	8.00	12	24
19	10.00	10	21
20	15.00	10	21

표 A-3. S3(\cdot ; 0, ∞ , N1, N2)의 기각역
기각역 { $r : N > C 3$ }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M	C 2
1	0.01	5	12
2	0.05	5	12
3	0.10	5	12
4	0.15	5	12
5	0.20	7	15
6	0.25	9	18
7	0.30	10	19
8	0.40	18	30
9	0.50	32	47
10	0.60	57	73
11	2.00	47	65
12	2.50	28	42
13	3.00	22	35
14	4.00	16	27
15	5.00	13	23
16	6.00	12	22
17	7.00	10	19
18	8.00	10	19
19	10.00	9	18
20	15.00	7	15

표 A-3.3 S3(\cdot ; 0, ∞ , N1, N2)의 기각역
기각역 { $r : N \leq d_1^1$ 또는 $M > d_2^2$ }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	N 1	d_1^1	d_2^2
1	0.01	6	0	15
2	0.05	6	0	15
3	0.10	6	0	15
4	0.15	6	0	15
5	0.20	8	1	18
6	0.25	10	2	21
7	0.30	12	3	24
8	0.40	21	9	36
9	0.50	37	21	56
10	0.60	56	36	74
11	2.00	56	36	74
12	2.50	36	20	55
13	3.00	28	14	45
14	4.00	20	8	35
15	5.00	17	6	31
16	6.00	13	4	25
17	7.00	13	4	25
18	8.00	12	3	24
19	10.00	10	2	21
20	15.00	10	2	21

표 A-4. S4(\cdot ; M1, ∞ , N1, 0)의 기각역
기각역 { $r : N > C 4$ }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M 1	N 1	C 4
1	0.01	5	4	0
2	0.02	5	4	0
3	0.05	8	7	1
4	0.10	11	9	2
5	0.20	18	13	5
6	0.30	28	19	9
7	0.40	44	28	16
8	0.50	78	47	31
9	0.60	139	80	59

표 A-5. S5(\cdot ; 0, M2, N1, 0)의 기각역
기각역 { $r : N > C 5$ }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M 2	N 1	C 5
1	0.01	6	5	0
2	0.02	6	5	0
3	0.05	8	7	1
4	0.10	11	9	2
5	0.20	18	13	5
6	0.30	28	19	9
7	0.40	44	28	16
8	0.50	78	47	31
9	0.60	139	80	53

표 A-6. S6(\cdot ; M1, M2, N1, 0)의 기각역
기각역 { $r : N > C 6$ }

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M 1	M 2	N 1	C 6
1	0.01	5	6	4	0
2	0.02	5	6	4	0
3	0.05	8	9	7	1
4	0.10	11	12	9	2
5	0.20	18	19	13	5
6	0.30	28	29	19	9
7	0.40	44	45	28	16
8	0.50	78	79	47	31
9	0.60	139	140	80	59

표 A-7. S7(\cdot ; M1, ∞ , N1, N2)의 기각역

기각역 $\{r : N > C 7\}$

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M 1	M 2	C 7
1	0.01	5	1	280
2	0.02	5	1	187
3	0.05	8	2	26
4	0.10	8	2	21
5	0.20	8	2	22
6	0.30	10	3	19
7	0.40	10	3	36
8	0.50	17	5	49
9	0.60	29	12	64

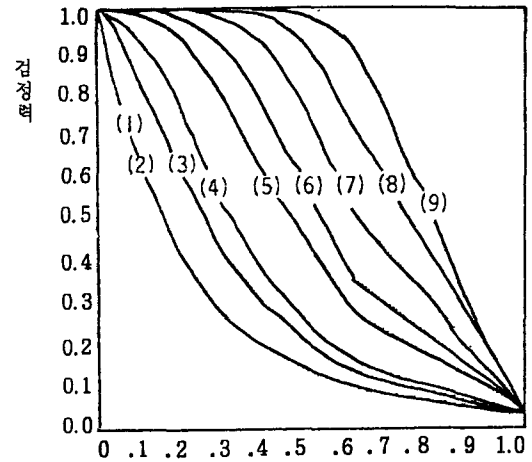


그림 A-1. S1의 검정력 GRAPH

표 A-8. S8(\cdot ; 0, M2, N1, N2)의 기각역

기각역 $\{r : N > C 8\}$

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M 2	N1=N2	C 8
1	0.01	5	1	4
2	0.02	5	1	4
3	0.05	8	1	7
4	0.10	9	1	7
5	0.20	15	3	10
6	0.30	25	7	16
7	0.40	41	16	23
8	0.50	56	27	28
9	0.60	79	32	36

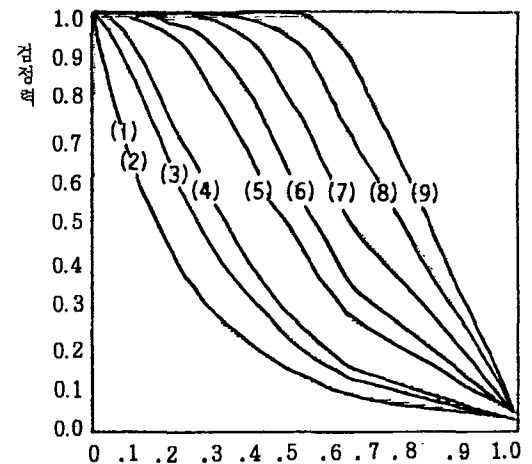


그림 A-2. S2의 검정력 GRAPH

표 A-9. S9(\cdot ; M1, M2, N1, N2)의 기각역

기각역 $\{r : N > C 9\}$

($\alpha = 0.05, \beta = 0.10$)

샘플링계획	ρ	M 1	M 2	N1=N2	C 9
1	0.01	4	5	1	4
2	0.02	4	5	1	4
3	0.05	7	8	1	6
4	0.10	8	9	1	6
5	0.20	9	15	3	11
6	0.30	19	25	7	18
7	0.40	34	51	14	27
8	0.50	62	94	29	65
9	0.60	84	136	41	95

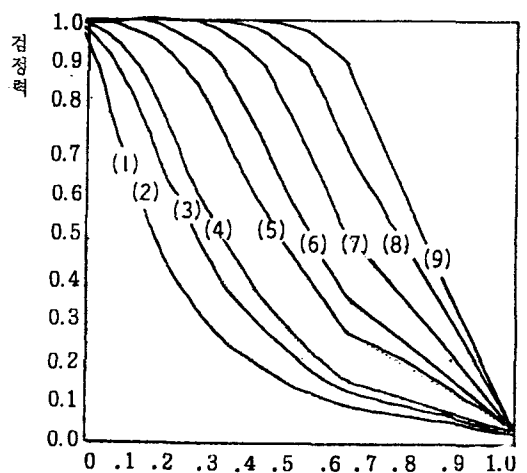


그림 A-3. S4의 검정력 GRAPH

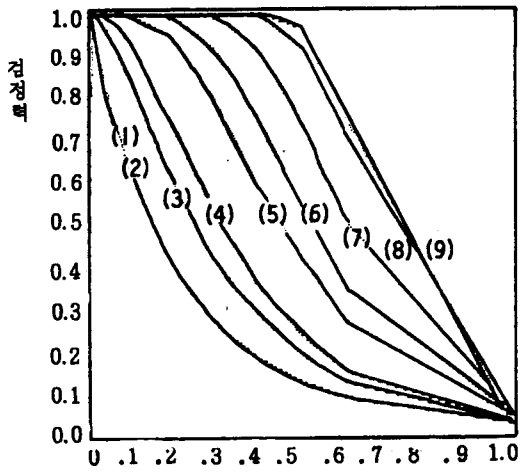


그림 A-4. S5의 검정력 GRAPH

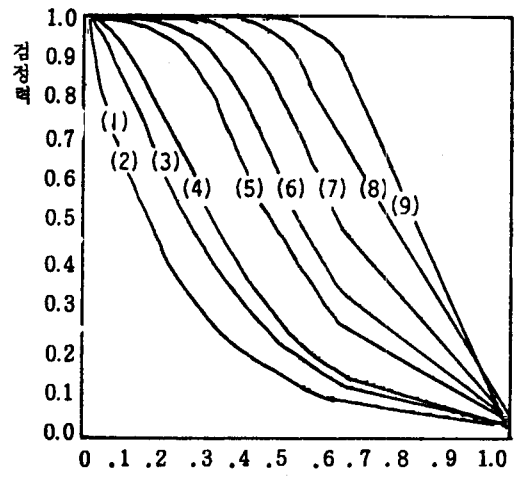


그림 A-5. S6의 검정력 GRAPH