

ILP를 위한 타원법과 그 응용

The Ellipsoid Method for ILP Problem and its Application

金 峻 弘*

Abstract

The subject in this paper is to apply the ellipsoid method proposed by khachiyan[1] to ILP systems.

For solving ILP problems we will present a algorithm using the modified formular of Pallaschke[2]. Additionally, computational results indicate that our algorithm is subject to the numerical stability.

1. 서 론

정수계획법(Integer Linear Programming=ILP)은 기업이나 행정처의 의사결정에 있어서 중요한 역할을 하고 뿐만아니라 최적조합문제의 새로운 algorithm의 이론적 개발에서 한 시금석을 차지하고 있다. ILP를 생각하기 전에 정수조건이 없는 문제인 선형계획문제(Linear Programming=LP)를 생각해 보자. LP를 풀기 위한 simplex법은 지금까지 커다란 발전을 거듭해 왔음에도 불구하고 이 문제는 최악의 경우에는 다면체의 모든 꼭지점들을 전부 추적하여 최적해를 구해야 하므로 여전히 이 해법으로는 LP가 polynom계산시간에 속하는 문제인지 non-polynom에 속하는 문제인지 정해지지 않고 있다.

L. G. Khachiyan[1]는 타원법을 이용하여 LP문제를 polynom에 속하는 문제라는 것을 증명하였다. 그의 방법으로는 LP문제를 polynom 시간내에 풀 수 있음에도 불구하고, 해를 구하기 위해 타원을 줄여가는 과정에서 너무나 많은 계산단계를 요구하고 또한 초기의 타원이 불필요하게 크므로 이론적인 해법으로 남아 있다. LP문제와 함께 ILP문제는 system에서 변수들이 정수값을 요구하므로 LP의 model을 위한 해법으로는 해결되지 않기 때문에 OR분야에서는 언제나 그의 효율적 해법의 개발에 커다란 관심사로 남아 있다.

이 논문에서는 상기의 타원법의 단점을 보완하여 한단계에서 다음단계로 넘어가는데 더 축소된 타원형을 만들기 위해 Pallaschke[2]가 제안한 평행 절단 타원법을 이용하여 ILP문제를 푸는 algorithm을 개발하는데 그 주안점을 두었다. 이에 들어가기 앞서 다음 장에서는 간단히 평행 절단 타원법의 개념에 대해서 설명하고 3장에서는 ILP를 위한 algorithm을 언급한다. 그리고 4장에서는 그 algorithm을 이용한 실험 결과에 대해 분석해 보기로 한다.

2. 평행절단 타원법

다음과 같은 LP문제를 생각하자.

$$\max \{ \langle C, X \rangle \mid X \in P(A, b) \},$$

여기서

$$P(A, b) = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, X \rangle \leq b_i, i \in \mathbb{R}^m \}$$

는 공집합이 아니고 compact 집합에 속한다 하자.

*水原大學 産業工學科 助教授

접수일 : 1988. 5. 16.

$X_k \in P(A, b)$ 를 포함하는 k 번째 타원형 $E(X_k, B_k) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid (\langle X - X_k, B_k^{-1}(X - X_k) \rangle) \leq 1, B_k \text{는 sym. pos. def. Matrix}\}$ 가 주어졌다 하자.

그리고, 이와 함께 두개의 초기하 평면을 생각하자: 하나는 타원형 $E(X_k, B_k)$ 의 중심점 X_k 를 만족하지 않는 평면 $S_i = \langle a_i, X \rangle - b_i$ 이고 다른 하나는 중심점 X_k 를 만족하는 평면 $S_j = -\langle a_j, X \rangle + b_j$ 이다. 설명을 편하게 하기 위해 다음과 같은 지수(指數)집합을 정의한다.

지수 $I = (1, \dots, i)$ 는 중심점 X_k 를 만족하지 않는 지수집합이라 하고

지수 $J = (1, \dots, j)$ 는 중심점 X_k 를 만족하는 지수집합이라 하자.

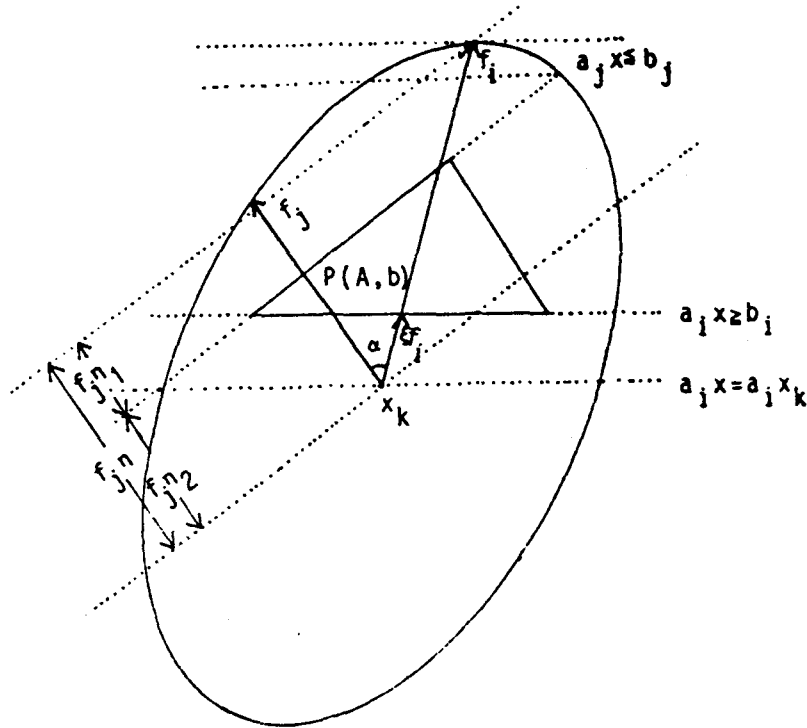


그림 1

그림 1에서 상한을 $\bar{Z} = \langle a_i, X_k \rangle + \sqrt{\langle a_i, B_k a_i \rangle}$ 라 하고 하한을 $Z_k = \langle a_i, X_k \rangle$ 라 한다면, 두 초기하 평면 S_i 와 S_j , 그리고 볼록 다면체 집합 $P(A, b)$ 는 조건 $\bar{Z} \leq \langle a_i, X \rangle \mid X \in P(A, b) \cup S_i \cup S_j \leq Z$ 를 만족한다.

우리는 여기서 [1]에서 언급된 $(k+1)$ 번째 타원형

$$E(X_{k+1}, B_{k+1}) \in \{X \in \mathbb{R}^n, X_k \in \mathbb{R}^n \mid E(X_k, B_k) \cup \{ \langle a_i, X \rangle \geq \langle C, X_k \rangle \} \cup \{ \langle a_i, X \rangle \leq \langle C, X_k \rangle - \sqrt{\langle C, B_k C \rangle} \}$$

대신 더 빨리 수렴하는 $(k+1)$ 번째 타원형

$$E(X_{k+1}, B_{k+1}) \in \{X \in \mathbb{R}^n, X_k \in \mathbb{R}^n \mid E(X_k, B_k) \cup S_i \cup S_j\}$$

를 생각한다.

이를 위해 우리는 의사(擬似) 변형함수 $T = \{X \in \mathbb{R}^n, Z \in \mathbb{R}^n \mid T(X) = Z, \|Z\| \leq 1\}$ 의 개념을 도입하고 그에 관련된 변수를 정의한다.

보조정리 1

한 타원형 $E(X_k, B_k)$ 가 있다 하자. 여기서

$$E(X_k, B_k) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle (X + \beta_1 e_1), B_k^{-1}(\beta^2(I - \text{diag}(\delta, 0, \dots, 0)))^{-1} (X + \beta_1 e_1) \rangle \leq 1, \text{ 여기서 } \delta = 1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}, e_1 \text{는 첫번째 단위 vector}\}$$

그러면 $E(X_k, B_k)$ 에 의사변형함수 T 를 취하면 다음과 같이 된다.

$$T(E) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle (X - X_k + \beta_1 Q e_1), (\beta^2(B_k^{-1} - \delta Q^{-1} e_1 \otimes Q^{-1} e_1))^{-1} (X - X_k + \beta_1 Q e_1) \rangle \leq 1\}, \text{ 여기서 } B_k = \langle Q A, A Q \rangle$$

증명

$$\begin{aligned} T(E) &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle (T^{-1}(X) + \beta_1 e_1), (\beta^2(I - \text{diag}(\delta, 0, \dots, 0)))^{-1} (T^{-1}(X) + \beta_1 e_1) \rangle \leq 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle ((X - X_k) A Q^{-1} + \beta_1 e_1), (\beta^2(I - \text{diag}(\delta, 0, \dots, 0)))^{-1} (\langle (X - X_k), A Q^{-1} \rangle + \beta_1 e_1) \rangle \leq 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle A Q^{-1}(X - X_k + \beta_1 \frac{\langle Q, Q a \rangle}{\sqrt{\langle a Q, Q a \rangle}}), (\beta^2(I - \text{diag}(\delta, 0, \dots, 0)))^{-1} A Q^{-1}(X - X_k + \beta_1 \frac{\langle Q, Q a \rangle}{\sqrt{\langle a Q, Q a \rangle}}) \rangle \leq 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid (X - X_k + \beta_1 \frac{Q a}{\|Q a\|}) B_k^{-1} (\beta^2(I - \text{diag}(\delta, 0, \dots, 0)))^{-1} (X - X_k + \beta_1 \frac{\langle Q, Q a \rangle}{\|Q a\|}) \leq 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid (X - X_k + \beta_1 Q e_1) (\beta^2(B_k^{-1} - \delta Q^{-1} e_1 \otimes Q^{-1} e_1))^{-1} (X - X_k + \beta_1 Q e_1) \leq 1\} \end{aligned}$$

이 보조정리를 이용해서 초기하 평면 S_i 에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} S_i^0 &= \langle Q a_i, X \rangle - b_i, \quad i \in I \\ d_i &= \sqrt{\langle a_i, B_k a_i \rangle} = \|Q_k a_i\|, \quad i \in I \\ e_i &= \frac{d_i}{\|d_i\|} = \frac{\langle Q_k, a_i \rangle}{\|Q_k a_i\|}, \quad i \in I \\ f_i &= \langle Q_k, e_i \rangle = \frac{\langle Q_k, d_i \rangle}{\|d_i\|}, \quad i \in I \\ \xi &= \max_{i \in I} \xi_i = \max_{i \in I} \frac{-S_i^0}{f_i} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

ξ 에 해당하는 지수를 g 라 하자. e_g 는 g 번째 단위 vector이다.

중심점을 만족하는 초기하평면 S_j 에 대해서는

$$\begin{aligned} S_j^0 &= b_j - \langle Q a_j, X \rangle, \quad j \in J \\ d_j &= \sqrt{\langle a_j, B_k a_j \rangle} = \|a_k a_j\|, \quad j \in J \\ e_j &= \frac{d_j}{\|d_j\|}, \quad j \in J \\ f_j &= \langle Q_k, e_j \rangle, \quad j \in J \end{aligned}$$

$$\eta = \min_{j \in J} \eta_j, \text{ 여기서 } \eta_j = \min_{j \in J} \frac{S_j^0}{f_j}$$

η 의 값을 결정한다면, 그림 1에서 $\eta_j = \eta_1 + \eta_2$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{1 - b_j^2} \sin \alpha \\ \eta_2 &= b_j \cos \alpha \end{aligned}$$

그림 1에서 우리는 다음과 같은 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{e_j}{e_i} = \frac{\langle Q_k, e_j \rangle}{\langle Q_k, e_i \rangle} = \frac{f_j}{f_i} \\ \sin \alpha &= \sqrt{1 - \frac{f_j^2}{f_i^2}} \end{aligned}$$

$$b_j = \frac{S_j^0}{f_i}$$

여기서 우리는 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \eta &= \min_{j \in J} \left\{ \sqrt{1-b_j^2}, \sqrt{1-\frac{f_j^2}{f_i^2} + b_j \frac{f_j}{f_i}} \right\} \\ &= \min_{j \in J} \left\{ \sqrt{1-\frac{S_j^{02}}{f_i^2}}, \sqrt{1-\frac{f_j^2}{f_i^2} + \frac{S_j^0}{f_i} \frac{f_j}{f_i}} \right\} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

식 (1)과 (2)에서 영역 $S = \{X \in E(X_k, B_k) \mid \underline{z} \leq f_i, \xi \leq \langle a_k, (X_k - X) \rangle \leq f_i, \eta \leq Z\}$ 은 볼록다각형 $P(A, b)$ 를 포함한다.

이들 결과에서 우리는 다음 정리를 얻는다.

정리 1

$E(X_{k+1}, B_{k+1}) \in \{X_k \in \mathbb{R}^n \mid E(X_k, B_k)\} \cup \{X \in \mathbb{R}^n \mid S_i = \langle a_i, X \rangle - b_i\} \cup \{X \in \mathbb{R}^n \mid S_j = b_j - \langle a_j, X \rangle\}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k - \gamma f_i \\ B_{k+1} &= \lambda (B_k - \mu f_i \otimes f_i) \end{aligned}$$

여기서

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2-1} \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right) + \sqrt{\frac{(n^2 - \xi^2)^2}{4} + \frac{(1-n^2)(1-\xi^2)}{n^2}}$$

$$\mu = 1 - \frac{(\eta - \xi)^2}{\eta^2 + \xi^2 + 2\left(\frac{n+1}{n}\lambda - 1\right)}$$

$$\nu = \xi + \sqrt{(\lambda - 1 + \xi^2)(1 - \mu)}$$

증명

의사변형 함수 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 과 타원형 $E(0, Q_k) = \{X \in \mathbb{R}^n, Z \in \mathbb{R}^n \mid X = \langle Q, Z \rangle, \|Z\| \leq 1, Q$ 는 $m \times n$ regular matrix가 주어졌다 하자. 타원형 $E(0, Q_k)$ 는 일반적으로 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\lambda} + \frac{(X_1 - b)^2}{\lambda(1-\mu)} = 1 \dots\dots\dots (3)$$

$X_1 = \xi$ 에 대해 식 (3)은

$$\frac{(1-\xi^2)}{\lambda} + \frac{(\xi - b)^2}{\lambda(1-\mu)} = 1 \dots\dots\dots (4)$$

$X_1 = \eta$ 에 대해 식 (3)은

$$\frac{(1-\eta^2)}{\lambda} + \frac{(\eta - b)^2}{\lambda(1-\mu)} = 1 \dots\dots\dots (5)$$

(4)와 (5)에서

$$b = \frac{\xi + \eta}{2} \mu \dots\dots\dots (6)$$

가 된다.

(6)을 식(5)에 대입하면

$$(1-\eta^2)(1-\mu) + \left(\eta - \frac{\xi + \eta}{2} \mu\right)^2 = (1-\mu)\lambda \dots\dots\dots (7)$$

$f_i = 1 - \mu$ 를 (7)에 대입하면

$$(\xi + \eta)^2 f_i^2 - (4(\lambda - 1) + 2(\eta^2 + \xi^2))f_i + (\eta - \xi)^2 = 0 \dots\dots\dots (8)$$

식 (8)의 해는

$$f_i = 2(\lambda - 1) + (\eta^2 + \xi^2) - 2\sqrt{(\lambda - 1)^2 + (\eta^2 + \xi^2)(\lambda - 1) + \eta^2 \xi^2}$$

n차원 문제에 대해서는 $f_i = \lambda^n f_1$ 이 된다.

함수 f_1 의 각 변수 λ, μ, γ 의 편미분에 값 0을 취하면 그때의 극치가 구해진다.

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \sqrt{\frac{(\eta^2 + \xi^2)^2}{4} + \frac{(1 - \eta^2)(1 - \xi^2)}{n^2}} \right)$$

$$\mu = 1 - \frac{(\eta - \xi)^2}{\eta^2 + \xi^2 + 2\left(\frac{n+1}{n} \lambda - 1\right)}$$

$$\nu = \xi + \sqrt{(\lambda - 1 + \xi^2)(1 - \mu)}$$

정리 2

$$\text{vol}\left(\frac{E_{k+1}}{E_k}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right) (1 - \xi)(1 - \xi^2)^{n-1/2}$$

증명

$0 \leq \xi \leq \eta = 1$ 에 대해

$$\begin{aligned} \text{vol}\left(\frac{E_1}{E_0}\right) &\leq \alpha \beta^{n-1} \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n-1/2} (1 - \xi)(1 - \xi^2)^{n-1/2} \\ &\leq \exp\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) (1 - \xi)(1 - \xi^2)^{n-1/2} \end{aligned}$$

타원법에 의해 얻어지는 해집합은 볼록다면체 집합을 비교적 납작하게 변형시켜가고 그것을 둘러싸고 있는 타원형 집합들은 그에 의해 마찬가지로 아주 길쭉한 모양을 갖게 된다. 이러한 타원형의 변형에 직접적으로 영향을 미치지 않는 초기하평면은 퇴화한다. 이 퇴화하는 초기하평면으로 인해 계산단계는 더 축소되어질 수 있다. (algorithm 단계 4 참조)

3. ILP를 위한 제안식 algorithm

3.1 방법 α

다음과 같은 ILP가 주어졌다 하자.

$$\begin{aligned} \max \langle C, X \rangle \\ \text{제한조건 } \langle a_i, X \rangle \leq b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad X \in Z^n \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

타원형 $E(X_0, B)$ 과 (9)에서 주어진 목적함수를 다음과 같이 2차계획법으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \max \langle C, X \rangle \\ \text{제한식 } \langle (X - X_0), B^{-1}(X - X_0) \rangle \leq 1 \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

Lagrange 함수

$$L(X, \lambda) = \langle C, X \rangle - \lambda (\langle X, BX \rangle - 1)$$

λ 는 Lagrange 승수로 타원형에 대해 목적함수를 최대화하는 해를 구하면

$$\begin{aligned} L(X, \lambda) &= \langle C, X \rangle - \lambda \langle (X - X_0), B^{-1}(X - X_0) \rangle - 1 \\ &= \langle C, X \rangle - \lambda \{ \langle X, B^{-1}X \rangle - 2\langle X, B^{-1}X_0 \rangle + \langle X_0, B^{-1}X_0 \rangle \} - 1 \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

20 金 梭 弘

최대 또는 최소값을 위해 (11)을 미분하고 0으로 두면

$$dL(h) = \langle c, h \rangle - \lambda \{ \langle h, B^{-1}X \rangle + \langle X, B^{-1}h \rangle - 2\langle h, B^{-1}X_0 \rangle \} = 0$$

여기서 h는 임의의 점이다.

$$\Rightarrow \langle c, h \rangle = \lambda \{ \langle (2B^{-1}X - 2B^{-1}X_0), h \rangle \}$$

$$\Rightarrow X - X_0 = B \frac{C}{2\lambda} \dots\dots\dots (12)$$

(12)를 이용하면 우리는 (10) 식에서

$$\langle B(\frac{C}{2\lambda}), \frac{C}{2\lambda} \rangle = 1$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\langle BC, C \rangle}{2}} \dots\dots\dots (13)$$

따라서

$$X = X_0 \pm B \frac{C}{\sqrt{\langle BC, C \rangle}}$$

타원형 E(X₀, B)를 접하는 두개의 상, 하점이 존재한다. 즉

$$X_+ = X_0 + B \frac{C}{\sqrt{\langle BC, C \rangle}}$$

$$X_- = X_0 - B \frac{C}{\sqrt{\langle BC, C \rangle}} \dots\dots\dots (14)$$

ξ가 algorithm의 초기에는 비교적 큰 값을 갖기 때문에 타원형은 계산의 초기단계에 비교적 빨리 감소된다. 이 방법에서 우리는 타원형법의 도움으로 목적함수의 값을 극대화하는 볼록다면체의 꼭지점을 구하는 것이 아니라 대략 10개 정도의 가능해 집합을 싸고 있는 최소타원형을 구한다.

이것은 퇴화초기하 평면이 더이상 생기지 않는 단계에서 가능하다.

타원의 중심점을 원점으로 하는 타원형의 좌표축에 각 정수점을 투사시켜 조건식과 타원형을 만족하는 정수 점들을 구별해 낼 수 있다. 상기에서 제안한 점축점 X₊ 또는 X₋에서 목적함수를 최대로 하는 해를 구하고 cholsky 분해법에 의해 한 정수점을 갖는다. 따라서 이 정수점을 만족하는 더 축소된 타원형을 얻어낼 수 있고 이 타원형에서 제외되는 점을 소개시킨다. 이 단계는 목적함수를 만족하는 유일한 점이 얻어질 때까지 계속 된다.

3.2 방법 β

이 방법은 분지한계법처럼 작용하지만 분지규칙은 다르게 작용한다.

방법 α에서 언급된 최소최적에서 우리는 목적함수의 상한치와 하한치를 얻어낼 수 있다. 타원의 체적은 작기 때문에 욕 10개 정도 타원에 있는 정수점들 모두 찾아내진다. 이를 위해 Matrix B_k에 cholsky 분해법은 적용하고 그래서 타원형에 있는 정수점을 결정한다. 타원형에 있는 정수점을 결정하기 위해 X_i=1, …, n 좌표축에 있는 정수점을 타원형축에 투사시킨다.

algorithm에서 포함하고 있는 타원형이 정수점을 갖고 있는지 않는지는 그를 통해 검토한다. 이는 꽤 간단하다. 가능해의 여집합 영역이 정수점을 갖고 있지 않는경우 즉 여집합의 문제가 불가능해도 한정되는 경우 줄어 진 해 영역으로 위 단계를 계속해 나간다. 만약 목적함수의 값이 줄어들고 그것이 algorithm을 가속시켜 나간다면 지장이 없이 계속 진행되나간다.

이 논문에서는 방법 β에 대해 다음 algorithm을 제시한다.

algorithm

ILP 문제가 다음과 같이 주어졌다 하자.

$$\max(\langle a_{m+1}, X \rangle \mid X \in P(A, b)),$$

여기서

$$P(A, b) = \{X \in \mathbb{Z}_+^n \mid \langle a_i, X \rangle \leq b_i, i \in \{1, \dots, m\}\}$$

단계 1. 초기 타원형 $E(X_0, B_0)$ 을 계산한다.

$$X_0 = \frac{1}{2}X$$

$$B_0 = n \text{ diag}((X)^2), \text{ 여기서 } X = (X_1, \dots, X_n)$$

는 반경 vector이다.

단계 2.

$$d_i = \|Q_k Q_i\|, i \in M = \{1, \dots, m\}$$

$$S_i = \langle a_i, X \rangle - b_i$$

$$\xi = \max_{i \in M} -\frac{S_i}{d_i}$$

우리는 여기서 최대값을 갖는 지수를 g 라 하자.

만약 $\xi < 0$ 이라면, 단계 6으로 가라.

만약 $\xi > 1$ 이라면 제한식 $P(A, b)$ 는 불가능해 집합이다. 정지.

단계 3.

$$fg = Q_k e_g$$

$$\eta = \min_j \frac{S_j}{d_j}$$

단계 4. 지수 집합 $L \in I \cup J$ 라 하자. 여기서

$$I = \{i \mid -S_i \leq f_i\}$$

$$J = \{j \mid \max(0, S_j) < f_j\} \text{이다.}$$

그리고 지수 집합

$$W = \{h \in I, \dots, i \mid -\frac{S_h}{f_h} > 1\} \cup \{v \in L \mid \eta_v < \xi\}$$

라 하자.

만약 $\langle a_i, X \rangle \leq b_i, i \in W$ 라면 퇴화시킨다.

이때 퇴화평면이 없다면 이때의 타원형은 최소타원형이고 (14)에 의해 해영역의 상한과 하한을 결정한다.

단계 5.

정리 2에 따라 다음 단계의 타원형 $E(X_{k+1}, B_{k+1})$ 을 계산하고 단계 2로 간다.

단계 6.

가능해 X_k 를 구하고 $d_{m+1} = \| \langle a_{m+1}, Q_k \rangle \|$ 과 둔다.

단계 7.

$$f_{m+1} = \langle Q_k, e_{m+1} \rangle$$

$$f_i = \langle Q_k, e_i \rangle, i \in M \cup \{m+1\}$$

지수 집합 $L = \{i \in M \mid f_i < a_i\}$ 라 두자. 그러면

$$\xi = \min_{i \in L} \frac{S_i}{f_i}$$

와 η 를 계산한다.

단계 8.

만약 $\eta - \xi < \epsilon$ (아주 작은 값)이라면 X_k 는 ILP의 relaxation에 대한 가능해이다.

22 金 俊 弘

그렇지 않으면, $b_{m+1} = \langle a_{m+1}, X_k \rangle + \frac{d_{m+1}}{3}$ 이라 두고 단계 5로 가라.

단계 9.

$X_k \in Z^n$ 이라면, X_k 는 ILP의 최적해

$X_k \in Z^n$ 이라면, 임의의 실수 $X_f \in X_k$ 에 대해서

$\langle a_i, (X_k \in f, |X_f|) \rangle \leq b_i$ 라 두고 단계 2로 가라.

$\langle a_i, (X_k \in f, |X_f| + 1) \rangle > b_i$ 는 해공간이 없으므로 분지에서 실행불가능

일반적으로 ξ 의 값은 algorithm의 초기에 0.3에서 0.5로 꽤 큰값을 갖고 마지막에는 0.03으로 거의 0에 가깝다. 이것은 계산의 초기에서 khachiyan [1]이 제시한 방법보다 훨씬 더 빨리 감소된다는 것을 의미하고 있다. η 의 값은 수렴의 속도에 크게 영향을 미치지 않지만 퇴화평면을 결정하는데 매우 도움을 준다. 여기서 타원형을 평평하게 되지만 Matrix B에 대한 고위치(Eigen value)의 비율은 제어될 수 있다. 이 방법의 중요한 성질은 k-1번째 단계에서의 Matrix, 즉

$$B_{k+1} = \beta^2(B_k - \delta Z \otimes Z) \dots\dots\dots (15)$$

에서 값 β^2 와 δ 는 해가능영역의 체적에 종속이다.

수치해석적 안정성에 대해서는 다음과 같은 성질이 평가될 수 있다.

$$\beta^{(k)} \leq \alpha^{(k)} \leq \dots \leq \alpha^{(k)}$$

를 Matrix B_k 의 고유치라 하자.

그러면 다음 정리를 갖는다.

정리

이 Matrix들 $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ 이 공식 (15)에 따라 계산된다면 다음 관계를 얻는다.

$$\beta^{(k+1)} \leq \beta^2 \beta^{(k)} \leq \alpha^{(k+1)} \leq \beta^2 \alpha^{(k)} \leq \dots \leq \alpha^{(k+1)} \leq \beta^2 \alpha^{(k)}, k \in \mathbb{N}$$

4. 실험결과

방법 β 에 의한 algorithm을 23개의 제한식과 48개의 변수를 갖는 ILP문제에 적용시켜 본 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

이 방법은 작고 간단한 분지를 형성하고 있다. 실행불가능 영역에 의해 타원과 해집합은 줄어들면서 언제나 제한식을 만족하는 블록다면체 내부에 있는 한변수가 정수인 점을 추적해 나가는 것을 알 수 있다.

약 50개의 변수와 30개의 제한식을 갖는 정수치 문제에서는 Siemens 7880으로 30~40 CPU분이 소요되는 결과를 얻을 수 있었다.

References

[1] L. G. Khachiyan, Apolynomial algorithm in linear programming, *Sov. Math.* 20(1979), pp. 191-194.
 [2] D. Pallaschke, A note on the Khachiyan update formular, report of Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn(1980).

