韓國經營科學會誌
第13券 第2號
1988年 12月

－研究論文－

복수차고 복수차종 차량 일정 문제의 최적 해법

(An Exact Algorithm for the vehicle scheduling problem with multiple depots and multiple vehicle types)

김 우 제 *
박 순 달 *

ABSTRACT

The vehicle scheduling problem with multiple depots and multiple vehicle types (VMM) is to determine the optimal vehicle routes to minimize the total travel costs. The object of this paper is to develope an exact algorithm for the VMM.

In this paper the VMM is transformed into a mathematical model of the vehicle scheduling problem with multiple depots. Then an efficient branch and bound algorithm is developed to obtain an exact solution for this model.

In order to enhance the efficiency, this algorithm emphasizes the follows; First, a heuristic algorithm is developed to get a good initial upper bound. Second, an primal-dual approach is used to solve subproblems which are called the quasi-assignment problem, formed by branching strategy is presented to reduce the number of the candidate subproblems.

1. 서론

복수차고 복수차종 차량 일정 문제 (vehicle scheduling problem with multiple depots and multiple vehicle types;VMM)란 차고가 여러 곳에 위치하고 각 차고는 여러종류의 차량을 보유한 상황에서, 각 수요지점이 요구하는 방문시각에 맞게 총 운행 비용을 최소화하는 최적 차량 경로를 결정하는 문제이다. 이 문제는 차량 일정 문제의 일종으로 이와 관련된 응용 사례는 제품 배달 계획, 통학 버스 운행 계획, 관광 버스 배차 계획등으로 매우 다양하다.

일반적인 차량 일정 계획에 관한 연구는 많이 이루어져 왔다. 먼저, 단수차고와 단수차종에 대한 차량 일정 문제는 1954년에 Dantzig와 Fulkerson [9]이 최초로 소개하면서 최소 비용 유통문제 (minimum cost flow problem)로 정형화 되어 polynomial time 안에 풀릴 수 있음을 보였다. 1987년에는 Paixao와 Branco[13]가 이 문제를 의사배정문제 (quasi-assignment problem)로 수식화하고 헝가리안 방법을 이용하여 효율적으로 풀 수 있는 방법을 제시하였다. 그런데 이 차량 일정 문제에 여러가지 제약조건이 추가되면 Lenstra와 Rinnooy Kan[11]이 지적했듯이 NP-hard 부류의 문제에 속하게 된다. 따라서

*서울대학교 산업공학과

복수차고와 복수차종의 제약 조건이 추가된 복수차고 복수차종 차량 일정 문제에 대한 연구는, 대부분 실용적인 측면에서 최적해 기법보다는 발견적 기법 (heuristic method)의 개발에 치중되어 왔다. 이 발견적 기법들은 차량 경로 문제 (vehicle routing prolem)의 발견적 기법에서 사용하는 몇가지 기본 개념을 적용하고 있다. 즉, 선분할-후경로 방법을 적용한 선분할-후일정 (cluster first-schedule second)방법이 있다. 또한 Bodin과 Rosenfield[4]등이 제안한 경로 동시 형성방법 (concurrent scheduler)이 있는데, 이 방법은 코드화가 용이하고 계산상 효율적이기 때문에 널리 사용되고 있다. Smith와 Wren[13]은 외판원 문제 (traveling salesman problem)에 대한 Lin[12]의 2-Optimal 기법을 응용하여 초기해를 보정하는 교환방볍(interchanging heuristic)을 제안하였다. 한편, Wren과 Holliday[15]는 여러 가지 발견적 기법을 결합한 해법을 발표하였으며, Cassidy와 Bennett[7]는 음식 배달 문제를 푸는 발견적 기법을 발표하였다. 또한, Bertossi [2]등은 라그랑지안 완화 (lagrangian relaxation)를 이용한 발견적 기법을 연구 하였다.

그러나 최적해 기법에 관한 연구는 극히 미진한 상태이다.Carraresi와 Gallo[5]가 이 문제를 다상품 유통 문제 (multicommodity flow problem)로 수리화 하였으나 그 수리식의 문제 크기가 엄청나게 커져서 실제문제에 적용하는데 어려움이 있고, 다상품 유통 문제가 상품의 수가 3개 이상인 경우에는 유니모듈라 (unimodular)특성을 만족하지 않으므로 선형계획법으로 한번에 풀 수 없게 된다. 따라서 이 문제에 대한 적절한 최적해 기법에 관한 연구가 필요하게 되었다.

본 연구의 목적은 복수차고 복수차종 차량 일정 문제에 대한 새로운 수리 계획 모형을 세우고, 분지 한계법을 이용한 효율적인 최적해법을 개발하는 것이다. 여기서 다루는 문제는 아래 사항을 만족시키면서 차량 운행 비용을 최소화하는 차량 배차 계획을 수립하는 것이다.즉,

(1) 차고는 n (n>1) 개가 있다.

(2) 수요 지점은 m (m>1) 개가 있다.

(3) 차량의 형태는 여러 종류이다.

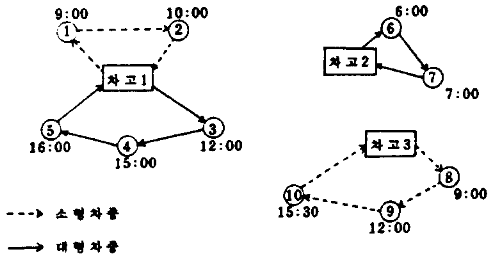
(4) 각 차량은 한 차고를 출발하여 그 차고로 되돌아와야 한다.

(5) 각 수요 지점은 방문 시각이 지정되어 있다.

본 연구에서는 이러한 복수차고 복수차종 차량 일정 문제를 복수차고 차량 일정 문제로 변환시킨 후, 불법 귀환 경로에 대한 제약식을 완화한 의사 배정 문제를 풀고, 그 해가 불법 귀환 경로 제약식을 만족하도록 고려 조건을 첨가하는 분지 전략을 가진 분지 한계법을 최적 해법으로 제시하게 된다.

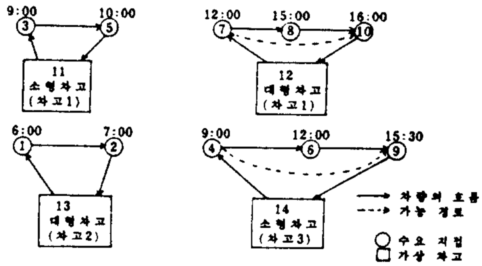
2. 모형화

복수차고 복수차종 차량 일정 문제의 기본 네트워크는 각 차고와 수요지점들의 마디 N과, 그들 사이의 경로 A로 이루어진 그래프 G(N,A)에 차량의 종류가 부가된 형태로서 [그림1] 과 같이 나타난다.



[그림1] 그래프 G(N, A)

여기서 이 네트워크에서 각 차량 종류별로 가상 차고 (dummy depot)를 만들고 , 각 수요 지점을 방문 시각 순서로 오름차순으로 나열하여 번호를 부여하면, [그림2] 와 같은 형태의 G(N',A')의 그래프로 변형될 수 있다. 여기서 N'는 시간별로 분류된 수요 지점과 가상 차고를 의미하고, A'는 각 마디에 대한 시간적 순서에 따른 연결 가능성을 나타낸다.



[그림2] 그래프 G(N′, A′)

이렇게 하여, 복수 차고 복수차종 차량 일정 문제는 각 차종에 대해 가상 차고를 도입함으로써 복수차고 차량 일정 문제로 변환되어 질 수 있다.

이 때, 그래프 G(N',A')를 형성하는 절차는 다음 단계와 같다.

단계 1 (마디의 형성)

(1) 각 수요 지점을 시간별로 오름차순으로 분류하여 1 에서 m까지의 번호를 부여한다.

(2) 각 차고에 대하여 차종별로 가상의 마디를 형성하고, 각 마디에 대하여 m+1에서 m+n까지의 번호를 부여한다.

단계 2 (호의 형성)

(1) 두개의 수요 지점 i와 j에 대해서 T_i+TT_{ij} 〈T_j이고 $VT_i=VT_j$를 만족하면, 두개의 마디를 i에서 j로 연결하고, 두마디간의 가중치를 두 지점 간의 운행 비용으로 한다. 그렇지 않으면, 두개의 마디는 서로 연결할 수 없으므로 두 마디간의 운행 비용을 ∞로 둔다.

여기서 T_i는 마디 i의 방문시각, TT_{ij}는 마디 i에서 마디 j까지의 주행시간, VT_i는 마디 i의 차종을 의미한다.

(2) 하나의 가상 차고와 수요 지점에 대해, 두 마디의 차종이 같으면 두 마디를 연결하고 가중치를 두 지점간의 운행 비용으로 둔다. 그렇지 않으면 두마디는 서로 연결할 수 없으므로 운행 비용을 ∞로 둔다.

이렇게 하여 형성된 그래프 $G(N', A')$의 비용 행렬 C는 [그림3]과 같다.

그런데 그래프 $G(N', A')$는 수요 지점에 대한 시간적 우선 관계가 존재하므로 다음과 같은 특성을 가지고 있다. 증명은 참고 문헌 [1]을 참고 하면 된다.

[정리1]

유방향 그래프 $G(N', A')$에서 수요 지점으로 이루어진 마디의 집합 N과 그에 연결된 호의 집합을 A_i라고 하면, 그래프 $G(N, A_i)$은 무환이다.

	1 2 3 m	m+1 m+2 m+n
1	∞ c_{12} c_{13} …… c_{1m}	$c_{1,m+1}$ $c_{1,m+2}$ …… $c_{1,m+n}$
2	∞ ∞ c_{23} …… c_{2m}	$c_{2,m+1}$ $c_{2,m+2}$ …… $c_{2,m+n}$
3	∞ ∞ ∞ …… c_{3m}	$c_{3,m+1}$ $c_{3,m+2}$ …… $c_{3,m+n}$
.	. . . .	. . . .
.	. . . .	. . . .
m	∞ ∞ ∞ …… ∞	$c_{m,m+1}$ $c_{m,m+2}$ …… $c_{m,m+n}$
m+1	$c_{m+1,1}$ $c_{m+1,3}$ $c_{m+1,3}$ …… $c_{m+1,m}$	0 ∞ …… ∞
m+2	$c_{m+2,2}$ $c_{m+2,2}$ $c_{m+2,3}$ …… $c_{m+2,m}$	0 ∞ … ∞
.	. . . . .	. . . . .
.	. . . . .	. . 0 ∞
m+n	$c_{m+n,1}$ $c_{m+n,2}$ $c_{m+n,3}$ …… $c_{m+n,m}$	∞ ∞ …… ∞

[그림3]그래프 G(N', A')의 비용 행렬

그래프 G(N',A')는 복수차고 복수차종 차량 일정 문제의 변형된 네트워크로 정리 1과 같은 특성을 가지므로 외판원 문제에서 생기는 불법 부분경로 (*illegal subtour*)가 생기지 않는다.

이제 이 모형을 수리식으로 표현해 보기로 하자. 여기서 사용될 상수와 변수를 정의하면 아래와 같다.

〈상수〉 m : 총 수요 지점의 수

n : 총 가상 차고의 수

N_1 : 수요 지점의 집합

$N_1 = \{1,2, \cdots\cdots, m\}$

N_2 : 가상 차고의 집합

$N_2 = \{m+1, m+2, \cdots, m+n\}$

S : 차량 경로에 포함된 마디의 집합

R : 차량 경로에 포함된 수요 지점의 집합

$|S|$: 차량 경로에 포함된 마디의 수

$|R|$: 차량 경로에 포함된 수요 지점의 수

C_{ij} : 마디 i와 마디 j간의 운행 비용

〈변수〉 $X_{ij} \ (i \neq j) = \begin{cases} 1, & \text{마디 } i\text{에서 마디 } j\text{로 차량이 운행하는 경우} \\ 0, & \text{그렇지 않은 경우} \end{cases}$

$X_{ii} \ (i \in N_2)$ = 가상 차고 i에서 운행하는 차량의 수

그러면 복수차고 차량 일정 문제로 변형된 복수차종 차량 일정문제는 다음과 같이 수리 모형으로 정식화할 수 있다.

$$(VMM) \quad Min \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} C_{ij} \ X_{ij} \qquad (1)$$

$$s.t \sum_{i=1}^{m+n} X_{ij} = 1 \qquad j = 1, \cdots, m \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, \cdots, m \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} X_{ij} = m \qquad j = m+1, \cdots, m+n \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} X_{ij} = m \qquad i = m+1, \cdots, m+n \qquad (5)$$

$$X \in S^* \qquad (6)$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{인 정수 } \forall \ i,j \qquad (7)$$

식(1)은 목적 함수로서 전체 운행 비용을 최소화하려는 식이다. 식(2) (3)은 각 수요 지점에 대해 1대의 차량이 배정되어야 한다는 제약이다. 식 (4)(5)는 각 가상 차고에서 운행하는 차량 수의 합이 m대임을 의미한다. 식(6)은 한 차고에서 출발한 차량이 각 수요 지점을 방문한 후 반드시 출발 차고로 되돌아와야 한다는 제약으로 불법 귀환경로를 제거하기위한 제약식이다. S^*는 다음과 같다.

$$S^* = \{\sum_{i \in s} \sum_{j \in s} X_{ij} \leq |R| + 2 - (|S| - |R|)\} \qquad (8)$$

[정리2]

$X \in S^*$는 불법 귀환 경로와 합법 귀환 경로를 분리한다.

$$S^* = \{\sum_{j \in s} \sum_{i \in s} X_{ij} \leq |R| + 2 - (|S| - |R|)\}$$

(증명) (i)차량 경로가 합법 귀환 경로인 경우

한 차고를 출발한 차량이 각 수요 지점을 방문한 후 출발한 차고로 되돌아오는 차량경로 이므로, 이 경우에는 차량 경로 속에 포함되어 있는 차고의 수는 유일하다. 즉, $|S| - |R| = 1$. 따라서, 식(8)의 우변은 다음과 같다. 우변$= |R| + 2 - (|S| - |R|) = |S| - 1 + 2 - 1 = |S|$ 한편, 식(8)의 좌변은 차량 경로에 있는 호의 갯수를 의미하게 되는데, 합법 귀환 경로는 하나의 cycle을 이루게 되므로 이때의 호의 갯수는 마디의 갯수와 동일하게 된다.

좌변$= \sum_{i \in s} \sum_{j \in s} X_{ij} \ |S|$

좌변=우변이 되므로, 합법 귀환 경로는 식(8)을 만족하게 된다

(ii)차량 경로가 불법 귀환 경로인 경우

한 차고를 출발한 차량이 각 수요 지점을 방문한 후 출발한 차고로 되돌아오지 않고 다른 차고로 귀환하는 차량 경로 이므로, 이 경우에는 차량 경로 속에 포함되어 있는 차고의 수는 2개이다.

즉, $|S| - |R| = 2$

우변 $= |R| + 2 - (|S| - |R|)$

$= |S| -2+2-2= |S| -2$

한편, 차량 경로가 하나의 cycle을 이루지 못하므로 이 때의 호의 갯수는 마디의 갯수보다 1개 작게 된다.

좌변$=\sum_{i\in s}\sum_{j\in s} X_{ij}= |S| -1$

좌변>우변이 되므로 불법 귀환 경로는 식(8)을 만족하지 못한다.

(i)(ii)에 의해 불법 귀환 경로와 합법 귀환 경로를 분리한다. ■

정리2에 의해 (VMM)은 불법 귀환 경로를 배제 시킬수 있으므로 한 차고에서 출발한 차량은 반드시 그 차고로 되돌아오게 된다.

따라서 (VMM)은 모든 수요 지점을 만족시키면서 차량 운행 비용을 최소화하는 복수차고 복수차종 차량 일정 문제의 수리 모형식이 된다.

3. 해법전략

(VMM)모형에서 불법 귀환 경로 방지식의 갯수는 $n^2\times\Sigma m!/(m-i)!$ 개이므로 미리 만들어 내거나, 그것을 그대로 적용하여 풀기가 곤란하다. 따라서 (VMM)에서 식(6)을 완화시킨 문제에 분지 한계법을 적용하여 그 해가 불법 귀환 경로 방지식을 만들어 추가하는 방법이 합리적이다.

한편, 식(6)을 완화시킨 (VMM)은 특수한 형태의 수송 문제가 되는데 이 문제를 의사 배정 문제 (QAP)라고 칭하기로 한다. 그런데 이 의사 배정 문제는 유니모듈라 (unimodular)구조를 갖고 있으므로, 의사 배정 문제의 해는 정수가 된다. 그러므로 이 특성을 활용하여, (VMM)에서 불법 귀환 경로방지식이 완화된 (QAP)를 우선 고려하고, 식 (6)을 만족 시키기 위해서 분지 한계법을 적용하여 변수 X_{ij}를 순차적으로 고정 시켜감으로써 최적해를 구하고자 한다. 그리고 분지 한계법에서의 부분 문제 생성을 효율적으로 억제시키는 분지 전략과 한계 전략을 사용하여 보다 빨리 최적해를 찾도록 한다. 즉, 배제되어야 할 호의 수가 가장 적은 불법 귀환 경로에 대해서 분지를 실시하는 분지 전략과 발견적해법으로 초기해를 구해 강한 초기 상한을 적용하는 한계 전략을 사용한다.

(1) 의사 배정문제

(VMM)모형에서 불법 귀환경로 방지식을 제거시키면 다음과 같은 의사 배정 문제가 된다.

$$\text{(QAP)}\quad Min \sum_{i=1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n} C_{ij}\times X_{ij} \tag{9}$$

$$s.t \sum_{i=1}^{m+n} X_{ij}=1 \quad j=1,\cdots,m \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} X_{ij}=1 \quad i=1,\cdots,m \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} X_{ij}=m \quad j=m+1,\cdots,m+n \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} X_{ij}=m \quad j=m+1,\cdots,m+n \tag{13}$$

$$X_{ij}\geq 0 \text{인 정수 } \forall\ i,j \tag{14}$$

이 (QAP)의 해법으로는 수송 문제의 해법을 적용하는 방법과 변형된 배정 문제(modified assignment problem : MAP)로 변형 시킨 후 배정 문제의 해법을 적용하는 방법이 있다. 그러나 전자의 경우는 퇴화(degeneracy)현상이 자주 발생하고 후자의 경우는 문제의 크기가 급격하게 커지게 된다.

그런데 (QAP)의 행렬 계수는 유니모듈라 (unimodular) 특성을 가지고 있고, 우변 상수가 정수이므로 식(4)를 아래와 같은 제약식(15)로 대체한 선형 계획법 문제의 해는 (QAP)의 해와 같게 된다. (참고 문헌 [1] 참조)

$$X_{ij}\geq 0 \quad \forall \quad i,\ j \tag{15}$$

식(14)를 식(15)로 대체한 선형 계획된 문제를 (LP1)이라고 하면, 이 문제의 쌍대문제(DP1)은 다음과 같다.

$$\text{(DPI)}\quad Max \sum_{i=1}^{m} u+\sum_{j=1}^{m} v+m(\sum_{i=m+1}^{m+n} u+\sum_{j=m+1}^{m+n} v) \tag{16}$$

$$\text{s. t.}\quad u_i+v_j \leq c_{ij} \quad \forall i,\ j \tag{17}$$

$$u_i,\ v_j : \text{부호 제약 없음 } \forall i,\ j \tag{18}$$

(LP1)의 가능해 $\bar{X}_{ij}$와 (DPI)의 가능해 $\bar{u}$, $\bar{v}_i$가 (LP1)의 최적해가 되려면, 아래와 같은 상보여유조건을 만족해야 한다.

$$\bar{x}_{ij}(\bar{c}_{ij}-\bar{u}_i-\bar{v}_i)=0 \qquad (19)$$

따라서 (LP1)의 해법은 (LP1)의 제약식을 만족하는 쌍대 가능해 $\bar{u}_i$, $\bar{v}_j$로 부터 시작하여 식 (19)를 만족시키면서 원 가능성 (primal feasibility)에 가장 근접하는 원 문제의 해(primal solution)를 찾는 원-쌍대 기법(Primal-dual algorithm)을 적용시키면 효율적으로 풀릴수 있다. 이 원-쌍대 기법의 계산 절차는 참고 문헌 [1]에 의한다.

(2)초기 상한을 구하기 위한 발견적 해법

이 발견적 해법은 최적 해법에서 한계 전략의 일종으로 초기 상한으로 사용되어 진다. 즉, 초기 상한을 무한대로 두지 않고 발견적 해법의 해로 두어, 처음부터 강한 한계 전략을 사용함으로써 부분 문제의 생성을 억제하기 위한 것이다.

여기에서의 발견적 해법(CONT)은 의사 배정 문제를 풀어서 그해에 불법 귀환 경로가 존재할 경우, 약간의 수정을 통하여 합법 귀환 경로를 형성하는 것으로, 외판원 문제에서의 Clarke와 Wright[8]의 절약 개념을 응용한 것이다.

CONT의 기본 개념은 불법 귀환 경로에서 합법 귀환 경로를 형성할 때, 증가되는 비용이 가장 적게 되도록 하는 것이다. 즉, 불법 귀환 경로에서 각 호의 기여도 (contribution)를 다음과 같이 계산하고 그 값이 가장 작은 호를 선택하여 각 경우에 맞게 수정하여 합법 귀환 경로를 형성한다.

$$\text{기여도 } CT_{ij}=\begin{cases} C_{dj}-C_{ij} & i\in N_3,\ j\in N_1 & (20)\\ C_{is}+C_{dj}-C_{ij} & i,\ j\in N_1 & (21)\\ C_{is}-C_{ij} & i\in N_1,\ i\in N_2 & (22)\end{cases}$$

s와 d는 각각 그 경로의 출발 차고와 도착차고의 지수.

식 (20)은 출발 차고와 수요 지점이 연결된 호의 기여도로서, 이 호를 끊고 이 연결된 수요 지점을 도착 차고와 연결하여 합법 귀환 경로를 형성할 때의 기여도이다. 식(21)은 각 수요 지점 사이에 연결된 호의 기여도로서, 이 호를 끊고 이에 연결된 수요 지점을 출발 차고와 도착 차고에 각각 연결시켜 합법 귀환 경로를 형성하는 경우의 기여도이다. 식(22)는 도착 차고와 수요 지점이 연결된 호의 기여도로서, 이 호를 끊고 이에 연결된 수요 지점을 출발 차고와 연결하여 합법 귀환 경로를 형성하는 경우의 기여도 이다.

식(20)-(21)와 같이 각 호에 대한 기여도를 계산하여 그 값이 가장 작은 호를 선택하여 그 호를 끊고 합법귀환 경로를 형성한다.

(3)분지 전략과 부분 문제의 형성

본 최적해법에서 사용하는 분지 전략은 외판원 문제에대한 Carpaneto와 Toth[6] 의 방안을 토대로 하여, 본 문제의 특성에 맞추어 제시한 것이다.

부분 문제에 부가되는 제약 조건으로는, 어떤 특정 호 (i,j)가 반드시 연결 되도록 설정하는 제약식 $X_{ij}=1$ 과연결되지 못하도록 설정하는 제약식 $X_{ij}=0$ 이 있다. 이 때, 전자의 경우에 해당되는 호를 포함 호 (included arc)라고 하고 그의 집합을 I라 표시하기로 한다. 또한, 후자의 경우에 해당되는 호를 배제호 (excluded arc)라 하고 그의 집합을 E라 표시한다. 그러면 각 부분 문제 h에는 Ih와 Eh가 부여된다.

어느 한 부분 문제에 대해서 분지 대상이 될 불법 귀환 경로의 선택은 여러개의 불법 귀환 경로들 중에서 포함호 집합 Ih에 포함되지 않은 호의 수가 최소인 것을 선택한다. 이는 분지 되어지는 부분 문제의 수를 최소로 하기 위함 이다. 이 때 선택된 불법 귀환 경로에서 Ih에 포함되지 않은 호의 수가 t개 이고, 그 집합을 $T=\{(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\ldots,(\alpha_t,\beta_t)\}$라고 하면, 부분 문제 h에서는 t개의 부분 문제가 파생된다. 그

러면 부분 문제 h에서는 t개의 후보 부분 문제가 파생되는데, 그중 j번째로 파생될 부분 문제 j에는 다음과 같은 호 집합들이 제약 조건으로 부가된다.

$$I_j = \begin{cases} I_h \ , & j=1 \\ I_h U\{(\alpha_u,\ \beta_u)\ ,\ u=1,\ \cdots, j-1\} & j=2,3\cdots,\ t \end{cases}$$

$$E_j = E_h U\{(\alpha_j,\ \beta_j)\} \qquad j=1,2,\ldots,t$$

이는 후보 부분 문제의 수를 가능하면 적게 하기 위한 방안으로, 후보 부분 문제 j에서는 Ij와Ej를 고려 조건으로하여 의사 배정 문제를 풀게 된다.

(4) 한계 전략

한계 전략은 하한(lower bound)과 상한(upper bound)을 잘 설정하여 해의 타당성을 빨리 판별함으로써 분지 과정을 촉진시키고, 그로 인해 파생되는 부분문제의 나열을 가능한 적게 하는 방안이다.

상한 전략은 원 문제의 목적 함수값 Z의 최소값에 대한 상한을 계산함으로써, 분지 전략에서 부분 문제를 형성할 때 분지 과정을 효율적으로 촉진시킬수 있다. 또한, 초기 상한 전략으로 발견적 해법을 사용하였는데, 이 발견적 해법은 그 정확도가 우수하므로 파생되는 부분 문제의 갯수가 상당히 줄어들게 된다. 실제로 다음 예제에서 초기 상한을 설정하지 않는 경우와 비교하면, 초기 상한을 설정하지 않는 경우는 부분 문제가 문제2에서 분지 끝이 선언되지 않으므로 이 문제 마디에서 2개의 부분 문제가 더 생성된다.

하한 전략은 부분 문제의 선택시에 하한 값이 가장 작은 값을 가지는 부분 문제를 선택하여, 목적 함수가 작은 분지 끝 문제 마디를 형성함으로써 다른 문제 마디를 빨리 분지 끝이 되도록 촉진시킨다.

4. 계산 방법

위와 같은 최적 해법의 계산 방법을 단계 별로 나타내면 다음과 같다.

단계 1 (시발)

(VMM)에서 식(6)을 완화한 의사 배정 문제를 형성하여 푼다.

발견적 해법으로 근사해의 목적 함수 값을 구해 상한 값$\bar{Z}$로 놓고 단계4로 간다.

단계 2 (의사 배정 문제 풀이)

각 부분 문제에 대해 포함호와 배제호를 고려하여 의사 배정 문제를 원-쌍대 해법(primal-dual algorithm)으로 푼다.

단계 3 (한계)

부분 문제의 목적 함수의 값 Z^*가 현재의 상한 값 Z보다 작거나 같으면 단계4로, 그렇지 않으면 분지 끝을 선언하고 단계6으로 간다.

단계 4 (경로의 합법성 검토)

불법 귀환 경로가 존재하면 단계5로, 그렇지 않으면 분지 끝을 선언하고 상한 값 $\bar{Z}$를 부분 문제의 목적 함수 값 Z^*로 수정한 후 단계6으로 간다.

단계 5 (분지)

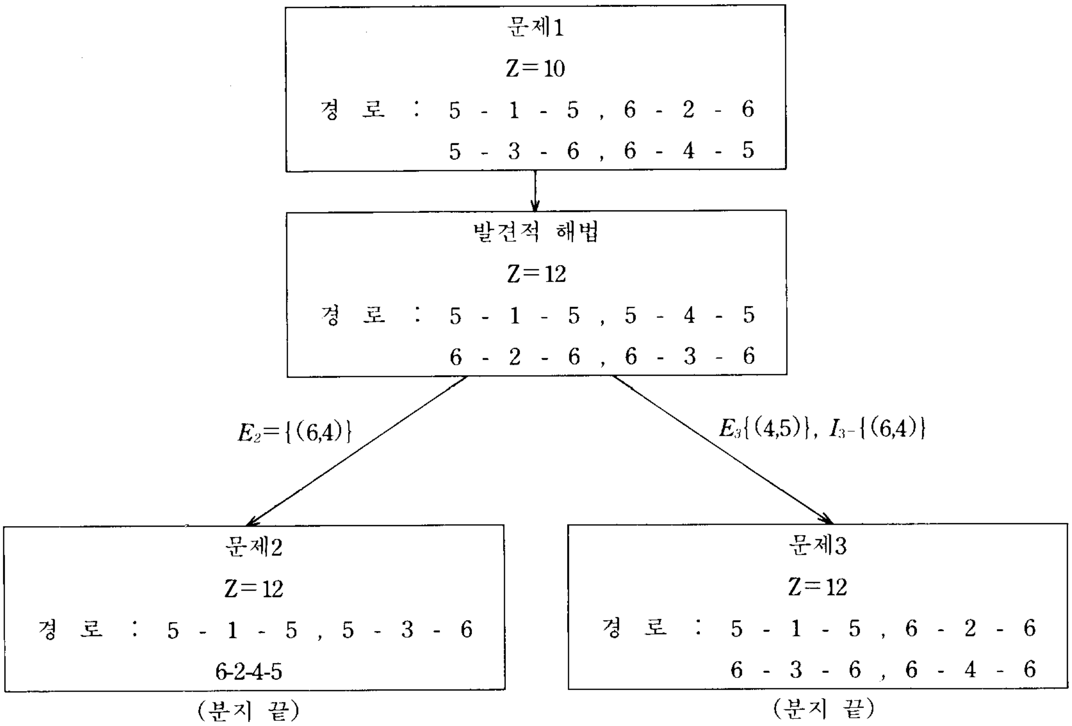
분지 전략에 의해 부분 문제를 형성하여 그 문제의 하한 값 $\underline{Z}$를 Z^*로 놓고 문제 목록에 추가시킨다.

단계 6 (최적 판정 및 탐색)

문제 목록이 비어 있는 가를 조사하여 비어 있으면 현재의 상한 값 $\bar{Z}$를 주는 해를 최적해로 하고 끝난다. 그렇지 않으면 문제 목록에서 제일 작은 하한 값 Z를 가지는 부분 문제를 선택하여 단계2로 간다.

5. 적용예제

1988년 1월 1일의 한국 관광의 예약 업무는 4곳의 수요 지점이 주어지고 이 업무에 필요한 차종은 모두 대형차이다. 현재 한국 관광에서 보유하고 있는 차고의수는 2개이며, 이 때의 각 차고와 수요 지점간의 운행 비용은 아래 표와 같다고 하자.



[그림4] 분지한계법에 의한 해 산출 과정

	1	2	3	4	5(차고)	6(차고)
1	∞	4	10	4	1	4
2	∞	∞	6	6	11	2
3	∞	∞	∞	7	8	1
4	∞	∞	∞	∞	1	2
5(차고)	1	10	1	3	0	∞
6(차고)	4	1	2	2	∞	0

이 문제를 본 해법에 의해 풀면 최적해는 다음과 같다.

총 운행 비용=12

차량 경로 : 5−1−5, 5−4−5. 6−2−6, 6−3−6

운행차량수=4

그리고 해의 산출과정을 그림으로 표시하면 [그림4]와 같다.

6. 결론

분 연구는 복수차고 복수차종 차량일정문제를 가상 차고를 도입하여 복수차고 차량일정문제로 변환시킨 후, 이 문제에 대한 새로운 수리 계획 모형을 수립하였으며, 이 모형에 입각한 최적 해법으로서 효율적인 분지 한계법을 개발하였다.

여기서 해법의 효율성을 재고하기 위해서 다음 사항에 중점을 두었다.

첫째, 불법 귀환 경로 방지식을 완화시킨 의사 배정 문제를 부분 문제로 사용하였다.

둘째, 발견적 해법에 의한 초기 상한을 이용하여 부분 문제의 생성을 억제하도록 하였다.

셋째, 분지 전략에서 생성되는 부분 문제의 수를 줄이기 위한 분지 방안을 제시하였다.

참고 문헌

1. 김 우제,복수차고 복수차종 차량일정문제의 최적해법, 서울대학교 대학원 공학 석사 학위 논문 (1987)
2. Bertossi A., Carrarasi P. and Gallo G., "On some matching problems arising in vehicle scheduling models", Networks 17, pp271-281, 1987
3. Bodin L., Golden B., Assad A. and Ball M., "Routing and scheduling of vehicles and crews-the state of the art", Comput. Ops.Res. 10, pp69-211,1983
4. Bodin L., Rosenfield and Kydes A., "UCOST : A micro approach to a transit planning problem", J. Urban Anal. 5, pp47-69. 1978
5. Carraresi P. and Gallo G., "Nework models for vehicle and crew scheduling", E. J. of Ops. Res. 16, pp139-151, 1984
6. Carpaneto G. and Toth P., "Some new branching and bounding criteria for the asymmetric traveling salesman problem", Mgmt. Sci. 26, pp 736-743, 1980
7. Cassidy P. and Bennett H.,"TRAMP-A multi-depot vehicle scheduling system", OR Quarterly 23, pp151-163, 1972
8. Clarke G. and Wright J.,"Scheduling of vehicle from a central depot to a number of delivery points", Ops. Res. 12, pp568-581, 1964
9. Dantzig G. and Fulkerson D.,"Minimizing the number of truckers to meet a fixed schedule", Naval Res. Logis. Qu. 1, pp217-222, 1954
10. Laporte G., Mercure H. and Norbert Y., "An exact algorithm for asymmetrical capacitated capacited ve hicle routing problem",Networks 16, pp33-46, 1986
11. Lenstra J. and Rinnooy Kan, "Complexity of vehicle routing and scheduling problems", Networks 11, pp221-227. 1981
12. Lin S. and Kernighan B.,"An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem", Ops. Res. 21, pp498-516, 1973
13. Paixao J. and Branco I., "A quasi-assignment algorithm for bus scheduling", Networks 17, pp249-269, 1987
14. Smith B. and Wren A., "VAMPIRE and TASC : two successfully applied bus scheduling programs", Computer scheduling of public transport, pp97-124, 1981
15. Wren A. and Holliday A., "Computer scheduling of vehicles from one or more depots to a number of delivery points", O.R. Quarterly 23, pp333-344, 1972