

論 文

最小統計的係數感도를 갖는 狀態空間 디지털 필터의 合成

正會員 文 庸 善* 正會員 朴 鍾 安**

Synthesis of the State-space Digital Filter with Minimum Statistical Coefficient Sensitivity

Yong Sun MOON*, Jong An PARK** *Regular Members*

要 約 無限語長 狀態 공간 디지털 필터를 有限語長 狀態 공간 디지털 필터로 실현할 때 量子化 誤差인 狀態 공간 계수 [ABCD]의 미소 변동에 기인한, 출력 오차 分散 $\sigma^2_{\Delta Yc}$ 을 $\Delta[ABCD]$ 의 分散 σ_{Δ}^2 으로 正規化하였다. 즉, $S = E[\Delta Yc^2] / \sigma_{\Delta}^2$ 을 統計的 感度로 정의하고 시스템 구조적 성질을 나타내는 可制御性 Gramian과 可觀測性 Gramian, 그리고 2차 모드 해석 방법을 狀態 공간 디지털 필터에 확장해서 最小 統計的 感度를 갖는 실현 구조를 합성하였으며 시뮬레이션을 통하여 최소 구조 합성의 유효성을 확인하였다.

ABSTRACT In this paper, the output error variance $\sigma^2_{\Delta Yc} = E[\Delta Yc^2]$, due to the differential variation of the state-space coefficient [ABCD], which is the coefficient quantization error, is normalized on the variance σ_{Δ}^2 of $\Delta[ABCD]$, for cases that infinite wordlength state-space digital filter is realized by the finite one.

That is, defining $S = E[\Delta Yc^2] / \sigma_{\Delta}^2$ as the statistical sensitivity and extending controllability gramian, observability gramian, and 2nd order mode analysis method to the state space digital filter, we synthesize the realization structure with the minimum statistical sensitivity and prove the efficiency of the minimum statistical sensitivity structure synthesis by the simulation.

I. 서 론

디지털 신호 처리는 아날로그 신호처리와 비

교해서 精度, 再演性, 柔軟性, 그리고 多重化 등에서 우수한 특징을 갖는다. 그러나, 기본 적인 알고리즘으로써 디지털 필터링과 이산 푸리에 변환(DFT)을 마이크로프로세서나 전용 하드웨어에서 실행하는 경우, 설계 명세 조건(Specification)에 적합한 전달함수를 설계했다 할지라도 시스템 실현 수단의 물리적 제약 즉 有限語長(Finite Wordlength)의 수치 표현 및 有限語長

* ** 朝鮮大 工大 電子工學科
Dept. of Electronics Engineering Chosun University
論文番號 : 88-52(接受 1988. 10. 25)

의 연산 실행에 기인한 매개 변수(parameter)의 미소 변동 때문에 内部 量子化 誤差(係數 量子化 誤差, Roundoff 誤差 등)가 발생하게 되어 정확한 출력 신호를 얻을 수 없다.

이와 같은 量子化 誤差는 하드웨어 실현시 語長의 증가에 따라서 감소하지만 신호 처리 프로세서의 처리 속도의 저하 및 규모의 증대를 초래한다. 그러므로 最小 語長으로 오차 허용 범위 이내에서 설계 명세 조건을 충족시킬 수 있는 디지털 필터 합성이 중요하다. 디지털 필터의 합성에 있어서 입·출력 관계를 나타내는 전달 함수 표현의 경우 극·영점 등 주파수 특성의 해석은 정성적으로 가능하지만 量子化 誤差, 計算 順序 등 디지털 필터의 내부 구조에 의존해서 변화하는 해석 문제를 계통적으로 취급하는 것은 곤란하다. 이에 반하여 상태 공간에 의해서 표현된 디지털 필터 즉 상태 공간 디지털 필터(State-space Digital Filter:SSDF)는 내부 실현 구조를 규정할 뿐 아니라 동일한 전달 함수를 갖는 실현 구조라 할지라도 等價變換에 의해서 다른 필터 구조를 표현할 수 있으므로 이러한 상태 공간 표현을 이용한 Roundoff誤差 最小 構造, 係數 量子化 誤差 最小 構造 등의 合成에 관한 연구가 주목되고 있다(1~3). 또한, 상태 공간 표현은 기초적인 표현 및 安定性 判別 문제 등에서 선형 시스템 이론에 대한 의존도가 높기 때문에 선형 시스템 이론으로 상태공간 디지털 필터의 해석이 가능하다. 그리고, 선형 시스템 이론에서 전달 함수 표현과 상태 공간 표현을 결합하는 개념으로써 可制御性과 可觀測性이 있으며 이러한 可制御性과 可觀測性의 크기로 해서 시스템의 구조적 성질을 해석하는 방법이 Moore로부터 제안되었다(4~7).

본 논문에서는 無限語長 상태 공간 디지털 필터를 有限語長 상태 공간 디지털 필터로 실현할 때의 係數 量子化誤差인 상태 공간의 매개 변수 A, B, C, 그리고 D의 미소 변동이 디지털 필터의 係數 感度로서 統計的 係數 感度を 정의하고 선형 시스템 이론 즉 可制御性의 크기, 可觀測性의 크기, 그리고 2차 모드의 해석 방법을 상태 공간 디지털 필터에 확장해서 統計的 感도가

최소가 되는 실현 구조를 合成하였다.

II. 상태 공간 디지털 필터

II-1. 디지털 필터의 상태 공간 표현

선형, 시불변 디지털 필터의 입·출력 관계를 나타내는 전달 함수는 식(1)과 같으며 이의 標準形(canonical form) 실현 구조는 그림 1과 같다(8).

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (1)$$

그림 1에서 遲延 素子の 출력을 狀態 變數 $x_1(k), x_2(k) \dots x_N(k)$ 로 하면 상태 방정식 및 출력 방정식은 식(2)와 식(3)으로 표현된다(9).

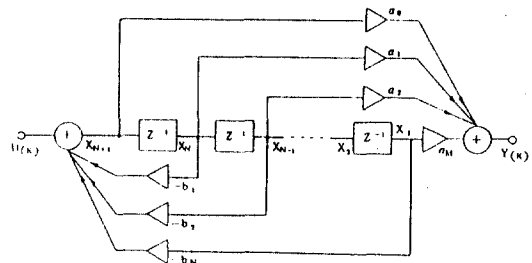


그림 1 디지털 필터 표준형 실현구조의 블럭선도.
Block diagram for the canonical form realization structure of the digital filter.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (2)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k) \quad (3)$$

식(2)와 식(3)에서 A, B, C, 그리고 D는 상태 변수의 Parameterization으로서 식(4)와 같은 次元(Dimension)을 갖는 행렬이며 이와 같이 실현 구조를 상태 방정식 및 출력 방정식으로 표현된 디지털 필터를 공간 디지털 필터(State-

Space Digital Filter:SSDF)라 하며 SSDF [ABCD]로 표기한다.

$$\frac{N}{1} \left[\begin{array}{c|c} N & 1 \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \quad (4)$$

(N : 디지털 필터의 차수)

이러한 상태 공간 디지털 필터의 전달 함수는 식(2)와 식(3)을 z變換하여 식(5)처럼 구해진다.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbf{C}(\mathbf{Z}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C} \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{Z}\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{B} + \mathbf{D} \end{aligned} \quad (5)$$

II - 2. 상태 공간 디지털 필터의 等價變換

상태 벡터 $\mathbf{x}(k)$ 로 한 상태 공간 디지털 필터 SSDF[ABCD]를 식(6)과 같이 임의의 正則行列(Nonsingular Matrix) $\mathbf{T}(N \times N)$ 을 이용해서 等價變換하면 새로운 상태 벡터 $\mathbf{x}'(k)$ 로 하는 상태 공간 디지털 필터 SSDF[$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$, $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, \mathbf{CT} , \mathbf{D}]를 구할 수 있다.

$$\mathbf{x}'(k) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(k) \quad (6-a)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{AT}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{B}u(k)$$

$$\mathbf{x}'(k+1) = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})\mathbf{x}'(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{CT}\mathbf{x}'(k) + \mathbf{D}u(k) \quad (6-b)$$

따라서 상태 공간 디지털 필터 SSDF[ABCD] (상태 벡터 \mathbf{x})는 等價變換行列(Equivalent Transformation Matrix) \mathbf{T} 가 제한 조건이 없는 임의의 正則行列이므로 等價變換에 의해서 여러 종류의 다른 구조를 갖는 상태 공간 디지털 필터 SSDF[$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$, $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, \mathbf{CT} , \mathbf{D}] (상태 벡터 \mathbf{x}')로 변환이 가능하다. 상태 공간 디지털 필터 SSDF[ABCD]와 SSDF[$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$, $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, \mathbf{CT} , \mathbf{D}]는 식(7)과 같이 동일한 전달 함수를 갖는 것으로 부터 等價變換이 證明되어진다.

(전달 함수 불변)

$$\begin{aligned} H'(z) &= \mathbf{D}' + \mathbf{C}'(\mathbf{Z}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}' \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{CT}(\mathbf{Z}\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})^{-1} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{CT}\{\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Z}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}\}^{-1} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{CTT}^{-1}(\mathbf{Z}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{TT}^{-1}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{C}(\mathbf{Z}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \\ &= H(z) \end{aligned} \quad (7)$$

II - 3. 상태 공간 디지털 필터의 量子化 效果
 상태 공간 디지털 필터 SSDF[ABCD]의 상태 방정식 및 출력 방정식을 블록 선도로 나타내면 그림 2와 같다.

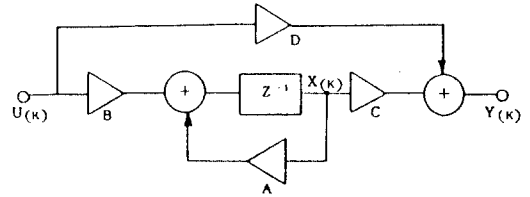


그림 2 無限語長 상태공간 디지털 필터 Infinite wordlength SSDF.

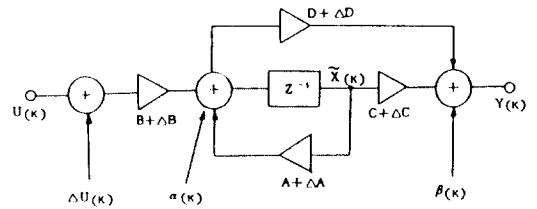


그림 3 有限語長 상태공간 디지털 필터 Finite wordlength SSDF.

그림 2는 無限語長 實現의 상태 공간 디지털 필터를 나타내지만 실현의 물리적 제약 조건에 기인한 특성 약화를 고려한다면 상태 공간 디지털 필터의 상태 방정식 및 출력 방정식은 식(8)로, 그리고 블록 선도는 그림 3으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= [\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}] \tilde{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}] \\ &\quad \cdot [u(k) + \Delta u(k)] + \alpha(k) \\ \tilde{y}(k) &= [\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}] \tilde{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{D} + \Delta \mathbf{D}] \\ &\quad \cdot [u(k) + \Delta u(k)] + \beta(k) \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)에서 $\Delta u(k)$ 는 입력 신호 $u(k)$ 를 A/D 변환(Analog-to-Digital Converter)할 때 발생한 誤差, $\Delta \mathbf{A}$, $\Delta \mathbf{B}$, $\Delta \mathbf{C}$, $\Delta \mathbf{D}$ 는 係數 量子化 誤差, $\alpha(k)$ 는 狀態 벡터의 量子化 誤差, 그리고 $\beta(k)$ 는 出力 量子化 誤差이다. 그러므로 有限語長 實現에 기인한 狀態 벡터 오차 $\mathbf{e}_x(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)$, 출력 오차 $\Delta y(k) = \tilde{y}(k) - y(k)$ 는 식(9)와 식(10)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{e}_x(k) + \Delta \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{B}u(k) \\ &\quad + \mathbf{B}\Delta u(k) + \alpha(k) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{e}_x(k) + \Delta \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{D}u(k) \\ &\quad + \mathbf{D}\Delta u(k) + \beta(k) \end{aligned} \quad (10)$$

식(9)와 식(10)을 $\mathbf{e}_x(0) = 0$ 로 해서 $\Delta y(k)$ 에 관해서 풀면 식(11)이 얻어진다.

$$\Delta y(k) = \Delta y_a(k) + \Delta y_r(k) + \Delta y_c(k) \quad (11)$$

$$\Delta y_a(k) = \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B} \Delta u(j) + \mathbf{D} \Delta u(k)$$

$$\Delta y_r(k) = \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \alpha(j) + \beta(k)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_c(k) &= \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \{ \Delta \mathbf{A}\mathbf{x}(j) + \Delta \mathbf{B}u(j) \} \\ &\quad + \Delta \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{D}u(k) \end{aligned}$$

식(11)에서 Δy_a 는 입력 신호의 양자화에 기인한 출력 오차이며, 또한 Δy_c 는 계수 양자화, Δy_r 는 α 와 β 에 기인해서 발생한 출력 오차이다.

III. 狀態공간 디지털 필터의 統計的 感度 解析

有限語長 狀態 공간 디지털 필터에서 狀態 공간 계수 행렬의 微小 變動에 기인한 특성 약화만을 고려한 狀態 공간 디지털 필터 SSDF [$\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}$, $\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}$, $\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}$, $\mathbf{D} + \Delta \mathbf{D}$]의 狀態 방정식 및 출력 방정식은 식(11)로 표현되며 이를 블록 선도로 나타내면 그림 4와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= [\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(k)] \mathbf{x}(k) + [\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}(k)] \\ &\quad u(k) \end{aligned} \quad (11-a)$$

$$y(k) = [\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}(k)] \mathbf{x}(k) + [\mathbf{D} + \Delta \mathbf{D}(k)] u(k) \quad (11-b)$$

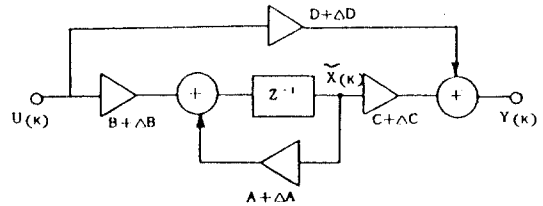


그림 4 계수 양자화 오차 해석을 위한 블록선도
Block diagram for coefficient quantization error analysis.

식(11)로부터 출력 오차 $\Delta y_c(k) = \tilde{y}(k) - y(k)$ 는 식(12)와 같이 구해지며 식(12)를 블록 선도로 나타내면 그림 5로 표현된다.

$$\mathbf{e}_x(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{e}_x(k) + \Delta \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{B}u(k) \quad (12-a)$$

$$\Delta y_c(k) = \mathbf{C}\mathbf{e}_x(k) + \Delta \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{D}u(k) \quad (12-b)$$

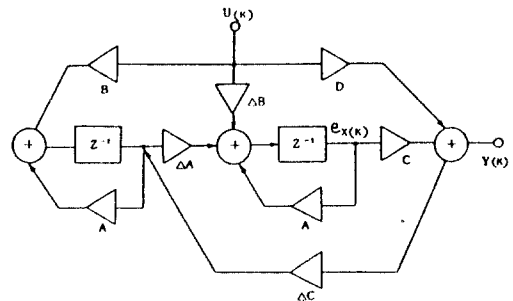


그림 5 狀態공간 계수의 미소변동에 따른 출력오차 해석 모델.
Output error analysis model based on the differential variation of the state-space coefficient.

식(11)에서 계수 행렬의 미소 변동 요소를 식(13)와 같이 상호 상관이 없는 白色雜音으로, 그리고 입력 신호 $u(k)$ 는 $E[u(k)] = 0$, $E[u^2(k)] = 1$ 인 正規白色信號로 가정할 때 정상 상태에서 出力誤差分散 $E[\Delta y_c^2]$ 은 식(14)와 같이 구해진다.

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{cc} \Delta \mathbf{A} & \Delta \mathbf{B} \\ \Delta \mathbf{C} & \Delta \mathbf{D} \end{array} \right] \right)_{ii}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0; (\cdot)_{ii} = \text{정수} \\ \text{다른 미소 변동요소와 상관이 없고} \\ \text{평균 0, 분산 } \sigma^2 \text{인} \\ \text{백색오차; } (\cdot)_{ii} \neq \text{정수} \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} E[\Delta y_c^2(k)] &= E[\Delta y(k) \Delta y^t(k)] \\ &= \mathbf{C} E[\mathbf{e}_x(k) \mathbf{e}_x^t(k)] \mathbf{C}^t \\ &\quad + E[\Delta \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^t(k) \Delta \mathbf{C}^t(k)] \\ &\quad + E[\Delta \mathbf{D}^2(k) u^2(k)] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \{ \text{tr}[\mathbf{M}(\mathbf{a}_i) \mathbf{K}] \} \mathbf{W}_{ii} + \sigma^2 \text{tr}[\mathbf{M}(\mathbf{b}^t) \mathbf{W}] \\ &\quad + \sigma^2 \text{tr}[\mathbf{M}(c) \mathbf{K}] + \sigma^2 m(d) \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)에서 \mathbf{a}_i 는 계수 행렬 \mathbf{A} 의 i 행이며 $\mathbf{M}(\cdot)$ 은 식(15)로 정의된 함수이다. 또한 \mathbf{K} 와 \mathbf{W} 는 식(16)과 식(17)로 정의한 可制御性 Gramian(狀態 벡터의 共分散 行列: $E[\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^t(k)]$), 可觀測性 Gramian(誤差分散 行列 $E[\mathbf{e}(k) \mathbf{e}^t(k)]$)이다.^(10, 11)

$$\mathbf{M}(v) = \text{diag}(m(v_1), \dots, m(v_n)) \quad (15)$$

$$m(v_i) = \begin{cases} 1; v_i \neq \text{정수} \\ 0; v_i = \text{정수} \end{cases}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \mathbf{B}^t \mathbf{A}^{it} = \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A}^t + \mathbf{B} \mathbf{B}^t \quad (16)$$

$$\mathbf{W} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^{it} \mathbf{C}^t \mathbf{C} \mathbf{A}^i = \mathbf{A}^t \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{C} \quad (17)$$

그러므로, 계수 행렬 $[\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}]$ 의 微小變動에 기인한 출력오차의 統計的 程度를 나타내기 위

해서 出力誤差의 分散 $E[\Delta y_c^2]$ 를 계수 행렬의 微小變動의 分散 σ^2 으로 正規化한 것 즉 식(18)을 統計的 感度로 정의한다.

$$\begin{aligned} S &= \frac{E[\Delta y_c^2]}{\sigma^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ \text{tr}[\mathbf{M}(\mathbf{a}_i) \mathbf{K}] \} \mathbf{W}_{ii} + \text{tr}[\mathbf{M}(\mathbf{b}^t) \mathbf{W}] \\ &\quad + \text{tr}[\mathbf{M}(c) \mathbf{K}] + m(d) \end{aligned} \quad (18)$$

식(18)을 이용해서 統計的 感度 最小의 상태공간 디지털 필터의 合成은 복잡하기 때문에 문제를 단순화하기 위해서 식(19)와 같이 상태공간 계수 행렬의 모든 요소가 微小變動하는 것으로 가정하면 統計的 感度 S 는 식(20)과 같다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{M}(\mathbf{b}^t) = \mathbf{M}(c) = \mathbf{I}_n, \quad m(d) = 1 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} S &= \text{tr}(\mathbf{K}) \text{tr}(\mathbf{W}) + \text{tr}(\mathbf{W}) + \text{tr}(\mathbf{K}) + 1 \\ &= \{ \text{tr}(\mathbf{K}) + 1 \} \{ \text{tr}(\mathbf{W}) + 1 \} \end{aligned} \quad (20)$$

식(20)으로 부터 상태공간 디지털 필터의 實現構造는 可制御性과 可觀測性 Gramian과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다.

IV. 統計的 感度 最小化

正則 行列 \mathbf{T} 를 이용해서 等價 變換된 상태공간 디지털 필터 SSDF $[\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{C} \mathbf{T}, \mathbf{D}]$ 의 可制御性 Gramian, 可觀測性 Gramian은 $\mathbf{K}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{T}^{-t}$, $\mathbf{W}' = \mathbf{T}^t \mathbf{W} \mathbf{T}$ 로 표현되므로 SSDF $[\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{C} \mathbf{T}, \mathbf{D}]$ 의 統計的 感度는 식(21)이 된다.

$$S' = \{ \text{tr}(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{T}^{-t}) + 1 \} \{ \text{tr}(\mathbf{T}^t \mathbf{W} \mathbf{T}) + 1 \} \quad (21)$$

식(21)에서 等價 變換 行列 \mathbf{T} 를 분해하면 식(22)와 같이 표현할 수 있으며 식(22)에서 \mathbf{R} 과 \mathbf{U} 는 $n \times n$ 直交 行列(Orthogonal Matrix), \mathbf{D} 는 正定한 對角 行列(Diagonal Matrix), \mathbf{T}_0 는 $\mathbf{T}_0 \mathbf{T}_0^t = \mathbf{K}$ 의 조건을 만족하는 正則 行列이다.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 \mathbf{R} \mathbf{D} \mathbf{U} \quad (22)$$

식(22)의 等價 變換 行列의 分解를 이용하면 S' 는 식(23)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} S' &= \{ \text{tr}(\mathbf{D}^{-2}) + 1 \} \{ \text{tr}(\mathbf{D}^2 \mathbf{R}^t (\mathbf{T}_0^t \mathbf{W} \mathbf{T}_0) + 1) \} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n d_i^{-2} + 1 \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n d_i^2 P_i^2 + 1 \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\text{Diag } P_i^2 = \mathbf{R}^t (\mathbf{T}_0^t \mathbf{W} \mathbf{T}_0) \mathbf{R}$$

식(23)으로 표현된 統計的 感度 S' 를 최소가 되게 하는 等價 變換 行列 \mathbf{T} 의 分解 成分 즉 \mathbf{U} , \mathbf{D} , 그리고 \mathbf{R} 은 다음과 같이 유도된다.

i) 直交 行列 \mathbf{U}

식(23)에 直交 行列 \mathbf{U} 의 요소는 없기 때문에 임의의 直交 行列이면 된다.

ii) 對角 行列 \mathbf{D}

Cauchy-Schwarz의 부등식을 식(23)에 적용하면 식(24)가 얻어진다.

$$\begin{aligned} S' &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(d_i^{-2} + \frac{1}{n} \right) \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(d_i^2 P_i^2 + \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &\geq \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(d_i^{-2} + \frac{1}{n} \right) \left(d_i^2 P_i^2 + \frac{1}{n} \right)} \right\}^2 \quad (24) \end{aligned}$$

단, 등호는

$$d_i^{-2} + \frac{1}{n} = \alpha \left(d_i^2 P_i^2 + \frac{1}{n} \right) \quad \forall \alpha = \text{정수} \quad (25)$$

일 때 성립하며 특히 식(24)를 변형하면 식(26)의 부등식이 된다.

$$\begin{aligned} S' &= \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(d_i^{-2} + \frac{1}{n} \right) \left(d_i^2 P_i^2 + \frac{1}{n} \right)} \right\}^2 \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^n P_i + 1 \right)^2 \quad (26) \end{aligned}$$

단, 등호는 $d_i = P_i^{-1/2}$ 일 때 성립한다. 그러므로, S' 가 최소값을 갖기 위해서는 對角 行列 \mathbf{D} 는 식(27)이 되지 않으면 안된다.

$$\mathbf{D} = \text{Diag} (P_1^{-1/2}, P_2^{-1/2}, \dots, P_n^{-1/2}) \quad (27)$$

iii) 直交 行列 \mathbf{R}

統計的 感度가 최소가 되기 위해서는 식(26)의

$\left(\sum_{i=1}^n P_i + 1 \right)^2$ 이 최소가 되어야 한다. P_i 는 對

稱 正定 行列 $\mathbf{R}^t (\mathbf{T}_0^t \mathbf{W} \mathbf{T}_0) \mathbf{R}$ 의 대각 요소 P_i^2 의

제곱근이며, $\sum_{i=1}^n P_i$ 가 최소가 될 때 $\left(\sum_{i=1}^n P_i + 1 \right)^2$

은 최소가 된다. 또한 對稱 正定 行列 $\mathbf{T}_0^t \mathbf{W} \mathbf{T}_0$ 의 固有值를 ρ_i^2 이라 할 때 식(28)이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^n P_i \geq \sum_{i=1}^n \rho_i \quad (28)$$

단, 등호는

$$\mathbf{R}^t (\mathbf{T}_0^t \mathbf{W} \mathbf{T}_0) \mathbf{R} = \text{diag} (\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_n^2) \quad (29)$$

일 때만 성립한다.

그러므로,

$$S' \geq \left(\sum_{i=1}^n \rho_i + 1 \right)^2 \quad (30)$$

그리고, 식(31)로부터 $\mathbf{T}_0^t \mathbf{W} \mathbf{T}_0$ 의 固有值는 $\mathbf{K}' \mathbf{W}'$ 의 固有值의 제곱근 즉 2차 모드와 동일하므로 $\mathbf{K}' \mathbf{W}'$ 의 固有值를 θ_i 라 할 때 식(30)은 식(32)로 표현된다.

$$\mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{K} \mathbf{T}_0^t \mathbf{T}_0^t \mathbf{W} \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0^t \mathbf{W} \mathbf{T}_0 \quad (31)$$

$$S' \geq \left(\sum_{i=1}^n \rho_i + 1 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \theta_i + 1 \right)^2 \quad (32)$$

지금까지의 狀態 空間 디지털 필터의 統計的 感度를 최소가 되기 위한 유도 과정을 요약하면 다음과 같다.

(1) 統計的 感度の 最小值 S_{\min} 은 식(33)과 같다.

$$S_{\min} = \left(\sum_{i=1}^n \theta_i + 1 \right)^2 \quad (33)$$

(2) 상태 공간 디지털 필터의 실현구조 SSDF [ABCD]가 주어질 때 統計的 感度 最小 狀態空

間 디지털 필터 SSDF($T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D$)를 실현하기 위한 等價變換 行列 T 는 식(34)와 같이 구해진다.

$$T = T_0 RDU$$

$$T_0 : T_0^t T_0 = K$$

$$R : R^t (T_0^t WT_0) R = \text{Diag}(\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2)$$

$$D : \text{Diag}(\theta_1^{-1/2}, \theta_2^{-1/2}, \dots, \theta_n^{-1/2})$$

U : 임의의 직교행렬

V. 시뮬레이션

설계 명세 조건, 즉 통과 대역 차단 주파수 $\omega_p = 0.2\pi$ [rad/sec], 저지 대역 차단 주파수 $\omega_s = 0.3\pi$ [rad/sec], 통과 대역 허용 오차 $\delta_1 = -0.1$ dB, 그리고 저지 대역 허용 오차 $\delta_2 = -26$.

71dB를 갖는 타원형(Elliptic) 디지털 필터로 근사할 때 전달 함수 및 주파수 응답 곡선은 식(35)와 그림 6과 같다.

$$H(z) = \frac{0.05634 - 0.9352 \times 10^{-3} z^{-1} - 0.9352 \times 10^{-3} z^{-2}}{1 - 2.191z^{-1} + 1.783386z^{-2} - 0.543463z^{-3}} + 0.05634z^{-3} \quad (35)$$

식(35)를 표준형(Canonical Form)으로 실현하는 상태 공간 디지털 필터의 係數 行列은 식(36)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{matrix} & 3 & 1 \\ 3 & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 1 & \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{matrix}$$

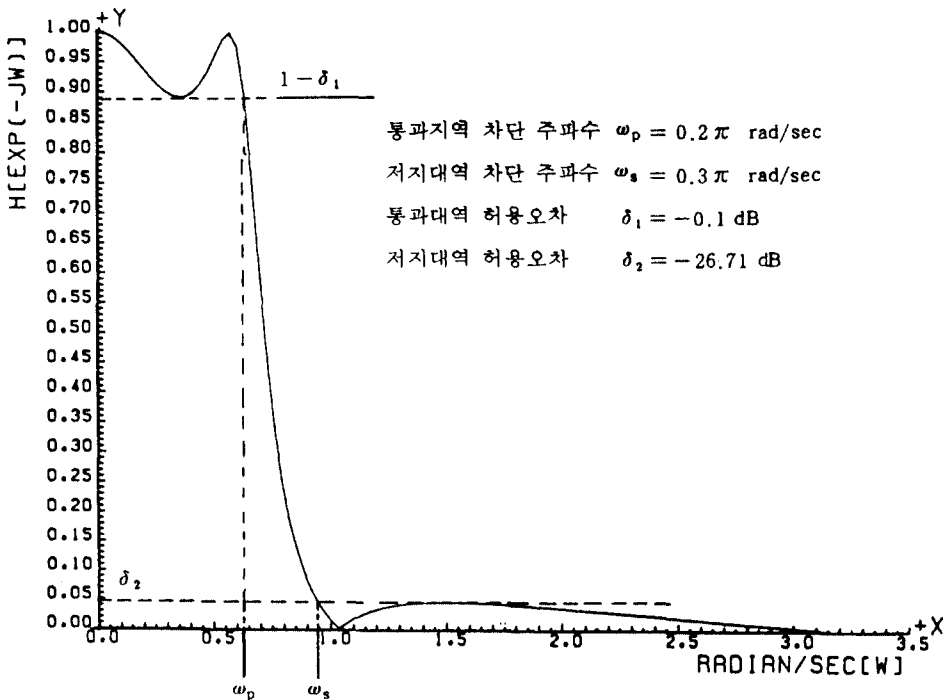


그림 6 타원형 디지털 필터 주파수 특성 곡선
Frequency characteristic curve of the elliptic digital filter.

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5434 & -1.7833 & 2.1290 & 1 \\ 0.08695 & -0.10141 & 0.11901 & 0.05634 \end{bmatrix}$$

또한, 종속형 (Cascade Form) 과 병렬형 (Parallel Form) 으로 실현하는 경우 전달 함수 및 상태 공간 표현은 다음과 같다.

○ 종속형 실현

$$H(z) = \frac{(1 - 1.0166z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 1.4461z^{-1} + 0.7957z^{-2})} \cdot \frac{0.05634(1 + z^{-1})}{(1 - 0.8630z^{-1})} \quad (37)$$

$$\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6830 & 0.2043 & 0.4295 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.7957 & 1.4461 & 1 \\ 0.09482 & 0.01151 & 0.0241 & 0.05634 \end{bmatrix} \quad (38)$$

○ 병렬형 실현

$$H(z) = 0.05634 + \frac{0.25999z^{-1}}{1 - 0.6830z^{-1}} + \frac{-0.14098z^{-1} + 0.175583z^{-2}}{1 - 1.4461z^{-1} + 0.7957z^{-2}} \quad (39)$$

$$\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8630 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.7959 & 1.4461 & 1 \\ 0.25999 & 0.17558 & -0.14098 & 0.5634 \end{bmatrix} \quad (40)$$

식(36)의 실현 구조로부터 統計的 感度 最小實現 構造로 등가 변환시키기 위해서 식(34)를 만족하는 等價 變換 行列 $T = T_0 RDU$ 를 구하면 표 1과 같다.

표 1 등가 변환행렬 $T = T_0 RDU$ ($U=I$)
Equivalent transformation matrix $T = T_0 RDU$ ($U=I$).

T	1.83527 3.84666 5.45073	6.42450 5.88437 3.00215	5.98437 1.25925 -1.49519
T₀	4.65352 5.28346 4.65352	2.52622 0.0000018 -2.52622	0.24100 -0.42453 0.24100
R	0.67729 -0.63656 0.36884	0.71785 0.462045 -0.52007	0.16107 0.61749 0.769907
D	1.12413 0 0	0 1.46601 0	0 0 2.39808

표 2 최소 통계적 감도를 위한 상태 공간 계수
State-Space coefficient for minimum statistical sensitivity.

T⁻¹AT	0.83023 0.39013 -0.03066	-0.39035 0.68720 0.36525	-0.03053 -0.36503 0.61166
T⁻¹B	0.41811 -0.31922 0.21447		
CT	0.41823	0.31923	0.21473
D	0.05634		

표 1과 같이 구해진 等價 變換 行列 T 를 이용하여 統計的 感度 最小 狀態 空間 係數를 구하면 표 2와 같다.

상태 공간 디지털 필터의 實現 構造에 對한 可制御性 Gramian, 可觀測性 Gramian, 그리고 식(20)으로 정의된 統計的 感도를 구하면 표 3과 같다.

그림 7처럼 입력 $u(k)$ 로써 평균 0 분산 1인 정규 난수(Normalized Random Signal)를 발생

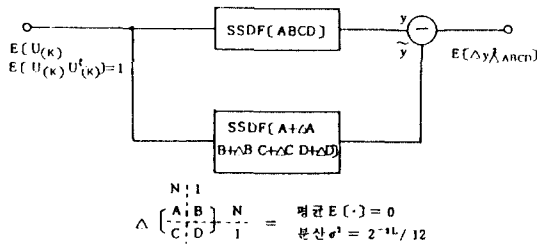


그림 7 상태공간 계수의 미소변동에 기인한 출력오차 분산 시뮬레이션 블럭선도
Block diagram for output error variance simulation due to differential variation of state-space coefficient.

하여 상태 공간 계수 행렬의 微小變動 즉 $E[\Delta \text{상태 공간 계수 행렬}] = 0$, $E[(\Delta \text{상태 공간 계수 행렬})^t] = 2^{-2L} / 12$ (L : 양자화 비트의) 이론치 및 시뮬레이션치는 구하면 그림 8 과 같다.

표 3 실현구조의 통계적 감도
Statistical sensitivity of the realization structure

구분 실현	K			W			S
표준형	28.0	24.4	15.3	0.06	-0.13	0.1	134.41
	24.4	28.0	24.4	-0.13	0.31	0.23	
	15.3	24.4	28.0	0.1	-0.23	0.19	
중속형	16.3	7.74	4.59	0.01	-0.01	0.02	39.95
	7.74	7.75	6.24	-0.01	0.07	-0.08	
	4.59	6.24	7.75	-0.02	-0.08	0.12	
병렬형	1.87	1.78	2.6	0.12	0.05	-0.01	23.80
	1.78	7.75	6.24	0.05	-0.08	-0.06	
	2.6	6.24	7.75	-0.01	-0.06	0.08	
통계적 감도	0.79	0	0	0.79	0	0	5.72
최소형	0	0	0.17	0	0	0.17	

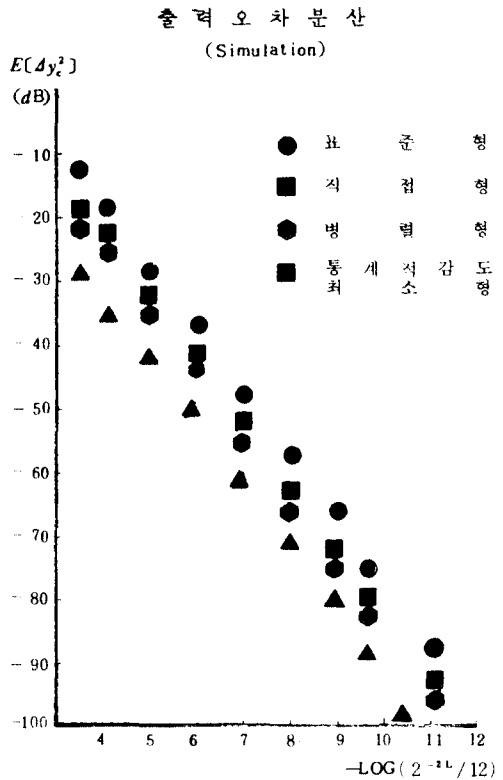
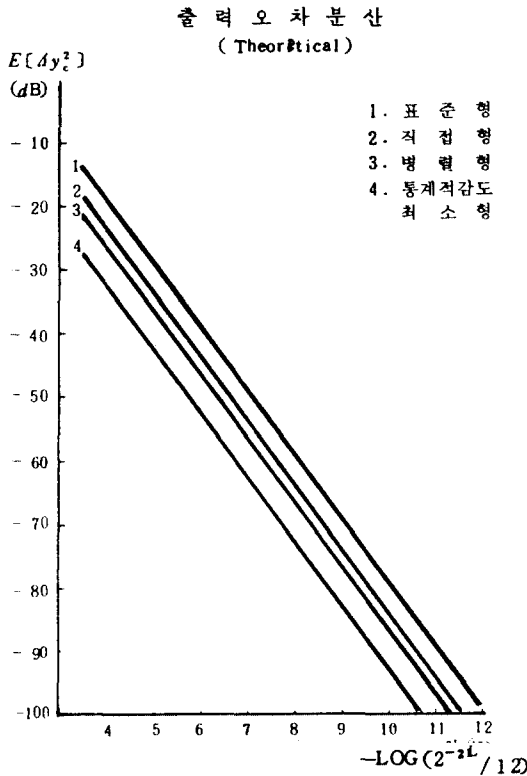
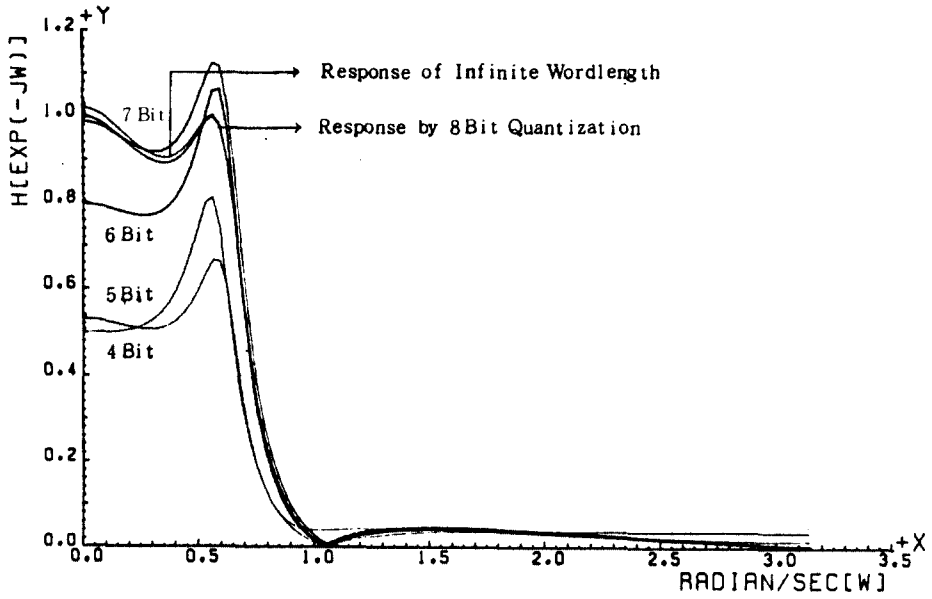


그림 8 상태공간계수의 미소변동에 기인한 출력오차 분산
Output error variance due to differential variation of state-space coefficient.

표준형 狀態공간 디지털 필터



통계적 감도최소형 狀態공간, 디지털 필터

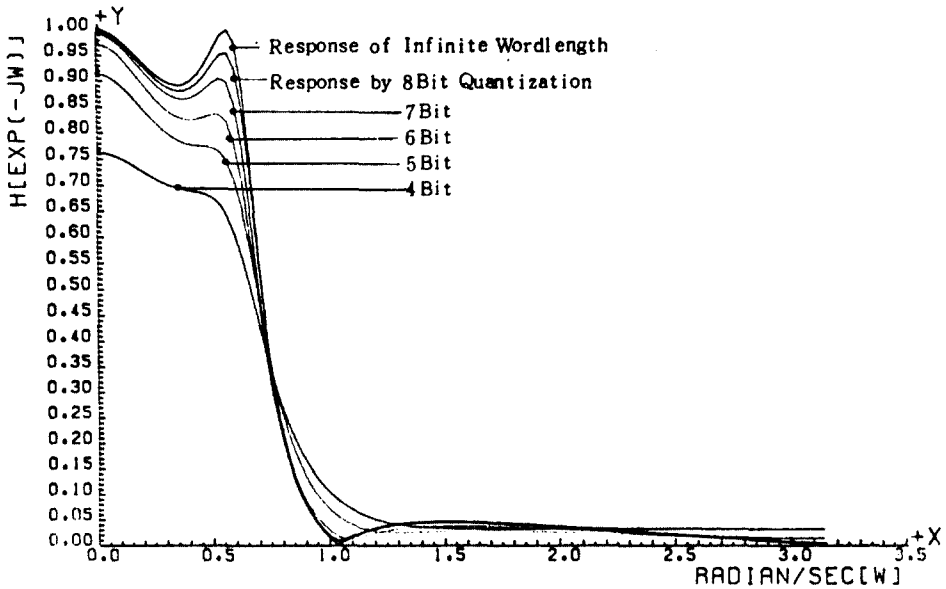


그림 9 실현 구조의 주파수 응답곡선
Frequency response curve of the realization structure.

그리고 상태 공간 계수를 4-8 Bit 까지 量子化했을 때 標準形 및 統計的 感度 最小 實現 구조의 주파수 응답 특성 곡선은 그림 9 와 같다.

VI. 결 론

본 논문에서는 狀態 空間 係數{ABCD}의 미소 변동에 기인한 出力 誤差의 分散 $\sigma^2 \Delta y_c = E[\Delta y_c^2]$ 을 $\Delta\{ABCD\}$ 의 分散 σ_Δ^2 으로 正規化한 값 $S = E[\Delta y_c^2] / \sigma_\Delta^2$ 을 統計的 感度로 정의하고 시스템 구조의 성질을 나타내는 可制御性 Gramian, 可觀測性 Gramian, 그리고 2 차 모드 해석 방법을 상태 공간 디지털 필터에 확장해서 最小 統計的 感度를 갖는 실현 구조를 합성하였다. 시뮬레이션을 통하여 합성된 統計的 感度 最小形 상태 공간 디지털 필터는 표준형, 중속형, 그리고 병렬형 상태 공간 디지털 필터보다도 상태 공간 계수의 微小 變動에 기인한 出力 誤차가 적게 발생하는 것을 확인하였다. 앞으로 통계적 감도 최소 실현 구조의 Roundoff誤차문제 및 상태 공간 계수의 미소 변동요소를 고려한 統計的 感度 最小形 실현 구조 합성에 대한 연구도 계속되어야 할 것으로 사료된다.

參 考 文 獻

1. S.Y. Hwang, "Roundoff Noise in State-Space Digital Filter: A general Analysis", IEEE Trans., vol. Assp-24, no.3, pp.256-265, June, 1976.
2. W.L. Mills, C.T. Mullis, and R.A. Roberts, "Digital Filter Realization without Overflow Oscillation", IEEE Trans., Acoust, Speech, Signal Process., vol. Assp-26, no.4, pp.334-338, Aug., 1978.
3. 川又 樋口, "Synthesis of State-Space Dibital Filter without Limit Cycle", 일본통신학회, vol.63-A, no.12, pp.870-877, 1980.
4. B.C. Moore, "Principal Component Analysis in Linear System: Controllability, Observability, and Model Reduction", IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Process., vol. Assp-26, no.1, pp.17-32, Jan., 1981.
5. A. Tettweis, "Wave Digital Filter Theory and Practice", Proc. IEEE, vol.74, no.2, pp.270-278, Feb., 1986.
6. W.S. Lu and Antoniou, "Synthesis of 2-D State-Space Digital Filter Structure with Minimum Roundoff Noise", IEEE Trans. Circuit Syst., vol. CAS-33, no.10, pp.965-973, Oct., 1986.
7. M. Kawamata and T. Higuchi, "상태공간 디지털 필터의 유한어장 실현문제", 계측과 제어, Vol. 22, no. 12, pp. 991~1004, Dec., 1983.
8. A.V. Oppenheim and R.W. Shafer, "Digital Signal Processing", Practice Hall, pp.136-155, 1975.
9. R.A. Robert and C.T. Mullis, "Digital Signal Processing", Addison Wesley, pp.287-322, 1987.



文 廣 善(Yong Sun MOON) 正會員
1960年 1月 4日生
1983年 2月: 朝鮮大 工大 電子工學科 卒業
1985年 2月: 朝鮮大 大學院 電子工學科 卒業(工學碩士)
1989年 2月: 朝鮮大 大學院 電氣工學科 卒業(工學博士)
1988年 3月~8月: 朝鮮大 工大 機械工學科 講師

1985年 3月~現在: 朝鮮大 工大 電子工學科 助教



朴 鍾 安(Jong An PARK) 正會員
1952年 7月 7日生
1975年 2月: 朝鮮大 工大 電子工學科 卒業
1977年 2月: 朝鮮大 大學院 電子工學科 卒業(工學碩士)
1986年 2月: 朝鮮大 大學院 電氣工學科 卒業(工學博士)

1983年 8月~1984年 8月: 美國 Massachusetts 大學 客員教授
1975年 3月~現在: 朝鮮大 工大 電子工學科 副教授