

# 모멘트방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법, II : 잡음의 영향

## (A New Inverse Scattering Scheme Using the Moment Method, II : Noise Effect)

金世潤\*, 尹台焄\*\*, 羅正雄\*\*\*

(Se Yun Kim, Tae Hoon Yoon and Jung Woong Ra)

### 要 約

임의의 유전체로부터 산란된 전자파를 측정시 발생하는 오차 및 잡음등이 본 논문의 전편에서 제시한 모멘트방법을 이용한 새로운 역산란 방법으로 재구성된 임의의 유전체의 복소유전율 분포에 미치는 영향에 대해 수치계산으로 살펴보았다. 이들의 영향을 줄이는 방안으로 regularization, 반복계산, 다중입사등의 방법을 여러가지 경우에 대해 적용하여 보았다.

### Abstract

Employed the new inverse scattering scheme based on the moment method, which was presented in the Part I of these companion papers, numerical simulations are performed to investigate the effect of measurement errors and noise contaminating the field scattered from dielectric objects. In order to reduce those effects on the reconstructed permittivity profiles, some techniques such as regularization, iterative matrix inversion, and multiple incidence are applied to this problem.

### I. 서 론

임의의 2차원 유전체에 입사파를 가하여 산란되는 전자파로부터 유전체 내부의 유전율 분포를 파장이 하의 정도까지 판별할 수 있도록 하는 새로운 역산란 방법<sup>1)</sup>을 개발하였다. 실제 계산시 재구성된 유전율 분포는 거의 오차가 없이 구할 수 있으나, 산란

파 측정시의 오차 및 잡음등이 존재시 이 영향을 규명할 필요가 있다. 이 문제는 역산란 문제에서 실제적이고도 힘든 ill-posed 문제이다.<sup>2)</sup> ill-posed 문제는 역산란 계산시 행렬의 역변환이 안정되지 못하여 이 역변환된 행렬이 조그마한 잡음을 크게 증폭시켜 원래의 유전율 분포를 알아보기 어렵게 한다. 이것은 제시된 역산란 계산방법이 파장이하의 물체까지 분별해 내려는 초정밀분해능(superresolution)<sup>3)</sup>을 얻으려고 하므로 생긴다.

본 논문에서는 개발된 새로운 역산란 계산방법에 대해 잡음의 영향을 줄이기 위하여 다음과 같은 방법을 적용하여 보았다. 첫째로, 구하고자 하는 유전율 분포에 대해 적당한 제한을 두어서 이를 이용하여 행렬의 역변환을 조정(regularization) 하는 방법이다.<sup>4)</sup> 이것은 유전율분포의 정확한 계산을 조금 희생하면

\*正會員, 韓國科學技術院 物理電子先任研究室  
(Center for Appl. Ph. and Elect. Eng., KAIST)

\*\*正會員, 釜山大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Pusan Univ.)

\*\*\*正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科  
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字: 1987年 9月 11日

서 잡음의 영향을 크게 줄이는 것으로 그 정도를 최적화(optimization) 하는 것이 중요한 문제이다. 둘째로, 행렬의 역변환을 직접하지 않고, 반복적인 방법으로 일정한 횟수내에 주어진 오차범위를 만족시키도록 하는 방법이다.<sup>15)</sup> 이 방법은 일반적으로 역산란 문제에서 요구되는 행렬의 크기가 매우 크기 때문에 직접계산 하는 것은 계산기의 기억용량 및 계산시간이 너무 많고, 또 반복적으로 계산하면 그 각각의 계산단계에서 물리적인 제한 조건을 부가할 수 있으므로 많이 사용된다. 이 방법은 반복해서 계산할 경우 정확한 값으로 얼마나 빨리 접근(convergence) 하는가가 중요한 문제이다. 셋째로, 하나의 입사파를 물체에 가하여 산란된 전자파를 측정하는 것을 여러 방향에서 반복하여 측정하는 방법(scanning)으로, 잡음의 영향을 어느 정도 감소시킬 수 있지만 계산용량이 여러 방향에 비례해서 증가하는 문제가 있다.<sup>16)</sup>

제 II 장에서는 측정점의 위치와 갯수가 오차에 미치는 영향을 고려하였고, 제 III 장에서는 regularization, 반복계산 및 다중입사가 잡음영향을 줄이는 효과를 계산해 보았다. 제 IV 장에서는 새로운 역산란 계산방법의 장단점 및 한계점을 기술하였고, 끝으로 제 V 장에서 결론을 맺는다.

II. 잡음의 영향

본 논문의 전편논문<sup>11)</sup>에서 모멘트 방법을 역으로 이용한 새로운 역산란 방법을 제시하였으며, 실제 수치계산으로 재구성된 유전율 분포는 거의 정확한 값을 갖는다는 것을 확인하였다. 이 역산란 방법은 다음과 같은 3 단계로 구성되어 있다. ; 먼저, 유전체 외부에서 측정된 산란전계로부터 유전체 내부에 유기되는 등가유기전류분포를 모멘트방법으로 계산하고, 등가유기전류로부터 각 cell에 유기되는 전계를 계산한 뒤, 끝으로 각 cell에서 첫단계에서 구한 등가유기전류 값을 두번째 단계에서 구한 전계 값으로 나누어서 1을 더하면 각 cell에서의 비유전율 값을 재구성할 수 있다. 여기서 두번째 단계는 등가 유기전류로부터 복사되는 전계를 계산하는 산란문제로 모멘트방법으로 계산시 well-posed 행렬의 곱으로 쉽게 계산되지만, 첫번째 단계에서는 이와 반대로 산란전계로부터 이 산란전계를 복사시키는 전원을 계산하는 역전원 문제(inverse source problem)로서 모멘트 방법으로는 산란행렬(scattering matrix)의 역변환을 곱하는 계산을 해야 한다. 더구나 이 산란행렬은 거의 singular하여 행렬의 역변환이 ill-posed 문제가 된다. 따라서 측정 산란전계에 약간의 측정 오

차나 잡음이 있더라도 산란행렬이 안정(stable)되지 않아서 계산된 등가유기전류 값은 원래의 값과 크게 벗어나게 된다. 그러므로 측정오차나 잡음의 존재시, 이들이 제시된 역산란방법으로 계산한 유상수분포에 미치는 영향을 살펴볼 필요가 있다.

제한된 새로운 역산란 계산에서 잡음이 존재할 경우에 미치는 영향을 수치적으로 살펴보기는 복잡하므로 전산기에 의한 계산결과로부터 살펴보기로 한다. 먼저 그림 1(a)와 같이 9개의 cell이 정사각형 형태로 각 cell크기가  $0.1\lambda \times 0.1\lambda$ 이고 중앙의 cell에서 유전율  $4 + j0$ 을 갖을 경우에, 측정점들을 원점에서 거리 d만큼 떨어진 곳에서 직선으로  $0.1\lambda$ 간격으로 상하로 9 점을 잡도록 하자. 이때 잡음이 없으면 전편논문<sup>11)</sup>에서 보인것과같이 거의 정확하게 원래의 유전율 분포를 역산란 방법으로 구해낼 수 있으므로, 여기서는 산란된 전자파에 Gaussian random 잡음이 더해진 경우를 살펴보자. 이 경우에 계산 결과로 나타난 유전율 분포의 오차  $\delta$

$$\delta = \frac{1}{9} \sqrt{\sum_{n=1}^9 |\epsilon_n - \bar{\epsilon}_n|^2} \tag{1}$$

을 그림 2(a)에 거리 d에 대해 나타내었다. 이때  $\epsilon_n$ 은 n번째 cell의 원래 주어진 유전율이고,  $\bar{\epsilon}_n$ 은 Gaussian random 잡음의 편차가 산란전계에 더해질 경우 역산란 계산방법으로 구한 유전율을 나타낸다. 또 그림 1(b)와 같이 단층형태로 9개의 cell이 분포하여 그 유전율 분포를 n번째 cell의 중심점에서의 y축 위치인  $y_n$ 의 함수로 표시하면

$$\epsilon_n(y_n) = 3e^{-25y_n^2} + 1 \tag{2}$$

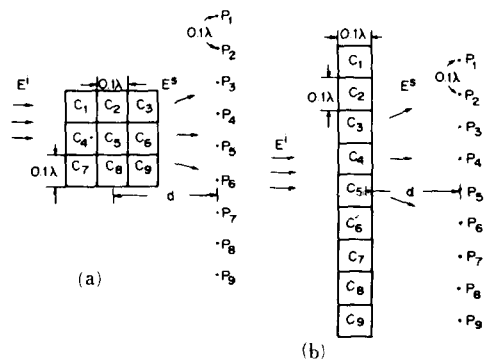


그림 1. 9개의 cell로 구성된 산란체의 구조  
 (a) 정사각형 (b) 막대형  
 Fig. 1. Geometry of the scatterer composed by 9 cells.  
 (a) rectangular. (b) bar-shaped.

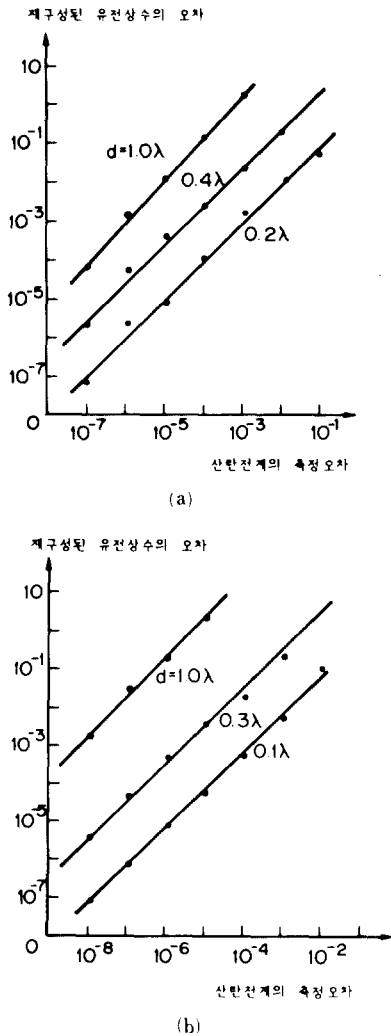


그림 2. Gaussian 형 잡음이 재구성된 유전율의 오차에 미치는 영향

(a) 정사각형 (b) 막대형

Fig. 2. Effect of Gaussian random noise to deviations of reconstructed dielectric constants.

(a) rectangular. (b) bar-shaped.

과 같이 주어지고, 측정점들은 앞 경우와 같이 유전체 기둥의 중심에서 d만큼 떨어진 곳에 9 개를 잡는다. 마찬가지로 Gaussian random 잡음을 산란전계에 더하여 역산란 계산한 결과를 그림 2(b)에 나타내었다. 그림 2(a)와 그림 2(b)에서 보듯이 측정점의 위치가 유전체 기둥으로부터 멀어질수록 잡음의 영향이 역산란 계산방법으로 구한 유전율 분포에 크게 나타난다. 이것은 측정거리가 멀어질수록 서로 다른 유전율 분포를 가진 것들이 비슷한 산란전계를 주

로, 역산란 계산을 하면 산란전계에 더해진 잡음의 영향이 더욱 크게 나타나게 된다.

또 측정점의 갯수와 잡음의 영향간의 관계를 살피기 위하여 그림 1(a)와 같은 9 개의 cell의 분포를 취하고 측정점간의 각 간격을 일정하게 9 개보다 많이 잡는다. 다음 장에서 보였듯이 측정점의 갯수가 커질수록 평균효과에 의해 잡음의 영향이 줄어드는 것을 알 수 있었다. 그러나 갯수가 많아질수록 잡음의 영향이 줄어드는 정도가 그리 크지 않는 반면 계산용량이 급속히 늘어나는 단점이 있으므로 실제 응용시에는 제한점이 된다.

따라서 측정점의 위치나 갯수에 의해 잡음의 영향을 어느정도 줄일 수 있으나, 실제 측정시에 유전체 기둥에 매우 근접한 곳에서 산란전계를 측정하기 힘들며, 갯수가 많으면 계산용량이 커지므로, 실제 응용면을 고려하면 잡음의 영향을 줄일 수 있는 계산방법을 생각해야 한다.

### III. 잡음의 영향을 줄이는 방안

#### 1. SVD 및 Regularization

앞장에서 보듯이 산란전계에 측정오차나 잡음이 들어갈 경우에 역산란 계산으로 구한 유전체의 유전율 분포는 원래의 유전율 분포와는 크게 다르게 나타남을 알 수 있었다. 이것은 역산란 계산시 수행해야 하는 행렬의 역변환으로 부터 발생하는 것이다. 따라서 이 행렬을 잡음의 영향이 작도록 바꿀 필요가 있다. 이를 위하여 구하고자 하는 유전율 분포에 대한 물리적인 제한을 미리 가하는 것이 필요하다.<sup>[7]</sup> 편의상 본 논문의 전문논문<sup>[8]</sup>중의 식 (5)로 표시된 것을 다음과 같이 쓰자;

$$Ax=y \tag{3}$$

여기서 행렬 A의 요소들은  $A_{in}$ 으로 주어지는  $L \times N$  행렬이고 x, y는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$x = \begin{bmatrix} (\epsilon_1 - 1)E_1 \\ (\epsilon_2 - 1)E_2 \\ \vdots \\ (\epsilon_N - 1)E_N \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} E_1^S \\ E_2^S \\ \vdots \\ E_L^S \end{bmatrix}$$

이러한 경우에 overdetermined 선형연립 방정식의 근사해를 구하는 Moore-Penrose generalized inverse로 least-square 해를 구할 수 있다.<sup>[6]</sup> 먼저 y와 Ax의 두 벡터의 차를 r이라고 하고, 이에 대한 complex conjugate transpose를  $r^*$ 로 표시하면  $r^*r$ 은 다음과 같다.

$$r^*r = y^*y - x^*A^*y - y^*Ax + x^*A^*Ax \tag{4}$$

여기서  $r^*r$ 은  $y$ 와  $Ax$ 의 차의 절대값의 자승치를 나타내므로 이것을 최소화하는 벡터  $x$ 의 값을 구하면 된다. 따라서 식(4)의 양변을  $x_i^*$ 에 대해 미분하여

$$\frac{\partial (r^*r)}{\partial x_i^*} = 0, \quad i=1,2,\dots,N,$$

되도록하면 식(4)으로 부터 다음을 얻을 수 있다;

$$A^*Ax = A^*y$$

따라서 행렬  $A$ 가 rank  $N$  이기만 하면  $L$ 에는 관계 없이 행렬  $A^*A$ 는 nonsingular 하므로  $x$ 에 대해

$$x = (A^*A)^{-1}A^*y \quad (5)$$

와 같이 구할 수 있다. 여기서  $(A^*A)^{-1}A^*$ 를  $A$ 의 generalized inverse 라고 한다. 식(5)에서 벡터  $y$ 에 오차  $\Delta y$ 가 더해질 경우  $x$ 에  $\Delta x$ 만큼의 변동이 있다고 하면 다음과 같은 부등식의 관계를 얻는다.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} < C\{A\} \cdot \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} \quad (6)$$

여기서  $\| \cdot \|$ 는 벡터 및 행렬의 norm 을 의미하며, 행렬  $A$ 의 condition number  $C\{A\}$ 은 다음과 같이 정의된다;

$$C\{A\} = \|(A^*A)^{-1}A^*\| \cdot \|A\| = \frac{W_1}{W_N} \quad (7)$$

여기서  $W_1$ 는 행렬  $A$ 의 singular vlaue 로서 가장 큰 것을  $W_1$ 으로 부터 가장 작은  $W_N$ 의 값까지를 나타낸다. 식(6)에서 condition number가 크면 잡음수준인  $\|\Delta y\|$ 에 대해 재구성 유전율 분포에서의 오차  $\|\Delta x\|$ 에 크게 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 따라서 condition number가 매우 클 경우에는 원래의  $A$  행렬의 rank  $N$  대신에 그보다 작은  $K$ 를 취하여 unitary 행렬  $u$ 와  $v$ 를 이용하여 다음과 같은 order  $K$ 의 diagonal  $\Lambda$ 로 나타낸다;

$$v^*Au = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

따라서 행렬  $A$ 의 generalized inverse는 식(8)을 이용하여  $u, \Lambda, u$ 로 나타낼 수 있다.

$$(A^*A)^{-1}A^* = u \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v^* \quad (9)$$

식(8)과(9)와 같은 방법을 SVD<sup>(9,10)</sup> (singular value decomposition) 이라고 부른다. 실제로 그림 3과 같이  $0.1\lambda \times 0.1\lambda$ 의 크기의 cell의 9개 분포하고 중앙에만 유전율  $4 + j0$  이고 나머지는  $1 + j0$  일때 축

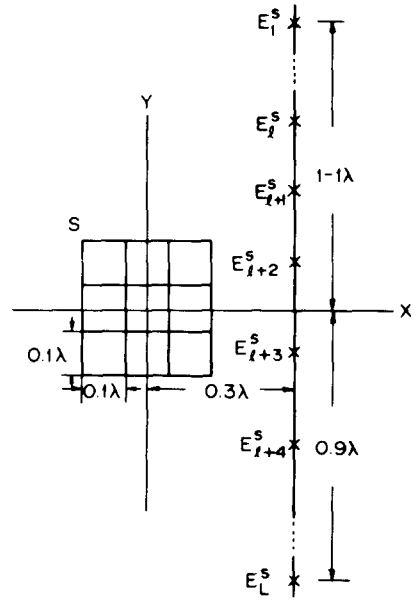


그림 3. 9개의 cell로 구성된 정사각형 산란체  
Fig. 3. Rectangular scatterer with 9 cells.

으로 부터  $0.3\lambda$ 떨어진 곳에서 직선으로  $y$ 가  $1.1\lambda$ 와  $-0.9\lambda$ 내에 등간격으로  $L$ 개의 점을 측정점으로 할 경우에 대해 다음을 계산하였다. 먼저 행렬  $A^*A$ 의 determinant의 크기와  $A$ 의 condition 및 산란전계에  $10^{-4}\%$ 의 측정오차를 가산하였을 때 역산란 계산된 유전율 분포의 오차  $\delta$ 를 측정점의 개수를 증가함에 따라 구하였다. 여기서 측정점이 증가할수록  $A^*A$ 의 determinant의 크기는 커지고 행렬  $A$ 의 condition number는 작아져서 역산란 계산으로 구한 유전율 분포의 오차가 적어짐을 표 1에서 알 수 있다. 또 행렬을 9개에서 8로 줄여서 마찬가지로 오차  $\delta$ 를 계산한 결과 측정점이 적을 경우는 오차가 줄지만 측정점이 많이 취할수록 rank가 적은 것이 나빠진다. 이를 좀 더 자세히 살펴보면 표 2에서 행렬  $A$ 의 singular value를 측정점을 51개로 할 경우에 계산하였으며, 이를 SVD 방법으로 rank 8일 때와 9일 때 잡음의 정도를 산란전계의 0.01%로 할 경우의 역산란 계산된 유전율 분포를 표 3에서 나타내었다. 여기서 rank 9일 때가 rank 8일 때 비하여 오차가 1/10로 줄어든다. 실제로 여기서 사용한 잡음의 크기가 0.0001%로 매우 작다. 따라서 좀더 물리적으로 구하고자하는 유전율 분포에 대하여 제한을 가하는 것이 필요하다. 앞의 SVD 방법은 식(2)에서  $y$ 와  $Ax$ 의 차를 줄이는 것으로부터 계산하였는데, 구하고자 하는  $x$ 에 대해서 물리적인 의미를 갖는 제한을 준다;

표 1. 그림 3의 경우의 계산결과(잡음수준;  $10^{-4}\%$ )

Table 1. Numerical Results in case of Fig. 3. (Noise Level;  $10^{-4}\%$ ).

L	Det(A*A)	C {A}	오 차 $\delta$	
			rank 9	rank 8
9	1020E-49	7030E+7	2464E+2	2826E+1
11	1097E-48	1133E+8	2183E+2	2825E+1
21	7507E-41	1161E+6	4723E+0	2834E+1
31	1307E-39	1550E+6	6306E+0	2833E+1
41	1717E-38	1485E+6	5474E+0	2833E+1
51	2968E-36	9500E+5	2290E+0	2834E+1
61	5875E-37	1501E+6	5411E+0	2843E+1
71	2452E-36	1450E+6	4560E+0	2833E+1
81	9665E-35	1324E+6	3435E+0	2833E+1
91	2139E-35	1492E+6	5301E+0	2834E+1

표 2. 행렬A의 Singular value 들(그림 3의 경우)

Table 2. Singular values of matrix A(in case of Fig. 3).

A의 Singular value 들(L=51)	
$W_1$	0.8544
$W_2$	0.3241
$W_3$	0.1123
$W_4$	0.3887E-1
$W_5$	0.1154E-1
$W_6$	0.2894E-2
$W_7$	0.2228E-2
$W_8$	0.2174E-3
$W_9$	0.8901E-5
$C\{A\} = \frac{W_1}{W_9} = 0.95 \times 10^6$	

$$\|Lx\| = C \tag{10}$$

여기서 L은 적당한 선형 operator 이고 C는 상수이다. 따라서 여기서는 다음 J의 양을 최소화 하는 x 값을 구하는 문제로 바꾼다.

$$J = \|Ax-y\|^2 + \alpha \|Lx\|^2 \tag{11}$$

만약 식(11)에서 L을 identity operator 로 두면  $\|x\|^2$ 은 x의 크기의 자승을 나타낸다. 따라서 변수  $\alpha$ 에 의하여  $\|Ax-y\|^2$ 과 같이 잡음의 영향까지 정확히 계산하는 것과,  $\|x\|^2$ 와 같이 잡음의 영향을 평균화하여 줄일 것인가의 중요도를 결정하게 된다. 즉  $\alpha$ 가 클 경우 원래의 벡터 x 값을 정확히 구하지 못하

표 3. Singular value decomposition에 의한 유전율 분포계산 결과(그림 3의 경우)

Table 3. Permittivity profiles reconstructed by singular value decomposition. (in case of Fig. 3).

i) 주어진 유전율 분포		
4+j0	j+j0 1	1+j0
1+j0	1+j0	1+j0
1+j0	1+j0	1+j0
ii) Rank=8, $\delta=2.834$ 시 역산란 결과		
1.650+j0.004	1.670-j0.635	1.220-j0.186
1.722+j0.033	1.156-j0.090	1.538-j0.299
1.156+j0.090	1.722+j0.032	1.220-j0.187
iii) Rank=9, $\delta=0.2290$ 시 역산란 결과		
4.007+j0.164	0.903-j0.006	0.995-j0.064
0.997-j0.047	1.015-j0.017	1.027-j0.045
1.010-j0.017	0.997-j0.046	0.996-j0.065

더라도  $\|x\|^2$ 을 최소화하여 잡음의 영향을 많이 줄이는 역할을 할 것이고,  $\alpha$ 를 작게 잡으면 그와 반대 현상이 일어난다. 식(11)의 양변을 벡터  $x^*$ 의 각 성분  $x_i^*$ 에 대해 미분하여 그 변화량을 0으로 두면,

$$\frac{\partial J}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_i^*} [(Ax-y)^*(Ax-y) + \alpha x^*x] = 0 \tag{12}$$

로 i를 1부터 N까지 행하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.<sup>6)</sup>

$$(A^*A + \alpha I)x = A^*y \tag{13}$$

여기서 I는 identity 행렬로 좌변의 행렬  $(A^*A + \alpha I)$ 를 역변환시키면 구하고자 하는 x에 대해

$$x = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y \tag{14}$$

와 같이 나타낼 수 있으며,  $\alpha=0$ 일때 식(5)와 같이 generalized inverse 와 같다.

실제 식(14)와 같은 regularization operator 를 써서, 그림 3과 같은 유전체 기둥과 측정점들을 취하였을 경우에 대입할 경우 변수  $\alpha$ 의 변화에 따라 역산란 계산된 유전율 분포를 표 4에 나타내었다. 이 경우 측정점들 31개를 취하였는데 그 결과는 그리 좋지 못하다. 따라서 regularization 방법은 잡음의 영향을 줄이면서 원래의 유전율 분포를 계산하였는데 그리 도움을 주지 못함을 알 수 있다.

## 2. 반복계산 방법

앞 절에서 사용한 SVD 나 regularization 방법으로

표 4. Regularizing operator를 도입해서 계산한 결과(L=31, 잡음수준=10<sup>-4</sup>% 유전율 분포는 표 3에서와 같다)

Table 4. Results calculated by employing regularizing operators. (L=31 and Noise Level=10<sup>-4</sup>% in case of Fig. 3).

(a) $\alpha = 0$		
15.153 + j 7.342	-1.429 - j 7.884	0.494 - j 2.241
4.504 - j 7.222	2.567 - j 0.617	7.741 + j 3.108
2.567 - j 0.566	4.454 - j 7.344	0.578 - j 2.249
(b) $\alpha = 10^{-10}$		
13.873 + j 9.668	-0.380 - j 6.603	0.663 - j 1.811
4.212 - j 5.336	2.235 - j 0.455	6.201 - j 2.073
2.232 - j 0.404	4.165 - j 5.437	0.743 - j 1.813
(c) $\alpha = 10^{-9}$		
0.868 + j 8.360	1.386 - j 2.809	0.980 - j 0.743
2.772 - j 1.520	1.485 - j 0.112	2.989 - j 0.322
1.474 - j 0.063	2.728 - j 1.611	1.054 - j 0.734
(d) $\alpha = 10^{-8}$		
1.153 + j 0.748	1.719 - j 0.899	1.081 - j 0.255
1.921 - j 0.156	1.170 + j 0.024	1.752 + j 0.222
1.156 + j 0.072	1.879 - j 0.248	1.151 + j 0.240

는 그리 좋은 결과를 주지 못할뿐 아니라, 구하고자 하는 유전율 분포가 커서 분할한 cell수가 많아지면 계산용량이 급속히 증가하게 된다. 따라서 행렬의 역변환을 직접하지 않고 반복적으로 점차 알고자하는 유전율 분포 값으로 접근(convergence) 시키는 방법이 필요하다.<sup>[11]</sup> 이를 위하여 전편논문<sup>[12]</sup>에서 제시한 새로운 역산란 계산방법에서 근본을 이루는 식(17)과 (18)을 다음과 같이 바꾸어 쓴다.

$$G_1 = E_1^s - \sum_{n=1}^N A_{1n} E_n (\epsilon_n - 1) \tag{15a}$$

$$H_m = E_m^t - E_m - \sum_{n=1}^N B_{mn} E_n (\epsilon_n - 1) \tag{15b}$$

서 l은 1부터 L까지 이고 m은 1부터 M까지이다. 식 (16)과 (20)에서는 G<sub>1</sub>=0, H<sub>m</sub>=0 을 구하였으나 여기서는 이를 직접 풀지않고 먼저 식 (5a)에서  $\epsilon_n(n=1, 2, \dots, N)$ 에 대해 초기치로  $\epsilon_n^{(0)}$  을 주어서 G<sub>1</sub>=0 으로부터 E<sub>n</sub><sup>(0)</sup> 을 구하고, 이를 이용하여 식(15b)에서 H<sub>m</sub>=0 으로부터  $\epsilon_n^{(1)}$  을 계산한다. 이를 위와 같은 방법으로 반복적으로 계산하여  $\epsilon_n^{(l)}$  를 계산하는 방법으로는 Gauss's relaxation방법, Jacobi's cyclical 반복방법, Seidel방법, Monte Carlo방법, Steepest descent방법, conjugate direction 방법 및 conjugate

gradient 방법 등이 있으나,<sup>[5]</sup> 여기서는 계산량이 많고 복잡한 행렬 일때에 가장 효율적인 conjugate gradient방법을 취하였다. 이 방법은 임의의 함수 F(x)의 근인  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 을  $x=a$ 의 근방에서 Taylor 전개하여,

$$F(x) = F(a) + \Delta x \cdot \Delta F \tag{16}$$

$$\Delta x = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_N - a_N)$$

$$\Delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right) \Big|_{x=a}$$

으로 나타내어서, F(x)=0 을 식 (16)에 대입하면

$$|\Delta x| = - \frac{F(a)}{|\Delta F|_{x=a}} \tag{17}$$

로 x에 대해 값을 구할 수 있다. 물론 여기서 벡터 a는 초기치에 해당하고, 이를 반복적으로 i번째로 구한 x<sup>(i)</sup>를 초기치 a로 식 (19)에 대입하면 x<sup>(i+1)</sup>을 계산하는 것으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{F \cdot \Delta F}{|\Delta F|^2} \Big|_{x=x^{(i)}} \tag{18}$$

이러한 방법으로 그림 4와 같이 0.1λ×0.1λ 크기의 cell 15개가 단층으로 분포하고 이를 중심으로 3λ 떨어진 원주상에 측정점을 등간격으로 15개 잡아서 1%의 잡음을 Gaussian random 형태를 주었을 경우, 원래의 유전율 분포와 역산란 계산된 결과를 그림 5에서 실선과 점선으로 각각 나타내었다. 여기서 보여준 결과는 잡음의 세기가 1%일 경우에도 거의 원래의 분포에 거의 일치하는 결과를 보인다는 것을 알 수 있다. 그림 4같은 경우에 원래의 유전체 분포

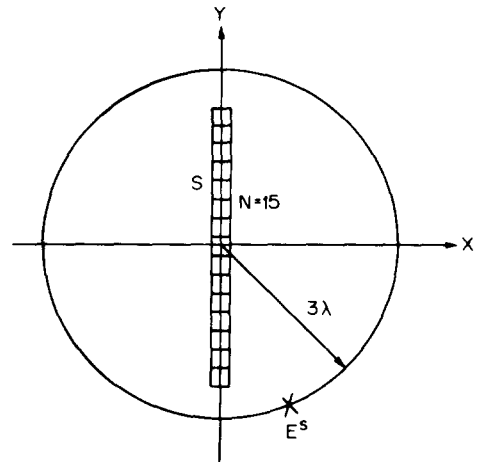


그림 4. 막대형 산란체와 원형 측정점 분포  
Fig. 4. Bar-shaped scatterer and circular distribution of measurement points.

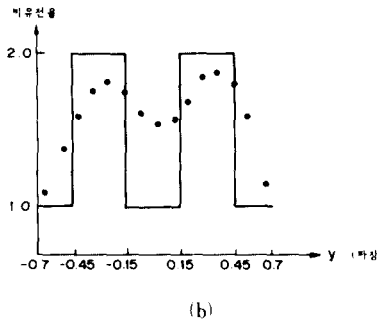
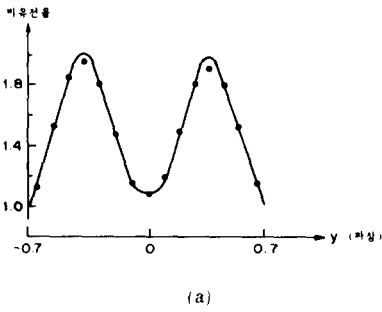


그림 5. 유전율 분포에 따른 재구성된 유전율의 오차정도

(a) 연속형 분포 (b) 불연속형 분포

Fig. 5. Deviation of the reconstructed profiles according to dielectric constant distributions.

(a) continuous distribution.

(b) discontinuous distribution.

가 그림 5(a) 처럼 연속적이 아니고 불연속인 경우에는 그림 5(b) 과 같이 그 접근 정도가 매우 떨어짐을 알 수 있다.

3. 입사방향을 여러가지로 취할 경우

새로운 역산란 방법으로 계산시 반복적으로 행렬을 역변환 시킬 때, 유전율 분포가 급속히 변화하지 않으면 잡음의 영향이 산란전계에 크게 있더라도 원래의 유전율 분포와 거의 일치하는 결과를 준다는 것을 앞절에서 보였다. 그러나 유전율의 변화가 급속히 변화할 경우, 반복적으로 계산하면 접근(convergence) 속도가 느려서 정확한 값을 얻기가 힘들다. 따라서 이 절에서는 tomography에서 사용하듯이 입사방향을 변화시키면서 각각에 대해 산란전계를 측정하여 이를 반복적으로 계산하고 그 결과를 평균하는 방법을 취하였다.<sup>[6]</sup>

먼저 입사방향을 T개 취하고 그중 임의의 t 번째 측정점에서의 산란전계  $E_{it}^s$ 로부터 식 (15a)와 식

(15b)와 같은 식을 만들 수 있다.

$$G_{it} = E_{it}^s - \sum_{n=1}^n A_{in} E_{nt} (\epsilon_{nt} - 1) \tag{19a}$$

$$H_{mt} = E_{mt}^i - E_{mt} - \sum_{n=1}^n B_{mn} E_{nt} (\epsilon_{nt} - 1) \tag{19b}$$

여기서 측정점의 위치는 입사방향이 변화하더라도 고정시켰으며 식 (19a) 및 (19b)에서 반복적으로  $\epsilon_{nt}$ 를 계산하여 이를 평균하여서,  $\epsilon_n$ 을 계산한다;

$$\epsilon_n = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_{nt} \tag{20}$$

실제 그림 6과 같이  $0.1\lambda \times 0.1\lambda$  크기의 cell 9개의 중앙에서 유전율 4, 나머지는 1을 갖을 경우 입사파의 진행방향과 측과 이루는 각이  $0^\circ, 45^\circ, -45^\circ$ 인 3가지 경우를 써서 계산한 결과를 표 5에 나타내었다. 여기서 T가 1인 경우는 입사각이  $0^\circ$ 인 하나의 경우를 나타내고, T가 2인 경우는 입사각이  $0^\circ$ 와  $45^\circ$ 의 두가지 경우를 계산한 것이다. 표 5에서 입사파의 방향을 증가시켜도 크게 오차가 줄지 않으며 반복계산 횟수를 증가시키면 조금 감소하나 그 정도가 매우 미약하다. 따라서 다중 입사방법으로는 잡음이 역산란 방법으로 계산된 유전율 분포에 미치는 영향을 크게 줄일 수 없다.

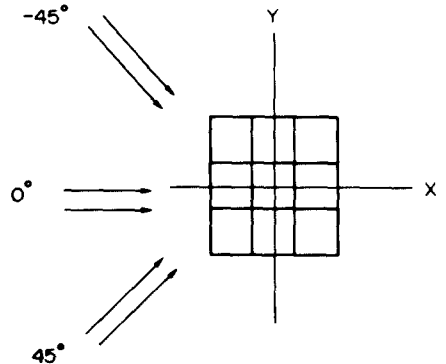


그림 6. 다중입사파의 방향과 산란체 구조  
Fig. 6. Directions of multiple incident plane waves and geometry of scatterer.

IV. 장단점 및 한계성에 대한 검토

새로운 역산란 계산방법에서의 잡음의 영향을 제 II장에서 유도하였으며, 실제 여러 경우에 대해 수치계산한 결과를 제 III장에서 보였다. 이 방법은 측정오차나 잡음이 없을 경우에는 원래의 유전체의 유

표 5. 반복계산방법에 의해 계산한 결과의 오차 (잡음이 없을 경우)

Table 5. Reconstruction errors calculated by a iterative scheme (no noise case).

iteration number	T, M, N						
	1, 8, 9	1, 9, 9	2, 9, 9	3, 9, 9	3, 3, 9	3, 4, 9	2, 5, 9
5	2.987	2.989	2.894	2.894	2.796	2.914	3.034
10	2.967	2.967	2.835	2.832	2.641	2.835	2.953
15	2.960	2.960	2.802	2.798	2.591	2.802	2.897
20	2.960	2.959	2.779	2.775	2.570	2.779	2.854
25	2.958	2.959	2.762	2.757	2.559	2.762	2.819
30	2.957	2.959	2.748	2.744	2.550	2.748	2.791
35	2.957	2.959	2.737	2.732	2.534	2.737	2.767
40	2.957	2.959		2.723	2.537		2.747
45	2.957	2.959			2.532		2.730
50		2.958			2.527		2.715
55					2.522		2.702

전율 분포를 거의 정확하게 계산할 수 있었다. 특히 이 방법은 유전체의 분포에 대한 분별능력이 파장이 하까지 미친다는데 그 장점이 있다. 이것을 알고자 하는 유전체에 대해 낮은 주파수의 전자파를 사용할 수 있으므로, 투과 매질에서 손실이 매우 많거나 원거리 측정시 다른 방법으로는 거의 해결할 수 없지만, 이 방법으로는 가능하다는 것이다.

또 tomography와 같이 입사파를 scanning 할 필요가 없고, 위치를 임의로 취할 수 있다는 장점이다. 이러한 이론적인 면과 실제적인 면에서의 장점이 있으나 실제 측정을 행하여 산란전계를 얻을 경우에는 항상 측정오차나 잡음이 존재하게 되어서 이들이 미치는 영향이 매우 중요하다. 앞 II 장의 그림 2에서 보듯이 측정점의 위치가 유전체에 근접할수록 오차가 줄어들지만 실제 측정시에는 유전체 근방에서의 전계측정이 곤란하다. 이것은 유전체와 측정안테나간의 거리가 가까울수록 서로 상호결합(mutual coupling)이 있어서, 이론적으로 계산한 산란전계와는 크게 다른 값을 주게 되고, 또 측정안테나의 크기가 커서 하나의 측정점으로 보기가 어렵기 때문이다. 따라서 이러한 서로 반대되는 점을 최적화하는 것이 필요하며, 유전체 근방에서 전계를 측정하는 기술이 중요하게 된다.<sup>112)</sup> 또 표 2, 3 및 4에서 보듯이 일반적으로 잡음의 영향이 구하고자 하는 유전율 분포에 미치는 영향은 심각하며, 이에 대해 singular value 및 condition number를 계산함으로써 그 정도를 살펴보았다. 이 결과에서 보듯이 condition number가 매우 커져 만약 구하고자 하는 유전체의 크기가

가 커서 cell수가 많아지면, 직접 행렬을 역변환하는 것은 거의 불가능하게 된다. 다시말하면 이 condition number라는 것이 잡음이 얼마나 증폭되어 유전율 분포에 더해지나를 나타내는 변수이므로, 이를 작게 만들기 위하여 regularization operator를 도입하여 계산하였지만 그 결과는 원래의 유전율 분포를 평균화하는 형태로 나타났다. 여기서 사용한 regularization operator는 구하고자 하는 유전율 분포를 어느정도 평균화하여 random잡음을 서로 상쇄시키는 역할을 하지만 원래의 유전율 분포까지 평균화시켜 거의 알아볼 수 없었다. 물론 regularization operator를 다른 물리적인 제한조건으로부터 구할 수도 있지만 그 근거가 명확하지가 않다. 따라서 행렬을 직접 계산하지 않고 반복계산으로 역변화시키는 방법을 사용하였다. 이때 그림 5에서처럼 같은 반복방법을 유전율 분포가 연속적인 경우와 불연속적인 경우에 대해 적용한 결과, 연속적인 때는 거의 원래의 유전율 분포와 비슷한결과를 나타내고 불연속일 때는 그렇지 못하다. 이것은 어떠한 유전율 분포를 갖는 유전체에 대해서 역산란 계산을 하는가가 중요하다는 것을 보여준다.<sup>113,14)</sup>

이것은 제시된 새로운 역산란 계산방법의 적용범위를 한정시키는 것으로 그 이유를 좀 더 살펴보자. 먼저 유전율 분포에 불연속이 있거나 그 변화량이 매우 크면, 유전체 내부에서의 등가유기전류를 평면파의 중첩으로 나타낼 경우 high spatial frequency 성분이 많게 된다. 자유공간에서의 Green 함수를 평면파 spectrum으로 표시하여 보기 위해 변수 y에 대해 푸리에 변환을 취한다면 다음과 같다.

$$G(x, y; x', y'; k_0) = \frac{j \exp(-j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} |x - x'| + j\beta y)}{4\pi \sqrt{k_0^2 - \beta^2}} \tag{21}$$

식 (21)에서 보면 파수(wavenumber) 보다 높은 high spatial frequency 성분은 거리가 멀어질수록 지수함수적으로 감쇄시키게 되어, 측정점이 유전체로부터 멀리 떨어질수록 등가유기전류에 의해 복사되는 산란전계의 high spatial frequency 성분은 거의 존재하지 않게 된다. 따라서 Green 함수는 마치 low spatial frequency 필터와 같아진다. 이때 수신위치에서 측정 한 산란전계에 측정오차 잡음이 없으면 제시한 역산란 방법으로 원래의 유전율 값을 거의 정확히 계산할 수 있음을 본 논문의 전편<sup>11)</sup>에서 보였다. 이를 spatial frequency 성분으로 설명한 것이 그림 7이다. 그림 7에서  $\beta$ 는 spatial frequency를 나타내며,  $k_0$ 는 유전체 외부의 균일 매질에서의 파수(wavenumber)를 의미한다. 그림에서 보듯이 유전율 분포는 넓



은 spatial frequency 성분으로 구성되어 있어도, 유전체 외부로 복사된 산란전계의 spatial frequency 분포는 Green 함수가 low-pass 필터와 같아서 높은 spatial-frequency 성분은 거의 없어진다. 만약 그림 7 처럼 높은 spatial-frequency에 대해 파선과 같이 일정한 크기를 같은 잡음(white noise) 이 점선과 같은 산란전계에 더해질 경우 측정된 산란전계는 실선과 같이 되므로, 역산란방법으로 계산하면 유전율분포의 high spatial frequency 성분에 많은 오차가 생기게 된다. 이러한 이유로 유전율의 변화가 심하면 조그마한 잡음이 산란전계에 있더라도 재구성된 결과에는 엄청난 오차를 주게된다. 따라서 제시된 새로운 역산란방법은 임의의 유전상수분포를 갖는 유전체에 대해 전부 적용하기는 측정오차나 잡음의 영향 때문에 곤란하고, 다음과 같은 제한된 경우에 대해 좋은 결과를 얻을 수 있다. 첫째로 유전율 분포가 완만히 변화하여 이를 프리에변환시 낮은 파수 (spatial-frequency)영역에 거의 모든 정보가 들어있을 경우로, 이때는 그림 7에서 보인바와 같이  $|\beta| > k_0$  영역에서의 정보를 배제시킬 수 있으므로, 잡음의 영향을 줄일 수 있다. 둘째로, 유전체의 구조가 원형보다 직선형일 경우가 유리한데, 이는 직선형일 경우 cell의 중심점과 측정점간의 거리변화가 원형보다 많아서 역변환 해야 할 행렬이 더 stable 해지므로 계산상 오차가 줄어들기 때문이다.

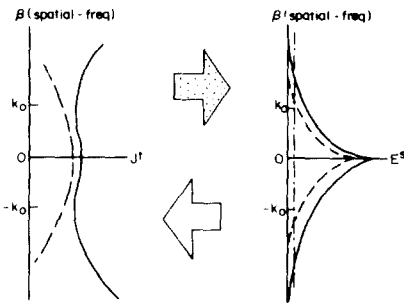


그림 7. 파수영역에서의 역산란 원리  
 Fig. 7. Principle of the inverse scattering in the spatial-frequency (spectral) domain.

V. 결 론

모멘트방법을 이용한 새로운 역산란 방법을 실제 측정오차, 계산오차 및 잡음등이 존재하는 상황에 대해 적용하여 보고, 그들이 재구성된 유전율 값에 미치는 영향을 줄이기 위하여 여러가지의 방법을 써

서 수치계산을 행하였다. 일반적으로 산란전계를 유전체로부터 멀리 떨어진 곳에서 측정하거나, 유전체의 유전율분포가 급격히 변화하거나, 유전체의 모양이 원형에 가까울수록 측정오차등의 영향을 많이 받음을 알 수 있다. 이들의 영향을 줄이기 위하여 SVD, 반복계산, 다중입사등의 방법을 적용시켜 보았다.

개발된 새로운 역산란방법은 물체분별력이 파장이 하까지 가능하다는 장점이 있으나, 물체의 크기가 크면 계산용량이 막대하게 많아지며 산란전계의 세기뿐 아니라 위상까지 측정해야 하고 측정오차에 대해 너무 민감하다는 문제점이 있음을 알 수 있었다. 이들에 대한 개선책으로 파수 (spatial frequency) 영역에서 모멘트방법을 사용한 역산란 방법을 연구중이다.

參 考 文 獻

- [1] 김세윤, 이재민, 나정용, "모멘트방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법, I : 이론" 전자공학회논문지 제25권 3호, pp. 15-24, 1988.
- [2] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, John Wiley & Sons, 1977.
- [3] H.G. Schmidt-Weinmar, "Spatial resolution of subwave-length source from optical far-zone data," appearing in *Inverse Source Problems in Optics*, H.P. Baltes, ed., Topics in Current Physics, vol. 9, Springer-Verlag, 1978.
- [4] G.A. Deschamps and H.S. Cabayan, "Antenna synthesis and solution of inverse problems by regularization method," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-20, no. 3, pp. 268-274, May 1972.
- [5] T.K. Sarkar, K. Siarkeiwica, and R. Stratton, "Survey of numerical methods for solution of large system of linear equations for EM field problems," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-29, no. 6, Nov. 1981.
- [6] D.W. Sweeney and C.M. Vest, "Reconstruction of three dimensional refraction index fields from multi-direction interferometric data," *Appl. Opt.*, vol. 12, no. 11, pp. 2649-2664, 1973.
- [7] M. Bertero and C. Demol, "Stability problems in inverse diffraction," *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. AP-29, no. 2, pp. 368-372, Mar. 1981.

- [8] D.S. Jones, *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*, pp. 91-97, Oxford Univ. Press, 1979.
- [9] G. Golub and W. Kahan, "Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix," *J. SIAM Num, Anal.*, vol. 2, no. 2, pp. 205-224, 1965.
- [10] P.A. Businger and G.H. Golub, "Algorithm 358: singular value decomposition of a complex matrix," *ACM Comm.*, vol. 12, no. 10, pp. 564-565, Oct. 1969.
- [11] W.K. Pratt, *Digital Image Processing*, John Wiley & Sons, 1978.
- [12] A.D. Yaghjian, "Efficient computation of antenna coupling and fields within the near-field region," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-30, no. 1, pp. 113-127, Jan. 1982.
- [13] 윤태훈, "산란된 전자파로부터 유전체 분포의 계산," 한국과학기술원 전기 및 전자공학과, 석사학위논문, 1982.
- [14] S.A Johnson, T.H. Yoon, and J.W. Ra, "Inverse scattering solution of the scalar Helmholtz wave equation by a multiple source moment method," *Electronic. Lett.*, vol. 19, pp. 130-131, 1983.