韓國經營科學會誌
第13券 第1號
1988年 6月

행렬게임에서의 감도분석

성 기 석*
박 순 달*

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the sensitivity analysis of matrix game. The sensitivity analysis of matrix game is classified into two types. Type one is to find the characteristic region of an element of the payoff matrix in which the value of the current optimal strategy remains as an optimum. Type two is to find that in which the basis of the current optimal strategy does not change.

This paper shows the characteristic regions of basic and nonbasic strategies. Further it is found that the characteristic regions of type one and two are same in the case that the element is that of at least one player's nonbasic strategy.

1. 서론

2人零合게임인 行列게임은 게임理論에서 가장 기본적인 模型이다. 이 행렬게임은 그 特性이나 解法은 이미 많이 연구 되어 있고 線型計劃과의 관계도 명확히 연구되어 있다. 그런데 행렬게임에서 利得行列의 값이 변하게 되면 最適戰略은 어떤 변화를 받게될 것인가? 이 논문에서는 바로 이 행렬게임의 感度分析을 정의하고 분석 방법을 정립 하고자 한다.

이 논문은 먼저 행렬게임에서 최적전략의 값을 유지하는 감도분석과 최적전략의 構造를 유지하는 감도분석을 구별하고 있다. 전자를 제1종 감도분석이라고 하고 후자를 제2종 감도분석이라고 한다.

이 논문은 2절에서 행렬게임의 최적전략에 관한 기초적인 이론을 정립한후 3절에서 제1종 감도분석을, 그리고 4절에서 제2종 감도분석을 다루고 5절에서 그 결과를 요약하였다.

* 서울대학교 산업공학과

2. 행렬게임

행렬게임에서 참가자 1과 2의 전략집합을 각각 I={i | i=1, 2, …m}, J={j | j=1, 2, …n}, 그리고 그 이득 행렬을 m×n 행렬 A=(a_{ij})이라두자, 그러면 각 참가자 1과 2의 혼합전략 X, Y는 다음과 같이 확률분포로 나타내어진다. 즉,

$$X=(x_i),\quad x_i \geq 0,\quad \forall i \in I \tag{1}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$

$$Y=(y_j),\quad y_j \geq 0,\quad \forall j \in J \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} y_j = 1$$

과 같이 나타난다. 그리고 이러한 혼합전략 X,Y들 중에서

$$\text{Max Min } X^T A\, Y = \text{Min Max } X^T A\, Y = X^{*T} A\, Y^* = v$$

가 성립되는 전략 X^*, Y^*, 실수 v가 존재하면, 이 게임은 X^*, Y^*에서 평형점을 가진다고 말하고, 실수 v를 게임값, X^* Y^*를 각각 참가자 *1*과 *2*의 최적혼합전략이라 한다.

한편, 이득행렬 A의 모든 요소에 상수 c를 더한 이득행렬 $A'=A+c$는 A와 동일한 최적전략을 가지며, 게임의 값만 달라져 $v'=v+c$이다. 따라서 A의 모든 요소가 양이고, 이때 게임의 값도 양이라고 가정하여도 일반성을 잃지 않는다. 여기서,

$$K = A\,Y^* = [k_1, k_2, \cdots k_m]^T \tag{3}$$

$$L = A^T X^* = [l_1, l_2, \cdots l_n]^T \tag{4}$$

즉, $k_i = \sum_{j \in J} a_{ij}\, y_j^*$

$$l_j = \sum_{i \in I} a_{ij}\, x_i^*$$

라 두면, k_i는 참가자 2가 최적전략 Y^*를 사용할 때 참가자 1의 전략 i의 기대이득 이고, l_j는 참가자 1이 최적전략 X^*를 사용할 때 참가자 2의 전략 j의 기대이득이다. 그러면 이들 최적혼합전략 X^*, Y^*,와 게임값 v, 그리고 기대치 K, L는 다음의 관계가 성립한다. [4: pp 36−39]

$$Max\ k_i = Min\ l_j = v \tag{5}$$

$$k_i \leq v \leq l_j,\quad \forall i \in I,\quad \forall j \in J \tag{6}$$

$$k_i < v \text{ 이면 } x_i^* = 0$$

$$l_j > v \text{ 이면 } y_j^* = 0 \tag{7}$$

$$x_i^* > 0 \text{ 이면 } k_i = v$$

$$y_j^* > 0 \text{ 이면 } l_j = v \tag{8}$$

즉, 위의 식 (5)−(8)의 조건은 X^*, Y^*가 최적혼합전략이 될 필요충분조건이다.

한편, 최적혼합전략의 집합 X^{**}, Y^{**}는 볼록인 폐집합을 이루고 있다. [11] 이때 최적혼합전략 집합X^{**}의 서로 다른 두 요소 $X_1 \in X^{**}$, $X_2 \in X^{**}$의 어떠한 볼록조합으로도 표현되지 않는 최적혼합전략 $X_0 \in X^{**}$을 참가자 1의 최적기저혼합전략이라 하고, 또 마찬가지로 최적혼합전략 집합 Y^{**}의 서로 다른 두 요소 $Y_1 \in Y^{**}$, $Y_2 \in Y^{**}$의 어떠한 볼록조합으로도 표현되지 않는 최적혼합전략 $Y_0 \in Y^{**}$을 참가자 2의 최적기저혼합전략이라 한다. 그리고 이러한 최적기저혼합전략의 쌍 (X_0, Y_0)을 게임의 기저해라고 한다.

지금 A의 어떠한 부분행렬을 M이라 하자. 그리고 M을 이루는 행에 대응되는 전략들로 이루어진 벡터를 $\bar{X}$, M을 이루는 열에 대응되는 전략들로 이루어진 벡터를 $\bar{Y}$라고 하자. 그리고 A의 행 $a_{i.}$ 중 M을 이루는 열에 대응되는 요소들 만으로 이루어진 행을 $\bar{a}_{i.}$, A의 열 a_j중 M을 이루는 행에 대응되는 요소들 만으로 이루어진 열을 $\bar{a}_j$라고 하자.

Shapley와 Snow는 게임의 기저해 (X, Y)에 대해서 다음과 같은 정리가 성립됨을 보였다.[11]

정리 1 : 어떠한 혼합전략의 쌍(X, Y)가 게임의 기저해이면, 어떠한 가역인 부분행렬 M이 있어서, 그것에 대응되는 $\bar{X}$, $\bar{Y}$와 게임값 v가 다음과 같고, (X, Y)는 $\bar{X}$, $\bar{Y}$이 외의 요소들을 모두 영으로 놓은것과 같다.

$$\bar{X}^T = \frac{e^T H}{e^T H e} \tag{9}$$

$$\bar{Y} = \frac{H e}{e^T H e} \tag{10}$$

$$v = \frac{1}{e^T H e} \tag{11}$$

단 H는 M의 역행렬

역으로, 가역인 부분행렬 M으로부터 구

해진 $\bar{X}$, $\bar{Y}$와 그 외의 요소들을 모두 영으로 놓아서 얻어지는 X, Y가 식(5)−(8)을 만족하면 (X, Y)는 게임의 기저해이다.

한편 게임의 해(X, Y)에서 $\bar{X}$, $\bar{Y}$에 포함된 순수전략들, 즉 부분행렬 M에 대응되는 순수전략을 기저전략, 기저전략이아닌 순수전략을 비기저전략이라 하자. 즉, 참가자 1과 2의 기저전략의 집합을 I1, J1, 비기전략의 집합을 I2, J2라고 하면, 이들은 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\begin{aligned} I1 &= \{i \mid x_i\text{는 } \bar{X}\text{의 한 요소}\} \\ J1 &= \{j \mid y_j\text{는 } \bar{Y}\text{의 한 요소}\} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} I2 &= I \setminus I1 \\ J2 &= J \setminus J1 \end{aligned} \tag{13}$$

단 I, J는 참가자 1과 2의 모든 순수전략의 집합.

3. 제 1 종 감도분석

제 1 종 감도분석은 현재의 최적혼합전략의 값이 그대로 유지하는 행렬계수의 변화 범위를 구하는 것이다. 이것은 현재의 최적혼합전략의 값이 앞의 2 장에서 서술한 식(5)−(8)의 조건을 계속해서 만족하게 되는 행렬계수의 변화범위를 구하는 것이다.

지금 참가자 1과 2의 최적혼합전략 X, Y가 구해져 있다 하자. 이 최적혼합 전략의 값을 고정하여두고, 이득행렬 A의 한 요소 a_{pq}를 $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$ 와 같이 변화시켜 보자. 이때 식 (5)−(8)을 만족하는 α의 범위를 구하면 이것이 바로 행렬계수 a_{pq}의 감도분석범위이다.

우선 다음과같이 네가지 경우로 나누어 그 범위를 구해보자.

가. $x_p>0$, $y_q=0$인 경우

최적혼합전략 X, Y의 값이 모두 고정되어 있고, $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다 할 때 k_i, l_j, v가 k_i', l_j', v'와 같이 변한다 하고 이들의 변화를 살펴보면 다음과 같이 나타난다. 즉

$$\begin{aligned} k'_i = \sum_{j\in J} a_{ij}'\ y_j &= \sum_{j\in J,\ j\neq q} a_{ij}'\ y_j + a_{iq}'\ y_q \\ &= \sum_{j\in J,\ j\neq q} a_{ij}\ y_j + a_{iq}\ y_q \\ &= \sum_{j\in J} a_{ij}\ y_j \\ &= k_i, \quad \forall i\in I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l'_j = \sum_{i\in I} a_{ij}'\ x_i &= \sum_{i\in I,\ i\neq p} a_{ij}'\ x_i + a_{pj}'\ x_p \\ &= \begin{cases} \sum_{i\in I,\ i\neq p} a_{ij}\ x_i + a_{pj}\ x_p, & \forall j\in J,\ j\neq q \\ \sum_{i\in I,\ i\neq p} a_{ij}\ x_i + a_{pq}\ x_p, & j=q \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{i\in I} a_{ij}\ x_i, & \forall j\in J,\ j\neq q \\ \sum_{i\in I} a_{ij}\ x_i + \alpha\ x_p, & j=q \end{cases} \\ &= \begin{cases} l_j, & \forall j\in J, j\neq q \\ l_j+\alpha x_p, & j=q \end{cases} \end{aligned}$$

즉 $k_i'=k_i$, $l_j'=l_j,(j\neq q)$, $l_q'=l_q+\alpha x_p$이다. 만약 α가 변하여 $l_q'<v$이게 되면 식(5)에서 $v'=\text{Min}\ l_j'<v$가 되어 현재의 평형점은 더 이상 평형을 이룰 수 없게 되고 게임의 값은 게임의 현재보다 낮아지게 된다. 즉, 현재의 최적혼합전략의 값은 더 이상 최적이 되지 못한다.

그러므로, $l_q'=l_q+\alpha x_p\geq v$이어야 한다. 따라서 α의 범위는

$$\alpha \geq \frac{v-l_q}{x_p} \tag{14}$$

이다.

나. $x_p=0$, $y_q>0$인 경우

마찬가지로 $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다 할 때 k_i, l_j, v가 k_i', l_j', v'와 같이 변한다 하고 이들의 변화를 살펴보면 다음과 같이 나타난다. 즉

$$k_i' = \begin{cases} k_i & ,\ \forall i\in I,\ i\neq p \\ k_i+\alpha y_q & ,\ i=p \end{cases}$$

$$l_j'=l_j \qquad \forall j\in J$$

마찬가지로 $k_p'=k_p+\alpha y_q\leq v$이어야 한다. 따라서 α의 범위는

$$\alpha \leq \frac{v-k_p}{y_q} \tag{15}$$

이다.

다. $x_p=0$, $y_q=0$인 경우

마찬가지로 $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다 할 때 k_i, l_j,

v가 k_i', l_j', v'와 같이 변한다 하고 이들의 변화를 살펴보면 다음과 같이 나타난다. 즉

$k_i' = k_i$, $\forall i \in I$

$l_i' = l_j$, $\forall j \in J$

$v' = v$

이 경우에는 α가 변화하드라도 $k_i' = k_i$. $l_i' = l_j$, $v' = v$로서 아무런 변화가 없다. 그러므로 α가 어떻게 변하드라도 현재의 혼합전략은 평형점으로 유지된다. 따라서 α의 범위는,

$$\infty \leq \alpha \leq \infty \tag{16}$$

이다.

라. $x_p > 0$, $y_q > 0$인 경우

$a_{pq}' = a_{pq} + \alpha$와 같이 변한다 할 때 k_i, l_j, v가 k_j', l_j', v'와 같이 변한다 하고 이들의 변화를 살펴보면 다음과 같이 나타난다. 즉

$$k_i' = \begin{cases} k_i & , \forall\ i \in I,\ i \neq p \\ k_i + \alpha y_q & , i = p \end{cases}$$

$$l_i' = \begin{cases} l_j & \forall i \in J,\ j \neq q \\ l_i + \alpha x_p & , j = q \end{cases}$$

즉 $k_i' = k_i$, $(i \neq p)$, $k_p' = k_p + \alpha y_q$, $l_j' = l_j$ $(j \neq q)$, $l_q' = l_q + \alpha x_p$이다. 만약 α가 변하여 $k_i' > v$이거나 $l_q' < v$이게되면 식(5)에서 $v' = \text{Max } k_i' > v$이거나 $v' = \text{Min } l_j' < v$가 되어 현재의 평형점은 더이상 평형을 이룰 수 없게 되고 게임의 값은 현재보다 낮아지게 된다. 즉, 현재의 최적혼합전략의 값은 더이상 최적이되지 못한다.

그러므로, $k_i' = k_p + \alpha y_q \geq v$이고, $l_q' = l_q + \alpha x_p \leq v$ 이어야 한다.

그런데 $k_p = l_q = v$, 이고 $x_p > 0$, $y_q > 0$이므로 α의 범위는

$$\alpha = 0 \tag{17}$$

이다.,

따라서, 제 1 종 감도분석에 있어서 위의 네가지 경우를 모두 한데 모아 나타내면 다음과 같다. 즉, 행렬계수 a_{pq}'가 $a_{pq} + \alpha$와 같이 변한다 할 때 현재의 최적혼합전략 X, Y의 값이 그대로 유지되는 α의 변화 범위는 다음과 같다.

$$l \leq \alpha \leq u \tag{18}$$

$$l = \begin{cases} \dfrac{v - l_q}{x_p} & , x_p > 0 \\ -\infty & , x_p = 0 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} \dfrac{v - k_p}{y_q} & , y_q > 0 \\ \infty & , y_q = 0 \end{cases}$$

단, $v = \text{Max } k_i = \text{Min } l_j$

$k_i = \sum a_{ij} y_j$

$l_j = \sum a_{ij} x_i$

〈예 제〉

다음과 같이 게임의 이득행렬이 주어져있다하자.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

이것의 어느한 최적혼합전략은 $X = (1/3, 2/3, 0)$, $Y = (0, 2/3, 1/3)$이고 게임의 값은 $v = 4$이다.이때, 참가자 1의 기대값 $K = A\ Y = [4\ 4\ 11/3]^T$ 참가자 2의 기대값 $L = A^T X = [4\ 4\ 4]$이다. 이것을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.

X＼Y	0	2/3	1/3	
1/3	2	6	0	4
2/3	5	3	6	4
0	5	4	3	11/3
	4	4	4	L＼K

그림. 이득행렬, 최적혼합전략, 기대값

그러면 여기서 a_{11}, a_{33}, a_{31} 및 a_{12}에 대해 감도분석해 보자.

i) a_{11}에 대해서 감도분석해보자. $x_1 >, 0$, $y_1 = 0$ 이므로

$$l = \frac{v - l_1}{x_1} = \frac{4 - 4}{1/3} = 0$$

$$u = \infty$$

따라서 $\alpha \geq 0$이고, $a_{11} \geq 2 + 0 = 2$이다.

ii) a_{33}에 대해서 감도분석해보자. $x_3 = 0$, $y_3 > 0$이므로

$$l = -\infty$$

$$u = \frac{v - k_3}{y_3} = \frac{4 - 11/3}{1/3} = 1$$

따라서 $\alpha \leq 1$이고, $a_{33} \leq 3 + 1 = 4$이다.

iii) a_{31}에 대해서 감도분석해보자. $x_3=0$, $y_3=0$이므로

$$l=-\infty$$
$$u=\infty$$

따라서 $-\infty \leq \alpha \leq \infty$이고, $-\infty \leq a_{33} \leq 3+\infty=\infty$이다.
iv) a_{12}에 대해서 감도분석해보자. $x_1>0$, $y_2>0$이므로 식 (17)에서 $\alpha=0$이고, $a_{12}=6$이다.

4. 제 2 종 감도분석

제 2 종 감도분석은 현재의 최적혼합전략의 구조가 유지되는 행렬계수의 변화범위를 구하는 것이다. 이것은 현재의 게임의 기저해가 앞의 2장에서 서술한 식 (5)－(8)의조건을 계속해서 만족하게 되는 행렬계수의 변화범위를 구하는 것이다.

지금 게임의 기저해 (X, Y)가 식(9)－(11)에 의해 구해졌고, 이때 기저전략의 집합이 I1, J1, 비기저전략의 집합이 I2, J2라고 하자. 그러고나서, A의 어떠한 행렬계수 $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다하고 p와 q가 기저전략이나 비기저전략이냐에 따라 다음의 각 경우로 구분하여 감도분석하기로 한다.

가. $p\in I1$, $q\in J2$인 경우

이 경우는 행렬계수 a_{p1}가 참가자 1의 기저전략과 참가자 2의 비기저전략에 대응되는 경우이다. 여기서도 마찬가지로 $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다 하고 k_i, l_j v가 k_i', l_j', v'와 같이 변한다 하자.

그런데 부분행렬 M은 참가자 1과 2의 모두에게 기저전략에 해당하는 행렬계수 a_{ij}들로만 이루어져 있으므로 a_{pq}는 M에 속하지 않고, 따라서 a_{pq}가 변하드라도 부분행렬 M은 전혀 변하지 않는다. 따라서 식 (9)－(11)에 의해 구해지는 $\bar{X}$, $\bar{Y}$의 확률값에는 변화가 없고 k_i', l_j', v'는 다음과 같이 변한다.

$$k_i'=k_i, \quad \forall i\in I$$
$$l_j'=\begin{cases} l_j, & \forall j\in J, j\neq q \\ l_j+\alpha x_p, & j=q \end{cases}$$

즉 $k_i'=k_i, l_j'=l_j (j\neq q)$, $l_q'=l_q+\alpha x_p$이다.만약 α가 변하여 $l_q'<v$ 이게되면 식(5)에서 $v'=\text{Min } l_j'<v$가 되어 현재의 평형점은 더이상 평형을 이룰 수 없게 되고 이 게임의 값은 현재보다 낮아지게 된다. 즉, 현재의 최적혼합전략은 더이상 최적이되지 못한다. 그러므로, $l_q'=l_q+\alpha x_p \quad v$이어야 한다. 따라서 α의 범위는

$$\alpha \geq \frac{v-l_q}{x_p} \tag{19}$$

이다.

즉 앞의 제 1 종 감도분석에서 최적혼합전략의 확률값이 변하지 않고 그대로 유지되는 감도분석의 경우와 같다.

나. $p\in I2$, $q\in J1$인 경우

이 경우는 행렬계수 a_{pq}가 참가자 1의 비기저전략과 참가자 2의 기저전략에 대응되는 경우이다. 이 경우에도 마찬가지로, 부분행렬 M은 참가자 1과 2의 모두에게 기저전략에 해당하는 행렬계수 a_{ij}들로만 이루어져 있으므로 a_{pq}는 M에 속하지 않고, 따라서 a_{pq}가 변하드라도 부분행렬 M은 전혀변하지 않는다. 따라서 식 (9)－(11)에 의해 구해지는 X, Y의 확률값에는 변화가 없다.

그래서 $a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다 할 때 k_i, l_j, v가 k_i', l_j', v'와 같이 변한다 하고 이들의 변화를 살펴보면 다음과 같이 나타난다. 즉

$$k_i'=\begin{cases} k_i & ,\forall i\in I, i\neq p \\ k_i+\alpha y_q & , \quad i=p \end{cases}$$
$$l_j'=l_j, \qquad \forall j\in J$$

마찬가지로, $k_p'=k_p+\alpha y_q < v$이어야 한다. 따라서 α의 범위는

$$\alpha \leq \frac{v-k_p}{y_q} \tag{20}$$

이다.

다. $p\in I2$, $q\in J2$인 경우

이 경우는 행렬계수 a_{pq}가 참가자 1의 비기전략과 참가자 2의 비기저전략에 대응되는 경우이다. 이 경우에도 마찬가지로, 부분행렬 M은 참가자 1과 2의 모두에게 기저전략에 해당하는 행렬계수 a_{ij}들로만 이루어져 있으므로 a_{pq}는 M에 속하지 않고, 따라서 a_{pq}가 변하드라도 부분행렬 M은 전혀 변하지 않는다. 따라서 식(9)－(11)에 의해 구해지는 $\bar{X}$, $\bar{Y}$의 확률값에는 변화가 없다.

그래서 $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다 할 때 k_i, l_j, v가 k_i', l_j', v'와 같이 변한다 하고 이들의 변화를 살펴보면 다음과 같이 나타난다. 즉

$$k_i'=k_i \quad , \forall i\in I$$
$$l_j'=l_j \quad , \forall j\in J$$

$v'=v$

따라서 α가 변화하드라도 $k_i'=k_i$, $l_j'=l_j$ $v'=v$로서 변화가 없다. 그러므로 α가 어떻게 변하드라도 현재의 혼합전략은 평형으로 유지된다. 따라서 α의 범위는,

$$-\infty \leqq \alpha \leqq \infty \tag{21}$$

이다.

라. $p \in I1$, $q \in J1$인 경우

이 경우는 행렬계수 a_{pq}가 참가자 1의 기저전략과 참가자 2의 기저전략에 대응되는 경우이다. 이 경우는 앞의 세 경우와는 달리 a_{pq}가 부분행렬 M의 한 요소가 되므로 부분행렬 M이 a_{pq}의 변화에 영향을 받는다.

우선 A의 요소 a_{pq}가 $a_{pq}'=a_{pq}+\alpha$와 같이 변한다할 때 변화된 부분행렬 $M'=M+\alpha e_{pq}$의 역행렬은 다음과 같이 변화한다.

$$H'=H-\Phi$$

단 $\begin{cases} \Phi=\dfrac{\alpha}{1+\alpha h_{pq}} h_p h_q \\ H=(h_{ij}) \text{ 즉 } h_{ij}\text{는 M의 역행렬인 H의 요소이다.} \end{cases}$

그리고 식(9)-(11)로부터 X', Y', v는 다음과 같이 변화한다.

$$\bar{X}^{T\prime}=\frac{e^T(H-\Phi)}{e^T(H-\Phi)} \tag{22}$$

$$\bar{Y}'=\frac{(H-\Phi)e}{e^T(H-\Phi)\ e} \tag{23}$$

$$v'=\frac{1}{e^T(H-\Phi)\ e} \tag{24}$$

즉 α가 변화함에 따라 기저전략의 확률값과 게임값과 게임값이 $\bar{X}'$, $\bar{Y}'$, v'와 같이 변화한다. 그러나 확률값은 변화하지만 α의 어느 범위 내에서 기저해는 유지되므로, 그러한 게임의 기저해가 평형점으로 남아있게 되는 α의 범위를 구해야 한다. 즉, $\bar{X}'$, $\bar{Y}'$, v가 식(5)-(8)의 조건을 만족하게되는 α의 범위를 구하면 된다.

이들을 만족하려면 우선 참가자 1의 기저전략들의 값인 $\bar{X}'$에 대해서,

$$\bar{X}'=\frac{e^T(H-\Phi)}{e^T(H-\Phi)e}\geqq 0 \text{ 이어야 한다. 그런데,}$$

$$v'=\frac{1}{e^T(H-\Phi)e}>0 \quad \text{이므로}$$

$e^T(H-\Phi)\geqq 0$ 이면 된다. 즉.

$e^T H \geqq e^T \Phi$

$\dfrac{\bar{X}}{v}\geqq\dfrac{\alpha}{v(1+\alpha h_{pq})} x_p h_q$ 이어야 한다.

그런데, 위식을 만족하는 $\bar{X}$가 존재하려면

$$1+\alpha h_{pq}>0 \tag{25}$$

이어야 한다. 즉, α가 식 (25)를 만족하는 범위 내에서

다음과 같이 된다.

$(1+\alpha h_{pq})\bar{X}\geqq \alpha x_p h_q$.

$\alpha(x_p h_{pq}-x_i h_{pq})\leqq x_i \ \forall i\in I1$

따라서,

$$\underset{(i\in I1,ci<0)}{\text{Max}}\left[\frac{x_i}{c_i}\right]\leqq\alpha\leqq\underset{(i\in I1,cj>0)}{\text{Min}}\left[\frac{x_i}{c_i}\right] \tag{26}$$

$i\in I1, c_i<0 \qquad i\in I1,\ c_j>0$

단 $c_i=x_p h_{qi}-x_i h_{qp}$

마찬가지로 참가자 2의 기전전략들의 값인 Y'에 대해서

$$\bar{Y}'=\frac{(H-\Phi)e}{e^T(H-\Phi)}\geqq 0 \text{ 이어야 한다. 그런데,}$$

$$v'=\frac{1}{e^T(H-\Phi)e}>0 \quad \text{이므로}$$

$(H-\Phi)\ e\geqq 0$ 이면 된다. 즉,

$He\geqq\Phi e$

$\dfrac{\bar{Y}}{v}\geqq\dfrac{\alpha}{v(1+\alpha h_{qp})} y_q h_p$

$(1+\alpha h_{pq})\bar{Y}\geqq\alpha y_q h_p$

$\alpha(y_q h_{qp}-y_j h_{qp})\leqq y_j \quad \forall j\in J1$

따라서,

$$\underset{(i\in J1,cj<0)}{\text{Max}}\left[\frac{y_j}{c_j}\right]\leqq\alpha\leqq\underset{(j\in J1,cj>0)}{\text{Min}}\left[\frac{y_j}{c_j}\right] \tag{27}$$

단, $c_j = y_q h_{jp} - y_j h_{qp}$

또한, 참가자 1의 비기저전략들의 기대치 k_i', $i \in I2$에 대해서,

$k_i' = \bar{a}_{i\cdot}' \bar{Y}' \leq v' \ \forall\, i \in I2$이어야 한다. 그런데,

$v' H' e = Y'$, $a_i' = a_{i\cdot}$, $\forall\, i \in I2$ 이므로,

$v' a_{i\cdot}\ H'\ e \leq v'$ 이면 된다.

$\bar{a}_{i\cdot}\ H'\ e \leq 1$

$\bar{a}_{i\cdot}(H - \Phi)\ e \leq 1$ 이것을 정리하면

$\alpha\{y_q(\bar{a}_{i\cdot}\ h_{\cdot p}2) - (\bar{a}_{i\cdot}\ Y - v)\ h_{qp}\} \geq a_{i\cdot} Y - v \forall\, i \in I2$

따라서,

$$\max_{(i \in I2, di > 0)} \left[\frac{k_i - v}{d_i} \right] \leq \alpha \leq \min_{(i \in I2, di < 0)} \left[\frac{k_i - v}{d_i} \right] \quad (28)$$

단, $d_i = y_q(\bar{a}_{i\cdot}\ h_{\cdot p}) - (k_i - v)\ h_{qp}$

마찬가지로, 참가자 2의 비기저전략들에 기대치 l_j', $j \in J2$에 대해서,

$l_j' = \bar{x}^{T\prime}\ \bar{a}_j' \geq v' \forall\, j \in J2$이어야 한다. 그런데,

$v' e^T H' = \bar{X}^{T\prime}$, $\bar{a}_{\cdot j} = {}'a_{\cdot j}$, $\quad j \in J2$ 이므로,

$v' \bar{a}_{\cdot j} e^T H' \geq v'$ 이면 된다.

$\bar{a}_{\cdot j} e^T H' \geq 1$

$\bar{a}_{\cdot i} e^T (H - \Phi) \geq 1$ 이것을 정리하면,

$\alpha\{x_p(h_{q\cdot}\ \bar{a}_{\cdot j}) - (\bar{X}^T a_{\cdot j} - v) h_{qp}\} \geq \bar{X}^T \bar{a}_{\cdot j}\ - v\ \forall\, j \in J$

따라서,

$$\max_{(i \in J2, dj < 0)} \left[\frac{l_j - v}{d_j} \right] \leq \alpha \leq \min_{(j \in J2, dj > 0)} \left[\frac{l_j - v}{d_j} \right] \quad (29)$$

단 $d_j = x_p(h_{q\cdot} \bar{a}_{\cdot j}) - (l_j - v) h_{qp}$

즉, 식 (5)-(8)의 조건을 만족하게 되는 α의 범위는 위의 식(25)-(29)의 공통범위이다.

〈예제〉

다음과 같이 게임의 이득행렬이 주어져있다하자.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

이것의 하나의 기저해 (X, Y)는 $X = (1/3,\ 2/3,\ 0)$, $Y = (0,\ 2/3,\ 1/3)$이고 게임의 값은 $v = 4$이다. 이것에 대응하는 부분행렬 M와 그것의 역행렬 H는

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad H = 1/12 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

. 이다. 또 참가자와 1의 기대값 $K = AY = [4, 4, 11/3]^T$참가자와 2의 기대값 $L = A^T X = [4, 4, 4]$이다. 그러면 여기서 a_{11}, a_{33}, a_{31} 및 a_{12}에 대해 감도분석해보자. 먼저 위의 주어진 기저해에 있어서의 기저전략과 비기저전략의 집합을 구하면 식(12)-(13)으로부터, $I1 = \{1\ 2\}$, $I2 = \{3\}$, $J1 = \{2\ 3\}$, $J2 = \{1\}$이다.

i) a_{11}에 대해서 감도분석해보자. $p = 1 \in I1$, $q = 1 \in J2$ 이므로 식(19)를 적용하여,

$$\alpha \geq \frac{v - l_1}{x_1} = \frac{4 - 4}{1/3} = 0$$

ii) a_{33}에 대해서 감도분석해보자. $p = 3 \in I2$, $q = 3 \in J1$ 이므로 식(20)을 적용하여,

$$\alpha \leq \frac{v - k_3}{y_3} = \frac{4 - 11/3}{1/3} = 1$$

따라서 $a_{33} \leq 3 + 1 = 4$

iii) a_{31}에 대해서 감도분석해보자. $p = 3 \in I2$, $q = 1 \in J2$ 이므로 식(21)을 적용하여,

$-\infty \leq \alpha \leq \infty$

따라서 $-\infty \leq a_{31} \leq \infty$

iv) a_{12}에 대해서 감도분석해보자. $p = 1 \in I1$, $q = 2 \in J1$ 이므로 식(25)-(28) 공통범위를 적용하여 α의 범위를 구한다. 한편 a_{12}에 대응되는 H의 계수는 h_{11}이므로 $p = 1$, $q = 1$로 두고 진행한다.

먼저 식(25)에서 보면,

$1 + \alpha h_{11} > 0$

$1 + \alpha \times 1/6 > 0$

따라서 $-6 < \alpha$이다.

다음으로 식(26)에서 보면,

$c_1 = 0$

$c_2 = x_1 h_{12} - x_2 h_{11} = -1/9$

$\max_{i \in I1,\ c_i < 0} \{x_i / c_i\} = -6$

$\min_{i \in I1,\ c_i > 0} \{x_i / c_i\} = \infty$

따라서 $-6 \leq \alpha$

다음으로 식(27) 에서보면,

$c_2 = 0$

$c_3 = y_2 h_{12} - y_3 h_{11} = -1/9$

$\mathrm{Max}\ \{x_i / c_i\} = -3$

$j \in J1,\ c_i < 0$

$\mathrm{Min}\ \{x_i / c_i\} = \infty$

$j \in J1,\ c_i > 0$

따라서 $-3 \leqq \alpha$이다.

다음으로 식 (28)에서 보면,

$d_1 = x_1,\ h_1.\bar{a}_{.1} - (l_1 - v) h_{11}$

$= 1/3 \times [6, 0]\ [2, 5]^T - (4-4) \times 1/6$

$= 4$

$\mathrm{Max}\ \{(l_j - v)/d_j\} = -\infty$

$j \in J2,\ d_j < 0$

$\mathrm{Min}\ \{(l_j - v)/d_j\} = 0$

$j \in J2,\ d_j > 0$

따라서 $\alpha \leqq 0$이다.

다음으로 식(29)에서 보면,

$d_3 = y_2 a_3.\ h_{.i} - (k_3 - v)\ h_{11}$

$= 1/3$

$\mathrm{Max}\ \{(k_i - v)/d_i\} = -1$

$i \in I2,\ d_i > 0$

$\mathrm{Min}\ \{(k_i - v)/d_i) = \infty$

$i \in I2,\ d_i < 0$

따라서 $-1 \leqq \alpha$이다.

그러므로 이들을 만족하는 α의 공통 범위를 구하면 $-1 \leqq \alpha \leqq 0$이고 따라서 $5 \leqq a_{12} \leqq 6$이다.

5. 결론.

본 논문에서 행렬게임의 감도분석을 현재의 최적전략의 확률값을 유지하는 변화 범위를 구하는 제 1 종 감도분석과, 현재의 최적전략의 전략구조를 유지하는 변화범위를 구하는 제 2 종 감도분석으로 구분하였다. 제 1 종 감도분석에서는 각 참가자의 안전수준이 유지 되어야 한다는 것을 근거로 이득 행렬계수의 변화 범위를 결정 하였다. 제 2 종 감도분석에서는 Shapley와 Snow에 의해 제시된 게임의 기저해가 유지되기 위한 이득행렬 계수의 변화범위를 구하였다.

제 1 종과 제 2 종의 감도분석 결과는 감도분석의 대상이되는 행렬계수가 두 참가자 모두의 기저 전략에 대응되는 경우에만 그 변화 범위가 다르고, 나머지 경우 즉, 두참가자중 적어도 한사람의 비기저전략에 대응하는 경우에는 제 1 종과 제 2 종에서 동일하게 나타났다.

참고문헌

1. 박순달. 게임이론 (1982) 대영사.
2. 박순달. 선형계획법(1984) 대영사.
3. Bohnenblust H.F., S.Karlin, L.S.Shapley "Solution of Discrete Two Person Games" Annals of Mathematics study No. 24.
4. Dresher M. Games of Strategy (1961) Prentice-Hall pp 36-49
5. Kaplansky I. "A Contribution to Von Neumann's Theor of Game" Annals of Mathemtics Vol.46. No.3. July 1945
6. Gal T. Postoptimal Analysis, Parametric Programming & Related Topics (1979) McGraw-Hill
7. Gale D., S.Sherman "Solution of Finite Two Persion Gams Amnnals of Mathematics Study No.24.
8. Jones A.J. Game Theory(1980) Ellis Horwood
9. Morgenstern O., Von Neuman Theory of Games and Economic Behavior 3rd ed (1953h Princeton University Press. Princeton
10. Murty K. Linear and Combinatorial programming (1976) John Wiley & Sons.
11. Shapley L.S., Snow R. "Basic Solutions of Discrete Games" Annals of Mathematics Study No.24.
12. Wald A. "Generalization of a Theorem by Von Neumann Concerning Zero Sum Two Person Games" Annels of Mathematics Vol.46. NO.2. April 1945
13. Weyl H. "Elementary Proof of a Minimax Theorem Due to Von Neumann" Annals of Mathematics Study No.24.