

# 非線形 微分方程式으로 表現되는 非線形 시스템의 解析을 爲한 볼테라 시리즈의 應用

## (Application of Volterra Functional Series to the Analysis of Nonlinear Systems Represented by Nonlinear Differential Equations)

成 檀 根\*

(Dan Keun Sung)

### 要 約

非線形 시스템의 入出力 關係는 볼테라 시리즈의 볼테라 커널에 의해 뚜렷하게 나타낼 수 있으며 이 볼테라 커널을 계산하면 入出力 關係를 說明할 수 있다. 非線形 微分方程式으로 表示되는 非線形 시스템의 解析을 위해 直接代入法과 順次的인 近似方式에 의한 블록圖 縮小法에 의해 볼테라 커널이 計算되고 比較되며 本 論文에서 提案한 後者의 方法이 計算의 複雜性을 현저하게 줄일 수 있다. 非線形 시스템에서 非線形的 程度를 나타내는 非線形度를 本 論文에서 定義하고 그 特性들을 알아 보고 具體的인 시스템에 適用 分析한다. 本 研究에서 提示된 解析 技法은 一般的인 것으로 광범위한 非線形 시스템의 解析에 應用될 수 있다.

### Abstract

The input-output relation for nonlinear systems can be explicitly represented by the Volterra functional series and it is characterized by the Volterra kernels. A block diagram reduction method is proposed to determine the Volterra kernels for nonlinear differential equations and is compared with the direct substitution techniques. The former method can significantly reduce the computational complexity. A degree of nonlinearity is defined and analyzed for the analysis of nonlinear systems.

### I. 序 論

많은 自然現象은 非線形的 特性을 나타내는 非線形 시스템이라 볼 수 있다. 이 非線形 시스템을 線形

화하여 部分的으로 解析할 수 있으나 全體를 解析하는 데는 未洽하다. 線形 시스템 理論은 1970年代에 大部分 정립되어 가고 있으나 非線形 시스템 理論의 정립은 아직 幼兒期에 不過하며 現代 科學技術의 大部分의 分野에서의 限界 또는 障壁은 非線形 問題로 귀착하며 이러한 非線形 問題의 解析 및 解決이 科學技術의 進歩에 必須的인 要件이며 앞으로 풀어야 할 課題이기도 하다.

\*正會員, 韓國科學技術大學 電子電算學部  
(School of Electrical Eng. & Computer Science,  
Korea Institute of Technology)

接受日字: 1987年 11月 14日

(※ 本 研究은 1986~1987년도 科學財團 지원하에  
수행되었음.)

Vito Volterra는 1910年頃 函數의 概念을 擴大한 函數의 函數(functional)에 對한 Taylor 定理를 一般

化하여 無限 數列<sup>[1]</sup>을 導入하였는 데 이것을 볼테라 시리즈(Volterra functional series)라 부른다. 이 볼테라 시리즈의 첫번째 응용은 1940年代初 Wiener에 의해 始作되었고 후에 白色 가우시언 入力에 對한 直交(orthogonal) Wiener functional<sup>[2]</sup>을 開發하였다. 그후 1950년대 말부터 본격적으로 研究되고 있으며 볼테라 시리즈의 수렴과 安定度는 George<sup>[3]</sup>, Barrett<sup>[4]</sup>, Schetzen<sup>[5]</sup>, 그리고 Christensen<sup>[6]</sup> 등에 의해 討議되었다. Flake<sup>[7,8]</sup>는 非線形 時不變과 時變 微分方程式의 解를 求하기 위한 볼테라 커널을 計算하는 簡單한 方法을 도입하였다. 볼테라 시리즈의 主要 應用 分野는 通信,<sup>[9]</sup> 回路,<sup>[10,11,12,13]</sup> 비스코일레 스틱(viscoelastic) 재료,<sup>[14,15]</sup> 固有值 問題,<sup>[16]</sup> 力學 시스템<sup>[16]</sup> 그리고 認識問題<sup>[5]</sup> 등이다.

本 論文에서 非線形 微分方程式의 入力-出力 關係를 나타내는 볼테라 커널의 計算을 위해 直接代入法과 連續的인 近似方式에 依한 블록도 構成에 따른 블록도 縮小方法이 서로 比較되며 非線形의 程度를 나타내는 非線形度가 定義되어 그 特性들이 考察된다.

II. 볼테라 커널의 計算

一般的으로 非線形 시스템은 時不變(time-invariant)과 時變(time-varying) 시스템으로 나눌 수 있으며 時變 시스템은 時間에 따라 入出力關係를 나타내는 볼테라 커널 즉 임펄스 응답이 바뀌어 지는 것이며 本 論文에서는 時不變 非線形 시스템의 경우에 한 정하여 연구한다.

時不變 非線形 시스템(time-invariant nonlinear systems)에서 入力を  $x(t)$ , 出力을  $y(t)$ 라 할 때 入력과 出力의 關係는

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n[x(t)] \tag{1}$$

로 주어지며, 여기서

$$H_n[x(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} h_n(t_1, t_2, \dots, t_n) x(t-t_1) \dots x(t-t_n) dt_1 \dots dt_n \tag{2}$$

$H_n$ 은  $n$ 차 볼테라 演算子이며  $H_n[x(t)]$ 는  $n$ 次元의 一般化된 컨벌루션(convolution) 積分形態로서  $n$ 차 볼테라 커널,  $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 에  $n$ 箇의 入力の 곱으로 나타내어진다.  $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 은 또한 一般化된  $n$ 次的 임펄스 應答에 해당한다.

아래와 같은 常微分方程式(ordinary differential equations)의 形態로 나타낼 수 있는 時不變 非線形 시스템을 考慮해 보자.

$$L[y(t)] + F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)] = x(t) \tag{3}$$

여기서  $L$ 은 線形 微分演算子이고,  $F$ 는 非線形 演算子이며 모든 初期條件은 0(zero)로 假定한다. 이러한 一般的인 形態의 微分方程式의 解를 求하기 爲한 하나의 方法으로 볼테라 시리즈의 形態의 假定된 式(1)을 式(3)에 代入하여 볼테라 커널을 計算하는 것으로 直接代入法(direct substitution method)<sup>[7]</sup>이라 부를 수 있다. 이 方法에 依해 볼테라 커널을 求하기 爲해

- 볼테라 시리즈의 假定된 解를 微分方程式에 代入한다.

- 恒等式을 滿足시키기 위해  $x(t)$ 의 各種 functional에 對한 계수 부분을 영(zero)로 한다.

- 求해진 일련의 條件式에서 낮은 次數의 볼테라 커널로부터 順次的으로 求한다.

具體的인 例로서 아래의 非線形 微分方程式을 考慮해 보자.

$$\dot{y}(t) - y(t) + ay^2(t) = x(t), \quad y(0) = 0 \tag{4}$$

위에서 언급한 方法에 依해 順次的인 일련의 條件式이 유도되면 아래와 같다.

$$x(t) : h_1(t) = 1 \tag{5}$$

$$\int_0^t dt_1 x(t-t_1) : \frac{dh_1(t)}{dt} + h_1(t) = 0 \tag{6}$$

$$x(t) : \int_0^t dt_1 x(t-t_1) : h_2(t_1, 0) + h_2(0, t_1) = 0 \tag{7}$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 x(t-t_1) x(t-t_2) : \frac{\partial h_2(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial h_2(t_1, t_2)}{\partial t_2} + h_2(t_1, t_2) + ah_1(t_1)h_1(t_2) = 0 \tag{8}$$

$$x(t) : \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} dt_1 dt_2 x(t-t_1) x(t-t_2) : h_3(0, t_1, t_2) + h_3(t_1, 0, t_2) + h_3(t_1, t_2, 0) = 0 \tag{9}$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} dt_1 dt_2 dt_3 x(t-t_1) x(t-t_2) x(t-t_3) : \frac{\partial h_3(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_1} + \frac{\partial h_3(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_2} + \frac{\partial h_3(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_3} + h_3(t_1, t_2, t_3) + 2a h_1(t_1)h_2(t_2, t_3) = 0 \tag{10}$$

式(5)와(6)에서  $h_1(t)$ 는 求해진다.

$$h_1(t) = e^{-t} \tag{11}$$

볼테라 커널의 對稱性을 利用하여 式(8)을 多次元

Laplace 變換하여 2次 볼테라 커널의 多次元 Laplace 영역에서의 값은

$$H_2(s_1, s_2) = \frac{-a}{(s_1+s_2+1)(s_1+1)(s_2+1)} \quad (12)$$

이 多次元 Laplace 의 逆變換을 하면  $h_2(t_1, t_2)$  가 求해진다.

$$h_2(t_1, t_2) = ae^{-t_1} u(t_2 - t_1) [1 - e^{-(t_1 - t_2)}] - ae^{-t_1} u(t_2) + ae^{-t_1 - t_2} u(t_2) \quad (13)$$

여기서  $u(t)$  는 단위 스텝함수이다.

같은 方式으로 高次 볼테라 커널을 計算할 수 있다.

위에 언급한 直接代入法은 實際로 複雑한 微分方程式의 計算에는 計算의 複雜度가 커 計算上의 어려움이 있다. 微分方程式에 直接代入하는 것이 아니라 微分方程式을 우선 積分方程式의 形態로 고쳐 順次的으로 낮은 次數부터의 볼테라 커널을 계산하는 方式<sup>17)</sup>이 있으나 이 또한 複雑한 非線形 시스템의 경우에 計算의 複雜性을 隨伴한다. 이것을 피하기 위해 積分方程式의 形態에서 周波數 領域에서의 블록도를 그리고 이 블록도를 축소하는 方法으로 계산의 복잡성을 크게 줄일 수 있다.

式 (3)에 表示된 非線形 微分方程式으로 부터 線形 微分演算子の 逆變換 演算子,  $L^{-1}$  을 導入하여 式 (14)와 같이 變換한다.

$$y(t) = L^{-1}\{x(t)\} - L^{-1}\{F\{y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\}\} \quad (14)$$

$L$  演算子の Laplace 變換의 一般型,  $\mathcal{L}\{L\}$  은

$$\mathcal{L}\{L\} = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = K(s) \quad (15)$$

그러면 式 (3)의 Laplace 變換後 정리하면 式 (14)를 Laplace 變換한 結果와 같다.

$$Y(s) = \frac{X(s)}{K(s)} - \frac{1}{K(s)} \mathcal{L}\{F\{y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\}\} \quad (16)$$

여기서  $G(s) = 1/K(s)$  이면 Laplace 逆變換한 積分方程式의 形態가 求해진다.

$$y(t) = \int_0^t g(t-t_1) x(t_1) dt_1 - \int_0^t g(t-t_1) F\{y(t_1), y'(t_1), \dots, y^{(n-1)}(t_1)\} dt_1 \quad (17)$$

이 積分方程式으로 부터 連續的인 近似方式(successive approximation technique)에 依해 解를 求할 수 있지만 時間領域에서 計算이 대단히 複雜하므로 周波數領域에서 볼테라 커널을 計算하는 것이 바람직하다.

우선, 假定된 볼테라 시리즈의 解는 式 (1)에 주어 져 있는데 이것을 블록도로 나타내면 그림 1과 같고  $n$ 次解  $y_n(t)$ 는  $n$ 次元의 Laplace 變換된  $n$ 次 볼테라 커널에 依해 表示될 수 있다.

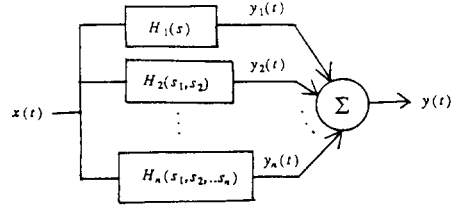


그림 1. 비선형 시스템의 볼테라 시리즈 해의 블록도  
Fig. 1. Block diagram for the Volterra series solution.

式 (17)에서 線形解에 해당하는 1次 볼테라 커널을 쉽게 찾을 수 있다.

$$H_1(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \equiv G(s) \quad (18)$$

1次解  $y_1(t)$ 를 다시 式 (17)에 代入한 後 블록도를 그리면 그림 2와 같으며, 高次的 볼테라 커널은 非線形 部分인  $F\{y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\}$ 의 Laplace 變換部分과  $G(s)$  部分이 중속적으로 접속되므로 求해질 수 있다.

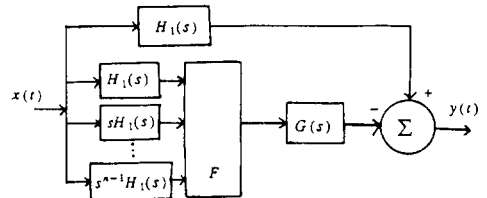


그림 2. 고차 볼테라 커널 계산을 위한 블록도  
Fig. 2. Block diagram for the higher order Volterra kernels.

式 (4)에 나타나는 시스템의 例를 다시 考慮하여 積分方程式의 形態로 고치면

$$y(t) = \int_0^t g_1(t-t_1) x(t_1) dt_1 - \int_0^t a g_1(t-t_1) y^2(t_1) dt_1 \quad (19)$$

여기서  $g_1(t) = e^{-t}$  그리고  $G_1(s) = 1/(s+1)$ . 여기서 線形部分의 解로 부터  $H_1(s)$  는 求해진다.

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad (20)$$

2次 볼테라 커널을 계산하기 위해 1次 볼테라 解를 代入하여 블록도로 構成하면 그림 3과 같고 이 그림에서 2次元의 Laplace 領域에서의 2次 볼테라 커널이 求해진다.

$$H_2(s_1, s_2) = -a G_1(s_1 + s_2) H_1(s_1) H_1(s_2) = \frac{-a}{(s_1 + s_2 + 1)(s_1 + 1)(s_2 + 1)} \quad (21)$$

같은 方式으로 2次까지의 볼테라 解를 式 (19)에 代入하여 3次 볼테라 커널이 求해진다.

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{2a^2}{(s_1 + s_2 + s_3 + 1)(s_1 + 1)(s_2 + 1)(s_3 + 1)} \quad (22)$$

時間領域에서의 볼테라 커널은 多次元 Laplace 逆變換으로 求해지는데 3次까지의 볼테라 시리즈 解는

$$\hat{y}(t) = \int_0^t h_1(t_1)x(t-t_1)dt_1 + \int_0^t \int_0^t h_2(t_1, t_2)x(t-t_1)x(t-t_2)dt_1 dt_2 + \int_0^t \int_0^t \int_0^t h_3(t_1, t_2, t_3)x(t-t_1)x(t-t_2)x(t-t_3)dt_1 dt_2 dt_3 \quad (23)$$

y(t)는 無限의 볼테라 시리즈 解인 反面에  $\hat{y}(t)$ 는 4次 以下의 解를 자른(truncated) 結果이며 만약 非線形 시스템의 非線形度(nonlinearity)가 弱한 경우 無限 시리즈의 볼테라 시리즈 解, y(t)는 수렴이 매우 빨라 낮은 次數부터 소수의 자른(truncated) 볼테라 시리즈 項으로도 近似시킬 수 있다.

앞에서 計算된 볼테라 커널로 入力 x(t)가 주어지면 y(t)는 다중적분을 계산하면 求해지지만, 만약 x(t)가 Laplace 變換이 可能한 特定한 形態의 函數이면 다중적분 代身에 變數의 關聯化(association of variables) 方法<sup>13,17</sup>에 依해 多次元의 解를 一次元의 解로 變換하는 것이 可能하다. x(t)를 單位 스텝함수

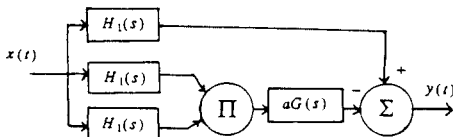


그림 3. 2차 볼테라 커널 계산을 위한 블록도  
Fig. 3. Block diagram for the second order Volterra kernels.

라고 하면 변수의 關聯化 方法을 使用하여 i次的 解,  $y_i(t)$ 를 求하면

$$y_1(t) = 1 - e^{-t} \quad (24)$$

$$y_2(t) = a(-1 + 2te^{-t} + e^{-2t}) \quad (25)$$

$$y_3(t) = a^2[2 + e^{-t} - 2te^{-t} - 2t^2e^{-t} - 2e^{-2t} - 4te^{-2t} - e^{-3t}] \quad (26)$$

上記의 問題에 對하여 볼테라 시리즈 解와 Runge-Kutta의 方法에 依한 數值積分<sup>18</sup>에 依한 結果가 그림 4,5,6에 나타나 있으며 이 그림들은 각각 a=0.01, 0.05 및 0.1에 해당될 때의 結果이다. 그림에서  $y_i(t)$ 는 i次 볼테라 시리즈의 解이며 y(t)는 Runge-Kutta의 數值積分 結果이며  $\hat{y}(t)$ 는 3次까지 계산된 볼테라 시리즈의 解에 해당한다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 a=0.01, 0.05 및 0.1 때는 3次까지의 볼테라 시리즈 解와 數值解가 거의 같다. 이것은 非線形度가 비교적 낮은 非線形임을 나타내고 있으며 이러한 경우에 낮은 次數의 볼테라 시리즈 解만으로 非線形解에 수렴해 감을 보여주고 있다.

### III. 非線形度

非線形 시스템이라 함은 線形 시스템이 아님을 意味하지만 여기에는 얼마나 이 非線形 시스템의 解가 이 非線形 시스템의 線形化(linearization)한 線形 시스템의 解와 偏差가 있는가의 情報가 없다. 여기서 非線形의 程度를 나타내는 非線形度(degree of nonlinearity)를 定義하고 여러가지 特性들을 알아보자.

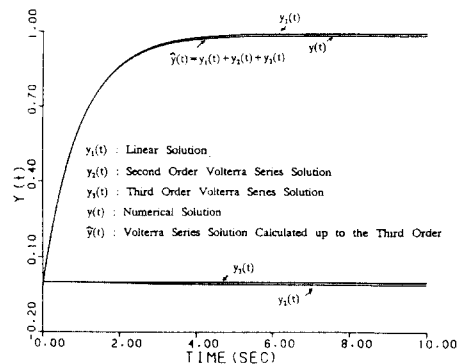


그림 4. 볼테라 시리즈 해와 수치해의 비교 (a=0.01)

Fig. 4. Comparison of volterra series solution and numerical solution (a=0.01).

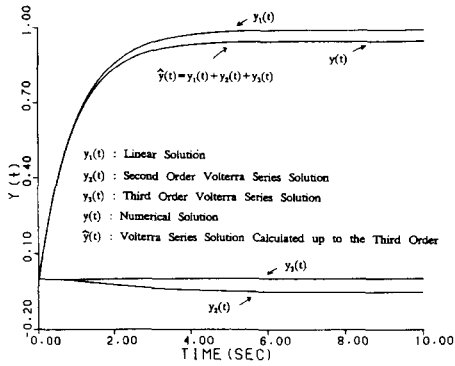


그림 5. 볼테라 시리즈 해와 수치해의 비교 (a=0.05)

Fig. 5. Comparison of volterra series solution and numerical solution (a=0.05).

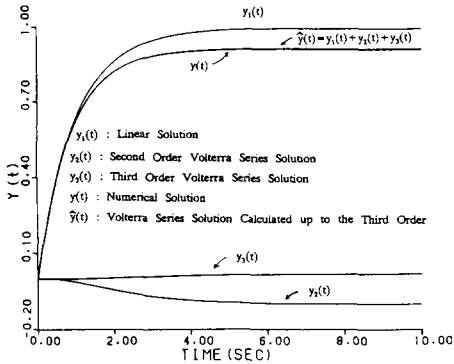


그림 6. 볼테라 시리즈 해와 수치해의 비교 (a=0.1)

Fig. 6. Comparison of volterra series solution and numerical solution (a=0.1).

아래와 같은 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$L[y(t)] + F[y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)] = x(t), \quad y(0) = 0 \quad (27)$$

여기서 L은 선형연산자이고 F는 비선형연산자이다. 이 비선형 시스템의 볼테라 시리즈 해는 식 (28)과 같다.

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) = y_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} y_i(t) \quad (28)$$

여기서  $y_1(t)$ 는 상기 비선형 시스템의 선형화된 시스템의 해이며  $y(t) - y_1(t)$ , 즉 식 (28)의 마지막 항은 비선형 시스템의 비선형해에 해당한다.

비선형도 D(N)과 선형도 D(L)을 아래와 같이 정의한다.

$$D(N) = \frac{\int_c^d |y(t) - y_1(t)| dt}{\int_c^d |y(t) - y_1(t)| dt + \int_c^d |y_1(t)| dt} \quad (29)$$

$$D(L) = \frac{\int_c^d |y_1(t)| dt}{\int_c^d |y(t) - y_1(t)| dt + \int_c^d |y_1(t)| dt} \quad (30)$$

여기서 D(N)와 D(L)은 주어진 구간 [c, d]와 입력 x(t)에 따르며 y(t)는 주어진 시스템의 해에 해당하고  $y_1(t)$ 는 선형해, 즉 1차 볼테라 시리즈의 해에 해당하며 초기에 무입력 상태로 평형점 (equilibrium point)에 위치해 있는 경우는 제외된다. 왜냐하면 평형점에 위치해 있고 입력이 없으면 반응이 일어나지 않아 비선형의 해가 나타나지 않기 때문이다.

상기의 정의식에서 아래의 특성들을 찾을 수 있다.

[특성 1]  $D(L) + D(N) = 1$

[특성 2] 순수한 선형 시스템 (pure linear systems)의 경우  $D(L) = 1$

[특성 4] 순수한 비선형 시스템의 경우  $D(N) = 1$

[특성 5]  $0 \leq D(L) \leq 1, 0 \leq D(N) \leq 1$

식 (4)로 나타낸 비선형 시스템 모델을 다시 사용하여 a=0.01, 0.05, 0.1 및 0.5에 대하여 비선형해 y(t)와 선형해  $y_1(t)$ 가 각각 그림 7, 8, 9 및 10에 나타나 있다. 각각의 그림에 대하여 [0, 10]초 구간에 있어서 비선형도를 계산한 결과가 표 1에 나타나 있다.

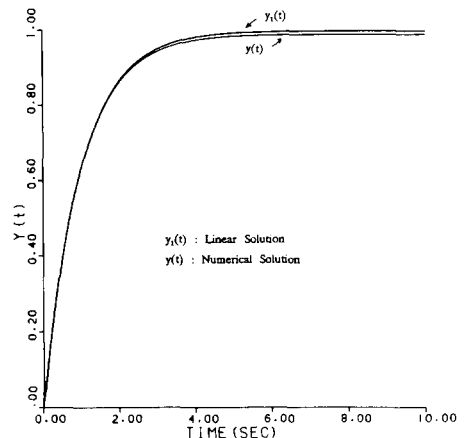


그림 7. 선형해와 비선형해 (a=0.01)

Fig. 7. Linear and nonlinear solutions (a=0.01).

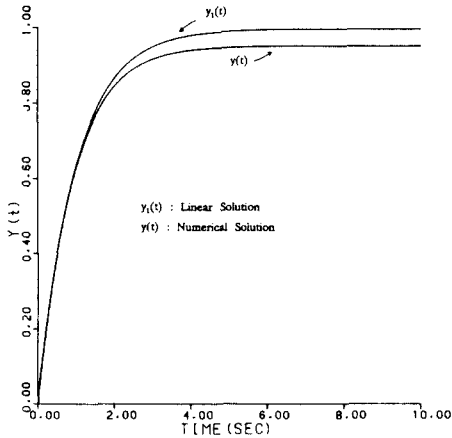


그림 8. 선형해와 비선형해 (a=0.05)  
Fig. 8. Linear and nonlinear solutions (a=0.05).

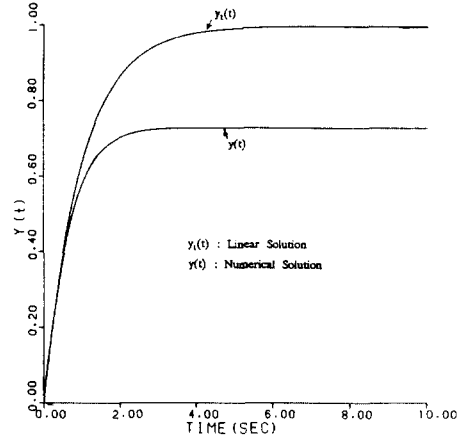


그림 10. 선형해와 비선형해 (a=0.5)  
Fig. 10. Linear and nonlinear solutions (a=0.5).

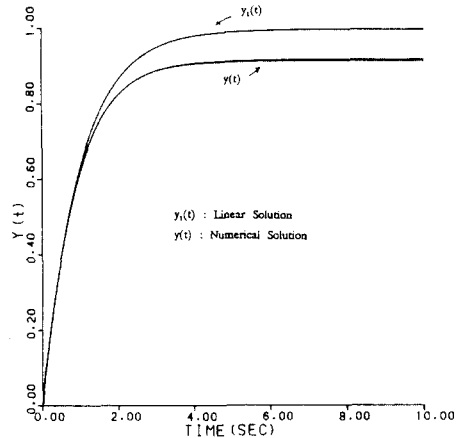


그림 9. 선형해와 비선형해 (a=0.1)  
Fig. 9. Linear and nonlinear solutions (a=0.1).

다. a의 값이 커짐에 따라 線形解와 非線形解 사이의 偏差가 커지고 非線形度가 커짐을 알 수 있다.

IV. 結 論

많은 경우에 非線形 時不變 시스템을 非線形 微分方程式으로 表示할 수 있고 이러한 시스템의 볼테라 시리즈 解를 求하기 爲해 볼테라 커널을 계산하여야 하며 이것들이 求해지면 入力와 出力의 相關關係를 糾明할 수 있다. 本 研究에는 이 볼테라 커널들을 求하기 爲해 直接代入法에 依한 方式과 積分方程式으로 變換後 連續的인 近似方式에서 周波數領域에서의

표 1. a의 값에 따른 비선형도  
Table 1. Degree of nonlinearity, D(N).

a	D(N)
0.01	0.0082
0.05	0.0371
0.1	0.0669
0.5	0.1932
1.0	0.2589

블록도를 使用하고 블록도 縮小法에 依한 커널의 計算 方法이 比較되었고 後者の 提案된 方法으로 計算上의 複雜性을 현저히 줄일 수 있다. 非線形 시스템에서의 非線形의 程度를 나타내는 非線形度가 定義되고 實際의 非線形 시스템의 例에 適用하여 分析하였다. 本 研究에서 考察된 여러 技法들은 여기서 例示된 非線形 시스템 뿐만 아니라 많은 범위의 非線形 時不變 시스템의 解析에 應用 可能하다. 非線形 時變 시스템의 경우에는 周波數 領域에서의 處理가 困難하므로 여기서 提示하는 技法은 適用되지 않는다.

參 考 文 獻

[1] V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1957.  
[2] N. Wiener, *Nonlinear Problems in Random Theory*, The Technology Press, M.I.T., 1957.

- [3] D.A. George, *Continuous Nonlinear Systems*, Tech. Report 355, Research Lab. of Electronics, M.I.T., 1959.
- [4] J.F. Barrett, "The use of functionals in the analysis of nonlinear physical systems," *Journal of Electronics Control*, vol. 15, no. 6, pp. 567-615, 1962.
- [5] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1980.
- [6] G.S. Christensen, "On the convergence of Volterra series," *IEEE Trans. on Automatic control*, vol. 13, no. 6, pp. 736-737, 1968.
- [7] R.H. Flake, "Volterra series representation of nonlinear systems," *Trans. of IEEE*, pp. 330-335, 1962.
- [8] R.H. Flake, "Volterra series representation of time-varying nonlinear systems," *Proc. of second IFAC Congress*, pp. 91-99, 1963.
- [9] S. Narayanan, "Application of Volterra series to intermodulation distortion analysis of transistor feedback theory," *IEEE Trans. on Communication Theory*, CT-17, pp. 518-527, 1970.
- [10] L.O. Chua and Y.S. Tang, "Nonlinear oscillation via Volterra series," *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, CAS-29, pp. 150-168, 1982.
- [11] D.D. Weiner and J.F. Spina, *Sinusoidal Analysis and Modeling of Weakly Nonlinear Circuits*, Van Nostrand Reinhold Company, 1980.
- [12] E. Bedrosian and S.O. Rice, "The output" properties of Volterra systems driven by harmonic and gaussian inputs," *Proc. of IEEE*, vol. 59, pp. 1688-1707, 1971.
- [13] H.L. Van Trees, "Functional techniques for the analysis of the nonlinear behavior of phase-locked loops," *Proc. IEEE*, vol. 52, pp. 894-911, 1964.
- [14] F.J. Lockett, *Nonlinear Viscoelastic Solids*, Academic Press, 1972.
- [15] W.G. Gottenberg et al, "An experimental study of a nonlinear viscoelastic solid in uniaxial tension," *Journal of Applied Mechanics* pp. 558-564, 1969.
- [16] D.K. Sung, *Application of Volterra Series to Vibration Analysis*, Thesis of the University of Texas at Austin, 1982.
- [17] J.F. Barrett, "The use of Volterra series to find region of stability of a nonlinear differential equation," *International Journal of Control*, vol. 1, no. 3, pp. 209-216, 1965.
- [18] Conte and de Boor, *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1972.
-