工業經營學會誌 第 11 卷 第 17 輯 1988 年 6 月

제품인도기간이 주문량에 의존하여 변화하는 (s,S) 재고모형

(s, S) Inventory Models with Ordering Quantity Dependent Stochastic Lead Times

金 弘 培*
梁 聖 敏**

Abstract

A (s, S) inventory policy is studied for a continuous inventory model in which lead times are dependent on the ordering quantity. The model assumes that at most one order is outstanding and demands occur in a compound poisson process. The steady-state probability distributions of the inventory levels are derived so as to determine the long-run expected average cost. And the computational procedure is presented.

1. 서 론

제품을 생산하는 기업에서 재고는 중요한 기능의 하나로 생산성에 큰 영향을 미치고 있다. 이러한 재고의 효율적인 관리를 위한 연구가 경제적 주문량모형이 제시된 후 많이 이루어졌으며 확률적 재고모형에 대해서도 확률과정론을 이용한 연구가 되어지고 있다. 확률적 재고모형 중에서도 제품인도기간을 고려한 연구는 제품인도기간이 일정한 경우와 확률적으로 변화하는 경우로 나누어 분석되어 왔다. 그러나 이들 연구들은 대부분 제품인도기간과 주문량과의 관계를 무시하고 있으며 Gross, Harris and Lechner[3]와 Gross and Harris[2] 등이 주문회수와의 관계에 관해서는 취급하였다.

본 논문에서는 제품인도기간에 관한 실제성을 부여하기 위해 제품인도기간이 주문량에 따라 확률적으로 변화되는 확률적 재고모형에 관해서 Cinlar[1]의 Markov Renewal Theory를 이용하여 안정상태의 확률을 유도하고 재고비용을 고려한 최적주문정책 수립절차에 대해서 살펴보겠다.

제품에 대한 수요는 도착간격시간의 분포함수 $A(t)=1-e^{-\lambda t}$, $t>0$인 지수분포이고, 각 수요량의 분포는 $b(k)=Pr$[수요의 량$=k$], $k=1, 2, \cdots$인 Discrete Compound Poisson Process를 따른다.

제품인도기간은 주문량이 주어진 상수 q이하이면 확률변수 L_1이고, 주문량이 상수 q보다 크면 확률변수 L_2이다. 이들 확률변수 L_1, $L_2(t)$라 가정한다. 또한 제품인도기간이 확률변수이므로 수리적분석의 복잡성을 피하기 위해 제품인도는 주문한 순서대로 도착된다고 가정한다.

본 논문에서 다루는 재고모형의 결정규칙은 현재고수준이 s이하이면 주문량(=S−현재고수준)을 주문하여 제품인도기간이 경과후 제품이 도착되는 연속조사(s, S)정책이며 주문잔고(Backlog)를 허용한다.

2. Semi-Regenerative Prcess로서의 제고모형

이 절에서는 Cinlar[1]의 Markov Renewal Theory의 결과를 1절에서 설명한 재고모형에 적용하여 분석하고자 한다.

우선 본 논문에서 사용할 기호와 확률변수들의 정의는 아래와 같다.

이 논문은 1987년 문교부 학술연구조성비의 지원에 의해 연구되었음.

*경성대학교(구 부산산업대학교) 산업공학과 조교수
**경성대학교(구 부산산업대학교) 산업공학과 조교수

접수일 : 1988. 5. 16.

C_0 : 고정 주문비(원/회)
C_1 : 제품 단위당 재고유지비(원/단위시간)
C_2 : 제품 단위당 주문잔고비(원/단위시간)
$E=\{S, S-1, \cdots, s, \cdots, 0, -1, -2\}$
Z_t : 시점 $t\geq 0$에서의 재고수준(Inventory Level)을 나타내는 확률변수로서 E상의 값을 가진다.
T_n : 주문시점 혹은 제품인도시점을 나타내는 확률변수($T_0=0$)
X_n : 시점 T에서의 재고수준을 나타내는 확률 변수, 즉 $X_n=Z_{T_n}$

Lemma 1. 확률과정$(X, T)=\{X_n, T_n : n=0, 1, 2, \cdots\}$는 상태공간(State Space) E를 갖는 Markov Renewal Process가 된다.

Proof. $D(T_{n+1}-T_n)$을 시간간격(T_n, T_{n+1})동안 수요량을 나타낸다고 하면 X_n과 T_n의 정의에 의해서 $X_n=i>s$이면 T_{n+1}은 다음 주문시점이 되고 $X_{n+1}=X_n-D(T_{n+1}-T_n)$이 된다.

$X=i\leq s$이면 T_{n+1}은 시점 T_n에서 주문한 제품의 인도시점, $X_{n+1}=S-D(T_{n+1}-T_n)$이 된다.

곧 확률변수 X_{n+1}, $T_{n+1}-T_n$은 확률변수 X_n에만 의존함을 알 수 있다.

따라서

$$
\begin{aligned}
&\Pr[X_{n+1}=j,\ T_{n+1}-T_n\leq t \mid X_0, \cdots, X_n; T_0, \cdots, T_n] \\
&\quad =\Pr[X_{n+1}=j,\ T_{n+1}-T_n\leq t \mid X_n]
\end{aligned}
$$

이 된다. 즉 Cinlar[1]의 정의에 의해 확률과정(X, T)는 Markov Renewal Process가 된다.

Lemma1에서 Semi-Regenerative Process의 정의에 따라 다음 Lemma를 얻을 수 있다.

Lemma 2. 확률과정 $Z=\{Z_t : t\geq 0\}$는 Markov Renewal Process(X, T)에 연관된 Semi-Regenerative Process이다.

수요과정이 Discrete Compound Poisson이니 Lemma 1의 확률과정 (X, T)는 time-homogeneous이다. 곧 Semi-Markov Kenerl

$$
\begin{aligned}
Q(i, j, t)&=\Pr[X_{n+1}=j,\ T_{n+1}-T_n\leq t \mid X_n=i] \\
&=\Pr[X_1=j,\ T_1\leq t \mid X_0=i]
\end{aligned}
$$

이 된다. 따라서

$S-s\leq q$인 경우

$$
Q(i,j,t)=\begin{cases}
\Pr[D(T_1)=i-j,\ T_1\leq t], & i>s\geq j \\
\Pr[D(L_1)=S-j,\ L_1\leq t], & s\geq i\geq S-q \\
\Pr[D(L_2)=S-j,\ L_2\leq t], & i<S-q \\
0, & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
\sum_{n=1}^{i-s} A^n(t)B(i,j,n), & i>s\geq j \\
\int_0^t W(S,j,\gamma)\,dG_1(\gamma), & s\geq i\geq S-q \\
\int_0^t W(S,j,\gamma)\,dG_2(\gamma), & i<S-q \\
0, & \text{otherwise}
\end{cases}
\quad \cdots\cdots (1)
$$

$S-s>q$인 경우

$$
Q(i,j,t)=\begin{cases}
\Pr[D(T_1)=i-j,\ T_1\leq t], & i>s\geq j \\
\Pr[D(L_2)=S-j,\ L_2\leq t], & i<s \\
0, & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
\sum_{n=1}^{i-s} A^n(t)B(i,j,n), & i>s\geq j \\
\int_0^t W(S,j,\gamma)\,dG_2(\gamma), & i<s \\
0, & \text{otherwise}
\end{cases}
\quad \cdots\cdots (2)
$$

여기에서

$$B(i,j,n)=\sum_{\kappa=0}^{i-s-1} b^{n-1}(\kappa)\,b(i-j-\kappa)$$

$$W(i,j,t)=\sum_{\ell=0}^{i-j} b^{\ell}(i-j)\,e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\ell}/\ell!$$

$b^n(\cdot)$은 $b(\cdot)$의 n−fold convoulution이다.

3. 재고수준의 안정상태확률 및 비용함수

재고모형이 Markov Renewal Process에 연관된 Semi−Regenerative Process임을 보인 것을 이용하여 재고수준의 안정상태확률을 유도하고자 한다.

Markov Renewal Process의 특성에 의해 확률과정 $X=\{X_n : n=0,1,2,\cdots\}$는 상태공간 E를 갖는 Markov Chain이 되며 변환확률(Transistion Probability) $P_{ij}=Pr[X_{n+1}=j \mid X_n=1]=\lim_{t\to\infty} Q(i,j,t)$가 된다.

따라서 식(1), (2)에 의해 변환확률은

$S-s\le q$인 경우

$$P_{ij}=\begin{cases} \sum_{n=1}^{i-s} B(i,j,n), & i>s\ge j \\ \int_0^{\infty} W(S,j,\gamma)\,dG_1(\gamma), & s\ge i\ge S-q \\ \int_0^{\infty} W(S,j,\gamma)\,dG_2(\gamma), & i<S-q \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (3)$$

$S-s>q$인 경우

$$P_{ij}=\begin{cases} \sum_{n=1}^{i-s} B(i,j,n) & i>s\ge j \\ \int_0^{\infty} W(S,j,\gamma)\,dG_2(\gamma), & i<s \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (4)$$

이 된다.

Lemma 3. Markov Chain X는 irreducible recurrent이다.

Proof. 식(3), (4)의 P_{ij}에서 X가 irreducible 하다는 것은 당연히 받아들일 수 있다. recurrence를 보이기 위해서는 X의 invariant measure가 존재함을 보이면 된다. 이것을 보이기 위해 아래와 같이 π_i를 정의하자.

$S-s<q$인 경우

$$\pi_i=\begin{cases} \alpha_{1i}K_1+\alpha_{2i}K_2, & s<i\le S \\ \beta_{1i}K_1+\beta_{2i}K_2, & i\le s \end{cases} \qquad (5)$$

여기에서

$$\alpha_{1i}=P_{ji}, \qquad S-q\le j\le s$$

$$\alpha_{2i}=P_{ji}, \qquad j<S-q$$

$$\beta_{ni}=\sum_{j=s+1}^{S} P_{ji}+1, \qquad n=1,2$$

$$K_1=\gamma \sum_{i=S-q}^{S} \beta_{2i}$$

$$K_2=\gamma\Big(1-\sum_{i=S-q}^{S} \beta_{1i}\Big)$$

$$\gamma=\Big\{\Big(\sum_{i=s+1}^{S} \alpha_{1i}+1\Big)\sum_{i=S-q}^{S} \alpha_{2i}+\Big(\sum_{i=s+1}^{S} \alpha_{2i}+1\Big)\Big(1-\sum_{i=S-q}^{S} \beta_{1i}\Big)\Big\}^{-1}$$

이다.

$S-s>q$인 경우

$$\pi_i=\begin{cases} \alpha_i K, & s<i\le S \\ \beta_i K, & i\le s \end{cases} \qquad (6)$$

여기에서

$$\alpha_i = P_{ji}, \qquad j \leq s$$

$$\beta_i = \sum_{i=s+1}^{S} P_{ji}\alpha_j + \alpha_i$$

$$K = \left(\sum_{i=s+1}^{S} \alpha_i + 1\right)^{-1}$$

이다.

그러면 식 (5), (6)의 π_i는

$$\pi_i = \sum_{j \in E} P_{ji}\pi_i$$

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1$$

$$\pi_i \geq 0 \qquad \forall i$$

를 만족한다. 따라서 식 (5), (6)의 π_i는 Markov Chain X의 invariant measure이다.

Lemma 4. Markov Renewal Process (X, T)는 aperiodic process이다.

Proof. 수요의 도착간격 분포함수 A(t)가 연속함수(Continuous Function)이니 식 (1), (2)의 Q(i, j, t)는 단계함수(Step Function)가 아닌 것이 존재한다. 그리고 Lemma 3에서 X가 irreducible이니 Cinlar[1]의 Proposition (3.3)에 의해서 (X, T)는 aperiodic process이다.

Lemma 3과 Lemma 4에서 다음 정리를 도출할 수 있다.

Theorem 1. Markov Renewal Process(X, T)는 irreducible aperiodic recurrent이다.

재고수준의 안정상태 확률을 구하기 위해

$K_t(i, j) = Pr[Z^t = j,\ T_1 > ft \mid X_0 = i]$, i, $j \in E$의 조건부 확률을 정의하면

S−s<q인 경우

$$K_t(i,j) = \begin{cases} W(i,j,t), & i \geq j > s \\ [1-G_1(t)]W(i,j,t), & s \leq i \leq S-q,\ i \geq j \\ [1-G_2(t)]W(i,j,t), & S-q > i \geq j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (7)$$

S−s>q인 경우

$$K_t(i,j) = \begin{cases} W(i,j,t), & s \geq i \geq j \\ [1-G_2(t)]W(i,j,t), & i \geq j > s \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (8)$$

초기 상태가 i인 경우 평균주기시간을 m(i)라 하면

$m(i) = E[T_1 \mid X_0 = i] = \int_0^\infty [1 - \sum_{j \in E} Q(i.j.t)]dt$가 된다. 따라서

S−s≤q인 경우

$$m(i) = \begin{cases} R(i-s-1)/\lambda, & i > s \\ \int_0^\infty t\,dG_1(t), & s \geq i \geq S-q \\ \int_0^\infty t\,dG_2(t), & i < S-q \end{cases} \qquad (9)$$

S−s>q인 경우

$$m(i) = \begin{cases} R(i-s-1)/\lambda, & i > s \\ \int_0^\infty t\,dG_2(t), & i \leq s \end{cases} \qquad (10)$$

여기서 R(·)은 b(·)의 Renewal Function으로

$$R(j)=\sum_{\kappa=0}^{j}\{\sum_{n=1}^{\kappa}b^n(\kappa)\},\quad R(0)=1$$

이다.

Theorem 2. 재고수준의 안정상태확률은

$$P^*_j=\lim_{t\to\infty}Pr[Z_t=j \mid X_0]=\frac{1}{\sum_{\kappa\in E}\pi_\kappa m(\kappa)}\sum_{\ell\in E}\pi_\ell \int_0^\infty K_t(i,j)dt,\quad \forall j\in E$$

이다.

Proof. Theorem 1과 $K_t(i,j)$가 적분가능하니 Cinlar[1]의 Proposition(7, 6)의 모든 가정을 만족시킴으로 Cinlar[1]의 결과를 이용하여 증명된다.

앞에서 분석한 재고모형이 주어진 s, S에서 단위시간당 평균 비용 g(s, S)는 Ross[4]와 Schellhaas[6]등의 결과를 Theorem 2에 의해서

$$g(s,S)=C_0\frac{\sum_{K=-\infty}^{S}\pi_\kappa}{\sum_{\kappa\in E}\pi_\kappa m(\kappa)}\,C_1\sum_{j=0}^{S}jP^*_j+C_2\sum_{j=-\infty}^{0}jP^*_j \quad \cdots\cdots (11)$$

임을 쉽게 알 수 있다.

4. 지수제품인도기간

제품인도기간의 분포함수가 $G_1(t)=1-e^{-\mu_1 t}$, $G_2(t)=1-e^{-\mu_2 t}$인 경우는 위에서 구한 확률값이 다음과 같이 된다.

변환확률 P_{ij}는

$S-s\leq q$인 경우

$$P_{ij}=\begin{cases}\sum_{n=1}^{i-s}\sum_{\kappa=0}^{i-s-1}b^n(\kappa)b(i-j-\kappa), & i>s\geq j\\ \sum_{\ell=0}^{S-j}[\{\mu_1/(\lambda+\mu_1)\}\{\lambda/\lambda(\lambda+\mu_1)\}^{\ell}b^{\ell}(S-j)], & s\geq i\geq S-q\\ \sum_{\ell=0}^{S-j}[\{\mu_2/(\lambda+\mu_2)\}\{\lambda/\lambda+\mu_2)\}^{\ell}b^{\ell}(S-j)], & i<S-q\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad \cdots\cdots (12)$$

$S-s>q$인 경우

$$P_{ij}=\begin{cases}\sum_{n=1}^{i-s}\sum_{\kappa=0}^{i-s-1}b^n(\kappa)b(i-j-\kappa), & i>s\geq j\\ \sum_{\ell=0}^{S-j}[\mu_2/(\lambda+\mu_2)\{\lambda/(\lambda+\mu_2)\}^{\ell}b^{\ell}(S-j)], & s\geq i\geq j\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad \cdots\cdots (13)$$

이다.

또한 $K_t(i,j)$의 적분치는

$S-s\leq q$인 경우

$$\int_0^\infty K_t(i,j)dt=\begin{cases}\sum_{\ell=0}^{i-j}b^{\ell}(i-j)/\lambda, & i>s\geq j\\ \sum_{\ell=0}^{i-j}[\{\lambda/(\lambda+\mu_1)\}^{\ell}b^{\ell}(S-j)/(\lambda+\mu_1)], & s\geq i\geq S-q\\ \sum_{\ell=0}^{i-j}[\{\lambda/(\lambda+\mu_2)\}^{\ell}b^{\ell}(S-j)/(\lambda+\mu_2)], & i<S-q\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad \cdots\cdots (14)$$

$S-s>q$인 경우

$$\int_0^\infty K^t(i,j)dt=\begin{cases}\sum_{\ell=0}^{i-j} b^\ell(i-j)/\lambda, & i>s\geq j\\ \sum_{\ell=0}^{\ell=0}[\{\lambda/(\lambda+\mu_2)\}^\ell b^\ell(S-j)/(\lambda+\mu_2)], & a\geq i\geq j\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad \cdots\cdots (15)$$

이 된다.

최적재고정책은 식(11)의 비용함수 $g(s, S)$가 최소가 되는 s, S를 결정하는 일이다. 그런데 대부분의 경우 S가 유한한 범위내에서 $g(s, S)$의 최소치를 구할 수 있고, 그렇지 못한 경우라도 S가 기업의 재고유지용량을 나타내기 때문에 유한하다. 그러므로 s가 주어지면 S가 유한한 범위내에서 $g(s, S)$의 최소치가 존재한다. 따라서 $s_0=0$에서 시작하여

$$g(s_n^*, S_n^*)=\min_{s_n^*\leq S} g(s_n^*, S)$$

$$g(s_{n+1}^*, S_n^*)=\min_{s\leq s_n^*} g(s, S_n^*)$$

를 반복하여 최적 s, S로 결정하는 절차를 사용할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 확률적 수요과정을 갖는 재고모형의 제품인도기간이 주문량에 의존하는 확률변수인 경우에, 주문도착이 교차하지 않는다는 가정하에서 분석하여, 재고수준의 안정상태 확률과 비용함수를 살펴보았으며, 간단히 최적정책을 수립할 수 있는 계산절차를 소개하였다. 그러나 비용함수 $g(s, S)$가 S에 대해 unimodal 함수이면 계산절차를 더욱 간단히 할 수 있을 것이다.

또한 주어진 상수 q가 0이 되거나 무한대가 되면 본 논문에서 다룬 재고모형은 제품인도기간이 확률적으로 변화하는 재고모형이 된다.

앞으로 비용함수의 특성과 주문의 교차도착이 허용되는 모형에 대한 연구가 필요하겠다.

참 고 문 헌

1. E. Cinlar, "Markov Renewal Theory: A Survey", *Man Sci.*, Vol. 21, pp. 727−752, 1975.
2. D. Gross, and C. M. Harris, "Continuous−Review(s, S) Inventory Models with State–Dependent Leadtimes", *Man Sci.*, Vol. 19, pp. 567−574, 1973.
3. D. Gross, C. M. Harris, and J. A. Lechner,"Stochastic Inventory Models with Bulk Demand and State−Depeudent Leadtimes", *Journal of Applied Probability*, Vol. 8, pp. 521−532, 1972.
4. D. L. Issaacson, and R. W. Madsen, *Markov Chains Theory and Application*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1976.
5. S. M. Ross, *Applied Probability Models with Optimization Application*, Holden−Day Inc., San Francisco, 1970.
6. H. Schellhaas, "Bewerte Regerative Prozesse mit Anwendung auf Lagerhaltungmodelle mit Zustandsabhangigen Parameten", Preprint Nr. 136., *Technische Hochschule Darmstadt*, 1974.