

제한3체문제에서의 작은 질량비에 대한 충돌궤도*

조중현, 박상영, 이병선, 최규홍

연세대학교 천문기상학과

(1988년 5월 20일 받음; 1988년 6월 10일 수리)

Collision Orbits for Small Mass Ratio in the Restricted Three Body Problem*

Jung-Hyun Jo, Sang-Young Park, Byoung-Sun Lee and Kyu-Hong Choi

Department of Astronomy & Meteorology, Yonsei University, Seoul 120-749

(Received May 20, 1988; Accepted June 10, 1988)

요 약

지구-달계의 질량비인 $\mu = 0.9878449$ 와 Jacobi 상수 2.9 ~ 3.4 인 범위의 조건일 때 j 종족 충돌궤도가 존재하는가를 조사하였다. 수치적인 방법으로는 Birkhoff의 정칙화 평면에서 Fehlberg(1968)의 5차 Runge-Kutta 가변구간 수치적분방법을 사용하여 궤도의 주기성을 검증하였다. 그 결과 4개의 j 종족 충돌궤도와 5개의 특이형궤도를 얻었고, 또한, 이 j 종족 충돌궤도가 Pinotsis 와 Zikides(1984)가 제시한 주기와 궤도형태의 상관관계를 보였다.

Abstract

The existence of the j -type collision periodic orbit is examined on the condition of mass ratio 0.9878449 and Jacobian constant 2.9 ~ 3.4. Using the Birkhoff's regularization method and the 5th order Runge-Kutta variable step-sized numerical integration routine introduced by Fehlberg (1968), we test their periodicities. As the results, 4 j -type collision orbits and 5 peculiar orbits are represented. There are good agreements in this collision orbits with the relationship between the period and the shape of orbit proposed by Pinotsis and Zikides(1984).

* Yonsei University Observatory Contribution, No. 58.

I. 서 론

일반적으로 해석적인 방법으로는 3체문제를 해결하기가 어렵게 되자 19세기 말부터 초기조건을 단순화하여 3체문제의 근사해를 얻고자 하는 연구가 활발하게 진행되어 여러 가지 수치적, 해석적 근사방법이 시도되었다. 그 중에 한 결과로 회전좌표계에서 극소체의 운동방정식이 알맞는 초기조건에서 주기해를 갖는 것을 알게 되었다.

이러한 주기해는 곧 공간에서 극소체가 주기궤도를 이룬다는 것이며, 이 주기궤도의 특성은 회전좌표계의 한 축을 이루는 주 2체(Primary two Body)의 질량비, 적분 초기위치와 적분상수에 의해 완전히 결정된다. 20세기 초엽에는 계산능력의 한계 때문에 주로 질량비가 1/2에 가까운 경우의 주기궤도를 많이 연구하여 주기궤도 형태에 대한 Copenhagen category를 만들게 된다. 이후 점차 다양한 질량비에 대해서 연구가 진행되었고, 또 방정식상의 특이점 때문에 곤란했던 질점 부근을 통과하는 주기궤도도 Thiele, Painleve, Levi-civita, Burrau, Sundman 그리고 Birkhoff 등이 특이점을 제거하는 정칙화 방법을 창안하여, 계산이 가능하게 되었다. 이 특이점은 중력을 표현하는

$$\ddot{\vec{r}} = -k^2 \frac{M}{r^3} \vec{r} \dots\dots\dots (1)$$

식 (1)과 같이 중력의 scalar 양이 서로 영향을 미치는 두 물체 간의 거리에 반비례하기 때문에, 두 물체가 접근하면 해를 구하기가 불가능하게 된다.

1960년대 우주개발이 한창일 때 지구-달, 행성간의 탐사체 비행을 위해 해성계 형태 $\mu \ll 1$ 의 주기궤도에 대한 연구도 활발하여졌다. 이 때의 주기궤도는 거의 질점 가까이에서 적분을 시작함으로써 충돌궤도의 형태를 이루게 된다. 사실상 적어도 Newton의 중력법칙이 지배하는 계내에선 2체의 중심이 같은 위치에 존재할 수 없다(Szebehely와 Bettis, 1971). 이러한 이유로 천체동력학적인 측면에서나 천체역학적인 면에서 충돌은 수학적이라기보다는 물리적인 것이다. 이러한 충돌궤도는 실제 여러 형태의 주기궤도종족(Family of periodic orbit)을 이루는 초기조건을 포함하고 있다. Zikides(1980)의 초기조건의 특성곡선은 u종족의 주기궤도족이 충돌궤도를 포함하고 있는 것을 잘 보여 준다. 이 초기조건 특성궤도는 Pinotsis와 Zikides(1984)와 같은 충돌궤도의, 주 2체의 질량비와 적분상수값과의 관계까지 확대되며 이를 Bozis diagram으로 부르는데, 이는 Bozis(1970)가 처음으로 16개의 Copenhagen category에 속하는 충돌궤도의 특성곡선을 구하였기 때문이다.

그 후 Pinotsis와 Zikides(1984)에 의해 질량비가 0에 가까왔을 때의 j종족 충돌궤도가자

세히 연구되었다. 또, 이들에 의해 주기궤도가 질량비에 따라 진화하여 질량비가 0에 가까우면 그 특성곡선이 특정한 위치로 수렴하며 주기궤도가 Keplerian 운동에 근사한 모습을 보임이 증명되었다. 또한, 이 충돌궤도로부터 정상적인 주기궤도를 쉽게 찾아낼 수 있음을 보였다.

이러한 특성곡선 중에 질량비가 거의 0에 가까운 경우에는 그 계산의 난점과 충돌궤도를 식별하기 곤란한 점, 그리고 Turn-off 점이 존재하기 때문에 아직까지 연구가 자세히 되어 있지 않고 있다. 또, 1/2과 0 주변은 상당한 연구가 되고 있으나, 그 외의 부분에서는 그렇지 못하다. 따라서 이 논문에서는 이 부분과 존재하는 실제 경우의 조건으로서 지구와 달계에서의 새로운 충돌궤도를 구하고자 한다.

II. 운동방정식과 정치화

질점 P_1 , P_2 , P_3 가 같은 평면에 존재하고, 이 때 P_3 의 질량이 0이라 가정하면, P_1 , P_2 가 서로 인력을 작용하여 질량 중심에 대하여 각속도 1인 원운동을 하고 그 주위를 P_3 가 운동하면, 이 P_3 의 운동을 기술하는 것이 제한 3체 문제이다(Barrar, 1965). 공간상 3체의 운동은 여러 좌표를 기준하여 표현될 수 있으나, 계산상의 편리와 정밀도의 향상을 고려하여 무차원 회전좌표계를 사용하기로 한다. 이 때의 제 3체의 운동방정식은 Roy(1978)의 식 (2)와 같이 매우 잘 알려져 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

단,

$$\Omega = \frac{1}{2} (\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}, \quad \mu_{1,2} = m_{1,2} / M$$

이 논문에서는 계산상 고려되는 변수를 줄이기 위해 질량비와 질량 중심에서 각 물체 사이의 거리를 단지 주 2체의 상대적인 질량비의 관계로 나타내하고자 한다.

관성계에서 2차원에서의 3체운동을 기술하기 위해서는 각 물체당 4개씩 12개의 변수가 필요하나 제한 3체문제에서의 주기궤도는 이미 주 2체가 계를 이루고 있기 때문에 단 2개의 운동방정식으로 그 궤도를 적분할 수가 있다. 또한, 주기궤도의 경우 그것의 주기성을, 동일 위치를 주기 t 후에 같은 물리적 조건으로 지나가는가 여부로 판단하기 때문에 궤도형태의 단순성은 큰 강점이 된다.

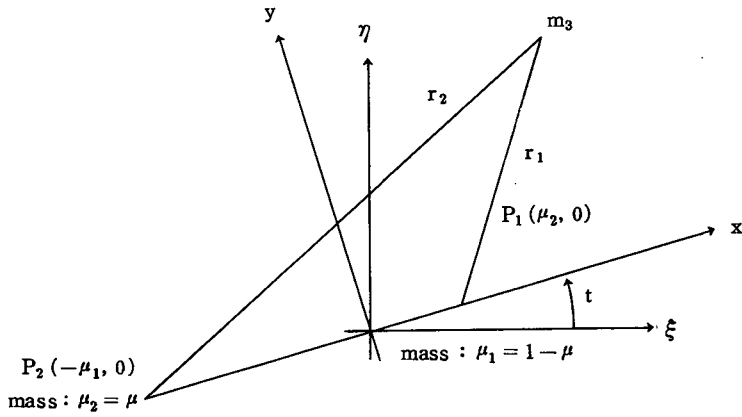


Fig. 1. The relation between the dimensionless synodic coordinates and inertia frame (Szebehely 1967).

좌표계에서의 시간 t 는 실제 시간으로 간단한 관계식을 사용하여 변환될 수 있다. 무차원 회전좌표계에서의 시간은, 제한 3체문제가 이미 계를 이루고 있는 2체의 운동으로부터 시작하였기 때문에 이 2체의 회전주기로부터 유도해 낼 수가 있다. 평균 각속도가 1로 정의되어 있으므로 실제 시간을 τ 라 하면 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$\tau = \frac{T_{\text{system}}}{2\pi} \cdot t$$

예로써, 지구-달계에 대하여 계산하면 회전 좌표상의 시간 1은 $4^d.3768$ 에 해당하며, 이는 Rabe와 Schanzle(1962)의 계산과도 일치한다.

Markus와 Weaver(1969)는 특이점에서의 해의 존재를 해석적으로 증명하였다. 운동방정식 (2)로는 질점 부근에서 특이점 때문에 적분이 불가능하다. 이 특이점을 제거하기 위해 우리는 Birkhoff가 창안한 복소평면으로의 conformal mapping을 이용하였다. Szebehely(1967)의 전개식을 이용하여 정리한 복소평면에서의 운동방정식은 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\bar{t}^2} - 2|\dot{\mathbf{f}}|^2 \cdot \frac{dv}{d\bar{t}} &= \frac{\partial \Omega}{\partial u} \\ \frac{d^2 v}{d\bar{t}^2} + 2|\dot{\mathbf{f}}|^2 \cdot \frac{du}{d\bar{t}} &= \frac{\partial \Omega}{\partial v} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

여기서 Ω 는 식 (4)와 같은 함수이다.

$$\Omega = \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{32\rho_0^6} [(1-\mu)\rho_1^4 + \mu\rho_2^4] - \frac{1}{2\rho_0^3} [(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2] - \frac{C\rho_1^2 \rho_2^2}{8\rho_0^4} \dots\dots\dots (4)$$

C는 Jacobi 상수이고, 중점과 주 2체로부터 제 3체까지의 거리는 식 (5)와 같고

$$\begin{aligned} \rho_0 &= [(u - \mu + \frac{1}{2})^2 + v^2]^{1/2} \\ \rho_1 &= [(u - \mu)^2 + v^2]^{1/2} \dots\dots\dots (5) \\ \rho_2 &= [(u - \mu + 1)^2 + v^2]^{1/2} \end{aligned}$$

정칙화된 시간은 mapping 매개식에 의해 곧 무차원 시간 t로 식 (6)과 같이 변환이 된다. 이렇게 변환된 좌표에서의 운동과 무차원평면에서의 운동을 비교해 보면 그림 2와 같다.

$$d\bar{t} = |f|^2 \cdot dt, \quad Z = f(w) = \frac{\omega^2 + \mu(1-\mu)}{2\omega + 1 - 2\mu} \dots\dots\dots (6)$$

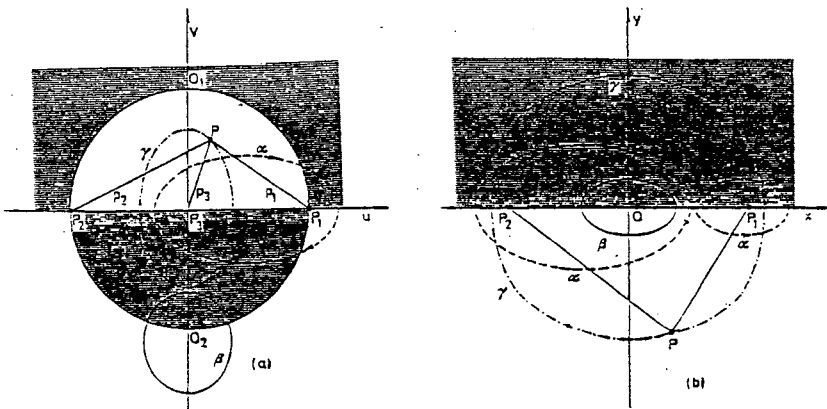


Fig. 2. The homology of orbits in regularized plane and real plane(Zikides 1973).

그림 2를 보면 무차원평면에서의 x 축이 정칙화평면에서는 주 2체를 지나가는 원으로 치환되었음을 볼 수 있다. 이렇게 하여 제거된 특이점이 적분 계산에 영향을 미치지 못하므로 결국 우리는 주 2체의 질점을 지나는 충돌궤도를 구할 수 있게 된다.

Ⅲ. 충돌궤도와 Bozis diagram

충돌궤도는 주기궤도의 한 종류로, 다만 그 궤적이 주 2체의 질점을 통과함으로써, 물리적으로는 발생 불가능한 것이다. 그러나 이것은 주기궤도의 진화와 3체 문제의 수학적 접근에 매우 필요한 것이다. Ⅱ장에서 언급한 바와 같이 제한 3체 문제에서 Jacobi 적분을 제외하곤 불변의 적분이 존재하지 않는 것은 문제에서 해의 총체성을 얻을 수 없게 만들었고, 이 때문에 매우 일찍부터 주기궤도에 대한 연구가 시작되었다(Roy, 1978). Strömberg과 Copenhagen연구소의 학자들은 질량비가 1/2인 경우에 대해서 집중적으로 계산하여 15개의 종족으로 구분하였다. Hagihara(1975)의 17장에서는 이 종족과, 그 후 더 발견되어진 4개 종족을 추가하여 19개 종족에 대해서 자세히 설명하고 있다. 지구-달계에서 1,000여 개의 주기궤도를 발견한 후, Broucke(1971)는 2종족에서의 충돌궤도를 구하였다.

이 충돌궤도의 중요성은 이 궤도가 일반적인 주기궤도를 찾아내는 지표가 될 수 있고, 그것이 종족을 이루는 근간이 될 수가 있기 때문이다. Bozis(1970)가 밝혔듯이 Copenhagen category의 어느 종족 중에서도 충돌궤도는 발견이 되고, 이러한 충돌궤도의 위상공간 주변에서 그 종족이 진화해 나간다는 것이다. Bozis Diagram은 이것을 명확히 보여 준다. Bozis(1970)는 16개의 이미 알려진 충돌궤도종족을 이용하여 이들의 질량비에 따른 진화를 조사하였고 이를 질량비와 Jacobian 상수와의 관계로 표시하여 그림 3과 같은 μ -C도를 얻었다.

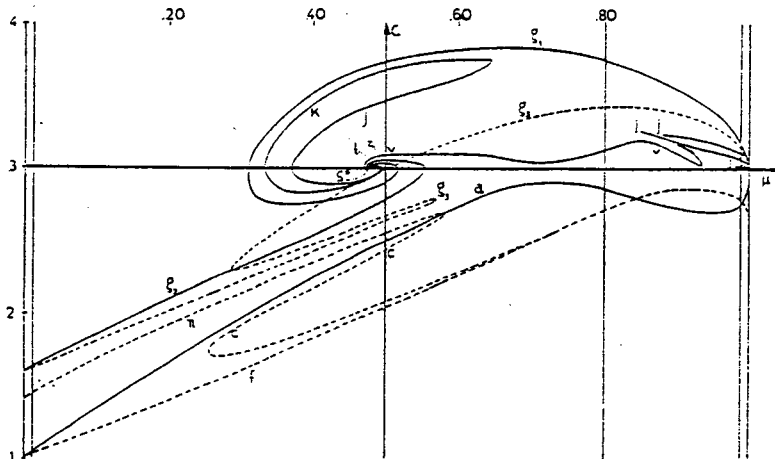


Fig. 3. The evolution of the 16 families of collision periodic orbit(Bozis 1970).

그림 3의 특성곡선들은 $S^*(\mu = .4755, C = 3)$ 에 나선형태를 그리며 종착하고 있음을 볼 수 있다. 이 S^* 는 L_4 와 L_5 의 asymptotic branch를 나타내고 있다. Zikides(1973)는 Bozis(1970)가 각 종족의 한계라고 생각한 위상 공간 값 이후의 경우에서도 각 종족의 주기궤도를 구하였다. 이러한 특성궤도의 termination이 한 점에서 일어나고 있는 것을 Pinitsis와 Zikides(1984)의 j 종족충돌궤도의 특성궤도에서도 볼 수가 있다.

이러한 특성곡선은 기존의 구하여진 주기해로부터 Broucke(1971)와 같이 4개 변수($x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$)의 가변량에 대한 미분보정에 의해서 비슷한 특성을 지닌 주기해를 확정하게 되는 것이다. 이 논문에서는 Pinitsis와 Zikides(1984)의 특성곡선을 바탕으로 이들이 계산하지 않은 $\mu = .9878449$ 인 지구-달계에서의 $2.9 < C < 3.4$ 를 조망하여 j 종족 주기궤도의 연속성과 새로운 주기궤도를 구했다.

IV. 수치적분 결과와 충돌궤도의 결정

주기 해는 수학적으로 Arenstorf(1963)에서와 같이 단순한 미분방정식의 일반적인 해로 구하여지는 것은 거의 드물고 대부분 정밀하고도 체계적인 위상공간에 대한 관찰에 의하거나 기존의 해로부터 해석적으로 인수를 전개함으로써 발견된다. 초기조건에 해당하는 4개의 위상 vector 성분 중에서 2개를 제외할 수 있다. 즉, \dot{x}_0, y_0 를 0으로 하여 좌표면에서 횡축을 제 3체의 궤적이 직교하도록 하여 한 주기가 지난 후에도 초기조건과 진행되고 있는 궤적의 조건이 동일한 위치에서 만족되는가 검증하는 것이다. 이것은 Barrar(1965)와 같이 전통적이고도 매우 효과 높은 방법이다.

이 논문에서 구하고자 하는 충돌궤도는 초기조건의 제약이 하나가 더 추가된다. 바로 초기적분이 시작되는 횡축상의 위치가 주 2체 중의 하나로 결정되기 때문이다.

이 논문에서는 Fehlberg(1968)가 개량한 Runge-Kutta의 5차와 6차 수치적분방법을 사용하였으며, 오차의 조정은 truncation 오차의 최대누출항을 감시하고 적분구간을 연동으로 조정하여 Szebehely와 Nacozy(1967)가 제시한 $\Delta C/C < 10^{-13}$ 을 유지하도록 하였다. 왜냐하면, Szebehely(1967)에 의하면 Jacobi 상수에서 10^{-9} 이 틀리면 각 좌표축에 대해서는 10^{-3} 의 오차가 발생하기 때문이다. 또, 적분횟수가 적을수록 좋은데, Brouwer와 Clemence(1961)가 받을림 오차는 계산횟수의 1/2 곱에 비례한다고 지적한 바 있다.

그러나 최소단위 증분이 포함하고 있는 상대오차만으로 그 수치적분의 안정성과 정밀성을 논할 수는 없다. 전체 계 내에서 에너지 보존의 정밀도 유지를 위하여 가변적분구간법의 사용을 고려할 수 있으나, Leaphart와 Safko(1975)가 지적했듯이, Jacobi 상수가 계의 총에너지와 같은 역할을 하고 있지만 우리가 사용하고 있는 좌표계의 비보존성 때문에 명확한 것은 아니다. 이는 Huang과 Innanen(1983)에서도 지적되었으며, 이러한 수치적분 해의 타당성검증을 위해 새

로운 불변 적분을 정의하여 사용하는 것이 필요하다.

V. 수치적분 결과

이 연구에서 위상공간관찰에 의해 $\mu = .9878449$ 의 조건에서 구한 $2.9 < C < 3.4$ 내에서의 충돌궤도는 표 1과 같다.

Table 1. The periodic solution by numerical integration.

Orbit	C	T
1	2.9970	28.90137
2	3.0299	16.77946
3	3.0430	35.87479
4	3.0493	30.02961
5	3.0682	12.18360
6	3.1203	8.69200
7	3.1350	34.63104
8	3.1601	50.12629
9	3.1654	43.35343

표 1의 주기궤도들을 계산할 때 적분오차(truncation error)의 허용오차를 10^{-13} 로 하였으며, 초기적분 구간을 10^{-6} 으로 하고, 그 정밀도가 허용오차 내에 있도록 적분구간을 가변하였다. 이때의 가감량은 Thomas (1986)의 수치를 적용하였다. 주기성의 확인으로는 초기적분 조건과 주기 T 후의 조건을 비교하여 10^{-4} 내의 값이 되는 것으로 하였다. 그러나 실제적으로 주기 해를 갖는 경우 이보다 적은 10^{-5} 의 정밀도를 유지하였다. 이때 해의 반복성의 검증에 이용된 변수는 x, y 좌표 성분과 x, y 속도 성분이다. 이 궤도들의 전 적분과정에서 Jacobi상수의 정밀도는 10^{-9} 에서 10^{-15} 을 유지했다.

결과로써 표 1의 조건을 갖는 충돌궤도를 그림 4에 제시했다. 이 중 궤도 10과 11은 각각 표 1의 2번과 7번의 조건을 갖는 충돌궤도가 정칙화평면에서 움직인 궤적을 나타낸 것이다. 궤도 1, 2, 5, 6과 같은 j 종족 충돌궤도는 U-V평면에서의 궤적이 궤도 2와 거의 흡사한 형태를 띄고 있다. U-V평면에선 제 2체를 출발한 궤도가 x 축이 변환된 반지름 1/2의 원을 벗어나지 않고 초기위치로 회귀하지만 실제 평면에서는 제 1체 주위를 회전하게 된다. 그러나 U-V평면에서의 운동궤적이 궤도 11과 같은 궤도 3, 4, 7, 8, 9는 j 종족에 속하는 충돌궤도가 아니다. 이들은 현재 분류된 어떤 종족에도 속하지 않는 특이형이다. 이들의 초기조건과 마지막 충돌 시의 조건은 표 2와 같다.

표 2의 세째 열은 U-V평면에서의 최종 U위치이고, 네째 열은 최종 V속도이다. 다섯째 열은 최종 X위치이다. 이때의 각 충돌궤도의 최종 Y위치는 $\pm 10^{-4}$ 에 분포한다. 초기 U속도는

Table 2. The initial and the final condition of each orbits.

Orbit No.	C_{ini}	U_{fin}	V_{fin}	X_{fin}
1	2.9970	.986584	-.312479	.98775
2	3.0299	.986412	-.312680	.98782
3	3.0430	.990359	-.310212	.98782
4	3.0493	.977806	-.318176	.98794
5	3.0682	.989210	-.310777	.98775
6	3.1203	.986668	-.312526	.98783
7	3.1350	.990077	-.310356	.98781
8	3.1601	.987232	-.311976	.98776
9	3.1654	.982119	-.315244	.98787

질점으로부터의 출발이기 때문에, 정칙화 평면에서의 속도와 에너지관계식인

$$\dot{U}^2 + \dot{V}^2 = 2U \cdot |f|^2 \dots\dots\dots (7)$$

식 (7)에서 왼편 항이 0이 되기 때문에 지구-달계에서의 모든 충돌궤도의 초기 U 속도는 +.3118345가 된다.

이 9개의 충돌궤도 중 3번궤도는 실제 평면에선 x 축 대칭을 이루고 있지만 정칙화평면에선 전혀 대칭을 이루지 않는다. 따라서 완전한 주기궤도로는 볼 수가 없다. 8번궤도를 정칙화평면으로 투영시킨 궤도를 살펴보면 궤도의 운동범위가 각축 상에서 -2부터 2임을 알 수 있다. 이것은 그림 2의 정칙화평면에서 중심이 제 1체이고 반지름이 1/2인 원을 벗어난 부분이 실제 평면에서 그 원 안으로 투영되는 것으로 쉽게 설명이 된다.

VI. 결 론

Pinotsis와 Zikides(1984)가 찾아낸 j 종족 충돌궤도 특징과 부합되는 궤도가 지구-달계에서도 발견이 되어 그 특성곡선의 연속성이 입증되었다.

표 3에서 T_c 는 이 연구에서 구한 지구-달계에서 존재하는 충돌궤도의 주기이고 T_{pz} 는 Pinotsis와 Zikides(1984)에 의해 구해진 Keplerian 궤도를 이룰 때의 주기이다. 여기서 두 값들이 차이가 나는 것은 지구-달계의 질량비가 무시할 정도로 작지가 않기 때문이다. 또 하나는 질점 P_2 부근에서 첨점(cusp)을 보이기 때문이다. 이 첨점이나 자폐선에서 지체되는 시간에 의해 주기가 길어진 것으로 볼 수 있다.

표 3에 열거되지 않은 나머지 궤도들은 j 종족의 궤도가 존재하는 phase space 상에 나타난,

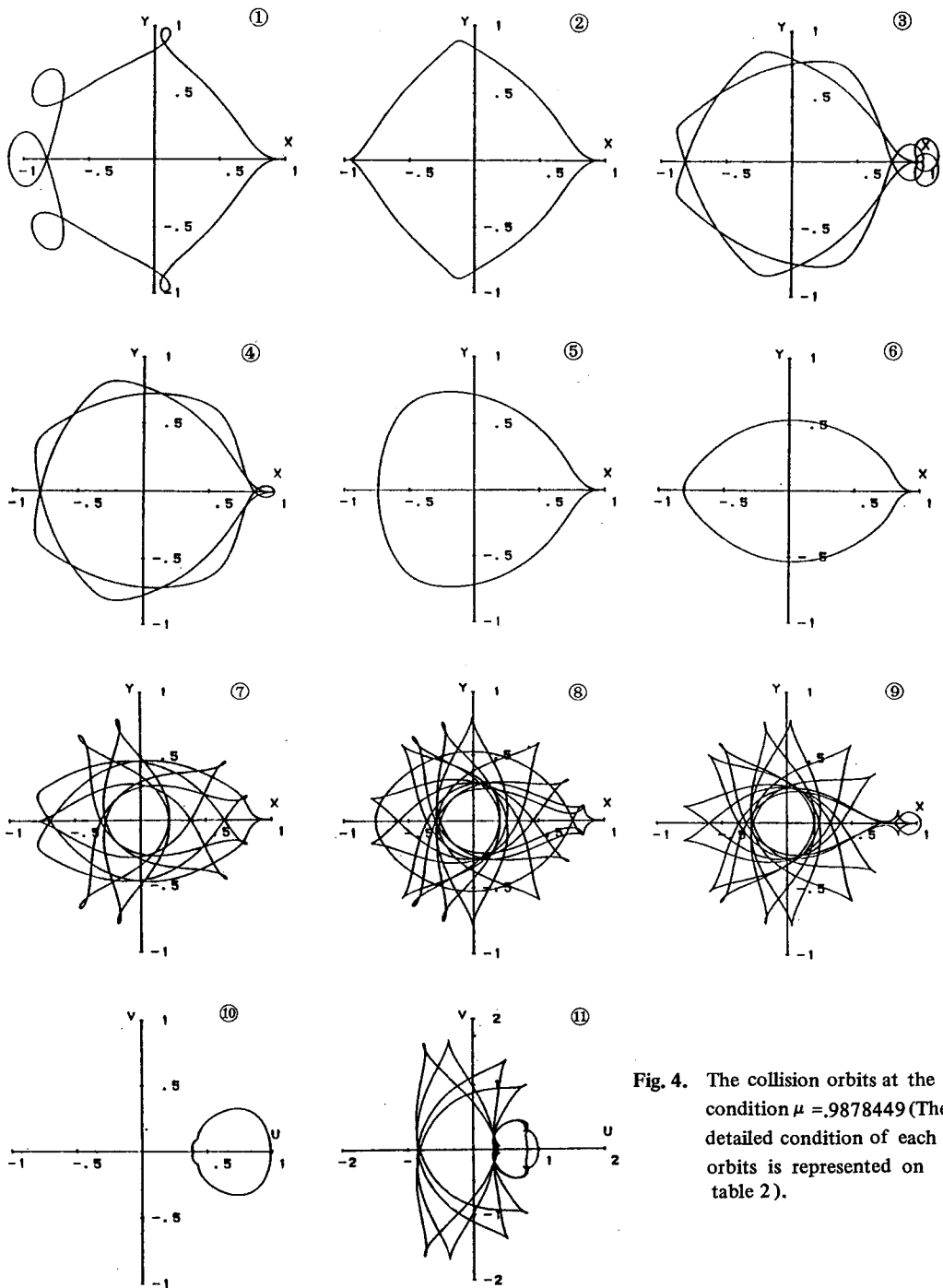


Fig. 4. The collision orbits at the condition $\mu = .9878449$ (The detailed condition of each orbits is represented on table 2).

Table 3. The comparison of our results and the period-loop relation suggested by Pinotsis and Zikides(1984).

Orbit	n	Tc	TPz
1	6	28.90137	31.41592
2	4	16.77946	18.84956
5	3	12.18360	12.56637
6	2	8.69200	6.28319

Szebehely(1967)가 제시한 특이한 주기궤도이다. 이것은 Pinotsis와 Zikides(1984)가 구한 특성궤도의 빈 사이에 해당하는 것으로 단순한 모양을 띄지 않고 다수의 침점을 포함하고 있다. 또한, C값이 커질수록 많은 침점을 가지고 있으며, C가 작을수록 j종족 궤도에서 최대가 가장 적은 n=2인 궤도의 형태를 포함하고 있으며 j종족의 특성궤도 사이에서 마치 중간 천이 과정인 것처럼 보이고 있다.

이상의 결과에서 우리는 다음과 같은 결론을 얻었다.

- j종족의 충돌궤도의 각 μ -C 특성곡선은 정해진 침점 또는 자폐선을 갖는다. 이 침점이나 자폐선 또는 최대의 수는 C가 감소하면 증가한다.
- μ -C 특성곡선에서 μ 가 감소하면서 최대가 침점이나 자폐선으로 바뀐다.
- n이 증가하면 주기는 증가하고 같은 μ -C 특성곡선 내에서는 그 변화가 작다.
- 한 종족의 주기궤도가 분화를 이룰 정도의 좁은 위상공간에서도 전혀 다른 형태의 궤도가 존재할 수 있다.
- 이 논문에서 찾아낸 j종족의 충돌궤도는 모두 주기가 60으로 제한된 조건에서 찾아낸 것이기 때문에 계산을 더 확장할 경우 충돌궤도를 찾아내지 못한 C=2.9 부근에서 자폐선을 다수 갖고 있는 j종족 충돌궤도를 찾을 수 있을 것이다.

참고문헌

- Arenstorf, R. F. 1963, *Amer. J. Math.*, **85**, 27.
- Barrar, R. B. 1965, *Astron. J.*, **70**, 3.
- Bozis, G. 1970, *Periodic Orbits, Stability and Resonances*, ed. G. E. O. Giacaglia(Reidel: Dordrecht), pp. 176-191.
- Broucke, R. A. 1971, *Celes. Mechan.*, **3**, 461.
- Brouwer, D., Clemence, G. E. 1961, *Methods of Celestial Mechanics*(Academic: New York), pp. 158-159.
- Fehlberg, E. 1968, NASA TR R-287.

- Hagihara, Y. 1975, *Celestial Mechanics, Vol. 4*(Tokyo Press: Tokyo), pp. 1-171.
- Huang, T. Y., Innanen, K. A. 1983, *Astron. J.*, **88**, 870.
- Leaphart, D. K., Safko, J. L. 1975, *Astron. J.*, **80**, 747.
- Markus, L., Weaver, C. 1969, *Amer. J. Math.*, **91**, 385.
- Pinotsis, A. D., Zikides, M. K. 1984, *Astron. Astrophys.*, **141**, 162.
- Rabe, E., Schanzle, A. 1962, *Astron. J.*, **67**, 732.
- Roy, A. E. 1978, *Orbital Motion*(Adam Hilger: Bristol), pp.138-149.
- Szebehely, V. 1967, *Theory of Orbits*(Academic: New York), pp.7-125.
- Szebehely, V., Bettis, D. G. 1971, *Astrophys. Space Scien.*, **14**, 133.
- Szebehely, V., Nacozy, P. 1967, *Astron. J.*, **72**, 184.
- Thomas, B. 1986, *Byte*, **4**, 191.
- Zikides, M. K. 1973, *Astron. Astrophys.*, **27**, 23.
- Zikides, M. K. 1980, *Astron. Astrophys.*, **88**, 298.