

論 文

大韓造船學會誌
第25卷 第4號 1988年 12月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 25, No. 4, December 1988

境界要素法에 의한 균열 進展經路의 예측

金 相 哲*, 林 元 均**

A Prediction of Crack Growth Path by Boundary Element Method

by

S.C. Kim and W.K. Lim

Abstract

The purpose of this paper is to apply the boundary element method to predict the crack growth path. The quarter point element with traction singularity at the crack tip is applied to compact tension type specimens and two inclined slit problems under compression load. The maximum stress criterion which was originally derived for the crack initiation is extended to the analysis of the crack propagation. The predicted crack paths with 1/4 crack growth increment of initial crack length agree quite well with experimental results. It is found that the computed crack path of the boundary element analysis is not mainly affected by the crack increment length.

1. 서 론

불연속부를 가지고 있는 선박, 기계나 구조물이 하중을 받으면 이들의 응력집중부로 부터 균열이 다수 발생하며, 이들의 균열은 구조 전체의 파손을 초래케 한다. 이러한 관점에서 크랙진전 거동을 다루는 파괴공학이 대두되었고, 그동안 연구가 활발히 진행되어 왔다. 균열 진전 거동의 연구의 일환으로서 크랙진전 경로에 대한 연구도 이루어지고 있으나 초기 진전방향에 대한 연구에 비하여 크랙진전의 연속경로를 추적한 연구는 많지 않다.

균열이 일단 진전을 하게 되면, 크랙선단에서의 응

력장은 변화하게 되며, 따라서 이후의 균열경로는 변화하게 된다. 그러므로 이러한 균열이 전파하여가는 경로를 예측한다면 복잡한 구조물의 위험단면을 설계 단계에서 알 수가 있으며, 또한 균열전파경로의 제어도 가능하게 된다. 이를 위하여 크랙진전 각 단계에서의 해석은 매우 중요하다.

앞에서 언급한 바와 같이 혼합모드의 균열진전 경로에 대한 이제까지의 연구는 균열초기 진전경로에 대한 연구가 대부분이며, Miyamoto 등[1]이 유한요소법을 이용하여 해석하고 있으나, 10절점 20 자유도인 삼각형요소를 사용하고 있는 등, 다소 번잡한 계산에 의한 것이며, 경계요소해석을 통하여 이를 해석한 경우는 아직 없다.

本論文은 1988年度 大韓造船學會 春季研究發表會에서 發表된 論文임

接受日字：1988年 5月 16日，再接受日字：1988年 7月 14日

* 正會員, 仁荷大學校 工科大學

** 正會員, 明知大學校 工科大學

본 연구에서는 compact tension 시험편 및 압축하중을 받는 혼합모드의 크랙에 대하여 경계요소 해석으로 크랙진전 경로를 예측하였으며, 이의 해석결과를 실험을 통하여 얻은 결과와 비교하였다. 상기 해석을 통하여 경계요소법이 테이타 입력시의 간편성 및 크랙진전 경로의 정확한 예측등에 유효성을 가지고 있음을 확인하였다.

2. 경계 적분방정식의 수치해법

일반적으로 탄성체내에 생기는 변위에 대한 관계식은 다음과 같은 경계상의 변위 및 표면력의 적분으로 주어진다[2].

$$U_i(s) = \int_{\Gamma} U_{ij}(s, Q) P_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} P_{ij}(s, Q) U_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (2-1)$$

여기서 U_i, P_i 는 부여된 물체표면 Γ 上에서의 변위 및 표면력이며, $U_{ij}(s, Q), P_{ij}(s, Q)$ 는 탄성체중 임의의 한점 s 에 i 방향으로 집중력이 작용하는 경우에, 이 집중력에 의하여 생기는 경계상의 점 Q 에 생기는 j 방향으로의 변위와 표면력으로서 2차원 탄성체인 경우에 Kelvin의 해는 다음과 같이 주어진다[12].

$$U_{ij}(s, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\} \quad (2-2)$$

$$P_{ij}(s, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \quad (2-3)$$

여기서 $r=r(s, Q)$ 는 집중력이 작용하는 점 s 와 경계상의 점 Q 까지의 거리이며, 이의 미분은 점 Q 의 좌표로서 다음과 같이 표시된다.

$$r=(r_i r_i)^{\frac{1}{2}}, \quad r_i=x_i(Q)-x_i(s),$$

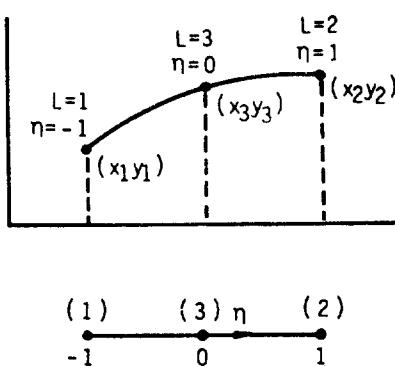


Fig. 2-1 One dimensional quadratic element

$$r_{,i}=\partial r/\partial x_i(Q)=r_{,i}/r$$

또한 G 는 전단탄성계수이며, ν 는 포아즈 비, 그리고 δ_{ij} 는 Kronecker 델타를 나타낸다. 상기식 (2-1)의 영역내의 한점 s 를 경계상의 점 S 로 취하면 다음과 같이 경계상의 값만을 이용한 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} C_{ij}(S) U_j(S) + \int_{\Gamma} P_{ij}(S, Q) U_j(Q) d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} U_{ij}(S, Q) P_j(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (2-4)$$

상기의 경계적분 방정식에서 엄밀해를 구한다는 것은 매우 어려운 일이며, 경계표면을 적절한 경계요소로 이산화하여 해석을 수행할 수 있다. 3절점 등 매개 2차요소가 경계요소로서 이산화 되어지는 경우에 요소내의 좌표 $x_i(\eta)$, 변위 $U_i(\eta)$ 및 표면력 $P_i(\eta)$ 는 각각 다음과 같이 주어진다(Fig. 2-1).

$$x_i(\eta)=A+B\eta+C\eta^2 \quad x_i(\eta)=N_i(\eta)x_i^l$$

$$U_i(\eta)=A'+B'\eta+C'\eta^2 \quad U_i(\eta)=N_i(\eta)U_i^l$$

$$P_i(\eta)=A''+B''\eta+C''\eta^2 \quad P_i(\eta)=N_i(\eta)P_i^l \quad (2-5)$$

여기서 $\eta \in (-1, 1)$, $l=1, 2, 3$, $i=1, 2$ 이며 N 는 형상함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$N_1(\eta)=1/2\eta(\eta-1)$$

$$N_2(\eta)=1/2\eta(\eta+1)$$

$$N_3(\eta)=(1+\eta)(1-\eta) \quad (2-6)$$

상기式에서 x 는 절점 좌표를 표시하며, η 는 局所좌표 그리고 U_i^l, P_i^l 은 l 번째 경계요소에 있어서 $U_i(\eta), P_i(\eta)$ 의 절점치들을 성분으로 하는 열매트릭스(column matrix)이다. 식 (2-5)를 식 (2-4)에 대입함으로서 다음과 같이 변형된 경계적분 방정식을 얻을 수 있다.

$$C_{ij}(S^a) U_j(S^a) + \sum_{\sigma=1}^m U_j(S^{d(\sigma, l)})$$

$$\int_{\Gamma_\sigma} P_{ij}(S^a, Q(\eta)) N_i(\eta) J(\eta) d\eta = \sum_{\sigma=1}^m P_j(S^{d(\sigma, l)})$$

$$\int_{\Gamma_\sigma} U_{ij}(S^a, Q(\eta)) N_i(\eta) J(\eta) d\eta \quad (2-7)$$

여기서 S^a 는 적분이 수행되는 a 번째의 고정된 점이며, σ 는 요소의 번호, m 는 경계요소의 수, Γ_σ 는 요소의 적분함께 $(-1, 1)$, $Q(\eta)$ 는 임의의 경계점, $d(\sigma, l)$ 는 σ 번째 요소에서 l 번째 절점, 그리고 $J(\eta)$ 는 좌표 변환을 위한 Jacobian으로서 다음과 같이 표시된다.

$$J=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (2-8)$$

3. 특이경계요소를 이용한 크랙진전경로의 결정

응력학대계수의 결정을 위하여 크랙선단에서 변위 및

응력의 특이성을 나타내어 주도록 하는 특이경계요소를 위하여 주변의 비율을 향상시키고자 하는 특이요소해법을 적용하였다. 이는 처음에 유한요소해석에 적용을 위하여 많은 연구자들에 의하여 제안[3]되어 졌으며, 여기에서는 크랙선단을 포함하는 요소들의 변의 중앙절점을 크랙선단을 향하여 1/4만큼 이동함으로써, 크랙선단에서의 특이성을 나타내도록 하는 간편한 수법[4~6]을 경계요소 해석에 적용하였다. 지금 크랙선단요소로서 등매개 2차요소를 사용하였을 때 요소내 변위와 표면력은 다음과 같이 주어진다.

$$U_i = A_i + B_i \sqrt{r} + C_i r \quad (3-1)$$

한편 표면력에서의 $r^{-\frac{1}{2}}$ 특이성은 상기식에서와 같이 \sqrt{r} 의 계수를 가지고 있는 표면력에 대한 식의 우측변에 $\sqrt{\frac{L}{r}}$ 을 곱하여 줌으로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_i = \frac{A'_i}{\sqrt{r}} + B'_i + C'_i \sqrt{r} \quad (3-2)$$

응력확대계수의 결정을 위하여 각도 $\theta = \pm\pi$ 크랙선상의 변위에 대한 이론식과 식(3-1)의 변위에 대한 식에서 \sqrt{r} 의 계수를 서로 等置시켜 얻은 크랙선단에서의 변위와 응력확대계수와의 관계식을 이용하여 결정하였다. 지금 Fig. 3-1과 같은 크랙선단 특이요소를 사용하였을 때에 위의 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

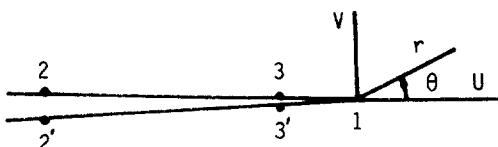


Fig. 3-1 Singular quadratic crack tip element

$$\begin{aligned} K_I &= -\frac{G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(V_3 - V_{3'}) + V_2' - V_2] \\ K_{II} &= -\frac{G}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(U_3 - U_{3'}) + U_2' - U_2] \\ K &= \begin{cases} (3-4\nu)/(1+\nu) : \text{plane stress} \\ 3-4\nu : \text{plane strain} \end{cases} \quad (3-3) \end{aligned}$$

여기서 L 은 크랙선단요소의 크기이며, K_I, K_{II} 는 모드 I 및 모드 II일 때의 응력확대계수를 나타낸다.

한편 혼합모드하의 초기 크랙진전경로에 대하여 여러 이론이 제안[7,8]되어 있으나 이중에서 물리적인 관점으로부터 이해하기 쉽고, 또한 손쉽게 크랙진전 경로를 예측할 수 있는 최대원주응력선을 이용하였다. 이는 Erdogan-Sih에 의하여 제안[9]된 재료거동의 개

념에 기초를 둔 것으로서 크랙은 크랙선단에서의 $\tau_{r\theta}=0$ 가 되는 인장방향과 수직되는 평면으로 일어나며, σ_{smax} 이 한계치에 도달하였을 때 균열이 진전한다는 이론이다. 지금 크랙선단에서의 응력성분들을 나타내어 주는 이론식에서 σ_r 를 각도 θ 에 대하여 미분하여 0으로 놓고, 균열의 자유표면인 $\theta=\pm\pi$ 인 경우에 대하여 균열진전 각도를 결정할 수 있는 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (3-4)$$

여기서 θ_0 는 크랙진전 각도를 나타낸다.

4. 경계요소 해석 및 실험결과에 대한 고찰

본 해석에 사용된 프로그램은 2차원탄성균열 문제의 해석이 가능하도록 만들어졌으며,理想화된 크랙을 모델링 하기 위하여 Blandford 등이 제안한 多領域해석법[10]을 적용하였다. 경계를 離散화하기 위한 경계요소로서 등매개 2차요소를 사용하였고, 크랙선단을 포함하는 좌우의 요소는 등매개 2차요소의 중간절점을 이동시켜 크랙선단에서의 변위 및 표면력의 특이성이 나타나도록 하였다. 수치적분법으로서 Gauss 수치적분을 이용하였으며, 적분점을 2개 이상 자유롭게 취할 수 있도록 하였다. 특이적분을 위한 적분점은 6개로 취하였고, 표면력의 불연속점인 크랙선단 및 모서리점에는 미소요소를 사용하였다. 아울러 전체 강성매트릭스를 포함하는 연립 방정식을 풀기 위하여 Gauss 소거법을 이용하였고, 크랙선단 요소의 크기는 크랙길이에 대한 크랙선단 요소의 크기, $L/a=0.1$ 로 하여 해석을 수행하였다. 본 해석을 위하여 사용한 컴퓨터는 CDC CYBER 170/835이다.

4.1. 예비적 검토

본 해석의 유효성과 정확성을 검토하기 위하여 기존의 해가 존재하며, 크랙이 진전하면서 생기는 모양인 굴절크레이지 양단에서 균일분포하중을 받는 평판을 배하였다. 無限평판내의 크랙으로 하기 위하여 시편폭에 대한 길이의 비 $h/w=0.25$, 폭에 대한 크랙 길이의 비 $a/w=0.175$ 가 되게끔 하였으며, 크랙선을 따라 두개의 영역으로 나눈 다음, 각 영역을 20개의 2차요소로 이산화한 모습을 Fig. 4-1에 図示하였다.

Fig. 4-2에는 위의 분할요소로 부터의 해석 결과를 Kitagawa 등의 등각 사상법에 의한 해[11]와 비교 図示하여 본 것으로서, 기존의 해와 거의 일치하는 정확한 해를 얻을 수 있었다. 따라서 크랙선단 부근의 미소한 요소분할과 함께 전체적으로 적은 분할요소수로

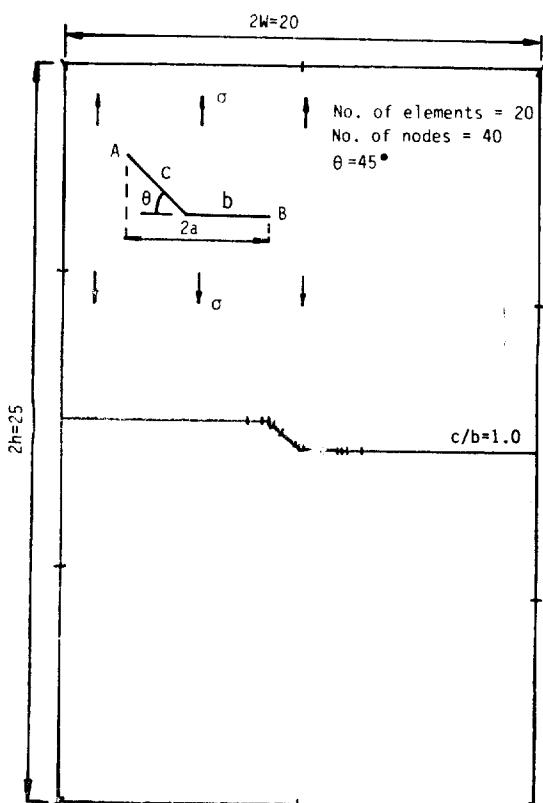


Fig. 4-1 Boundary element discretization for kinked crack in a plate subjected to uniform tensile stress

서 크랙진전 경로를 정확히 예측할 수 있음을 보여준다.

4.2. 경계요소 해석

크랙진전 경로의 예측을 위하여 재료의 파괴인성치를 구하는 대표적인 시험편인 compact tension(C.T) 시험편 및 압축하중을 받는 혼합모드의 크랙을 해석대상 모델로 하여, 초기 균열로부터 미소크랙을 일정증분량씩 진전시켜 가며 경계요소법에 의한 크랙진전 경로를 예측하여 보았다.

미소크랙 길이를 진전시킬 때마다 새로운 크랙진전 각도의 결정을 위하여, 경계요소 해석은 해석 대상으로 하는 모델의 크랙선단 부근이 위치하는 경계만을 재분할하여 줄으로서 입력 데이터 준비에 큰 노력을 요하지 않고 간단히 할 수 있다. 초기 크랙으로부터 크랙진전 각도는 최대원주응력선에 따른 식으로 결정하였으며, 그 후의 크랙진전 경로에 대해서도 동일한 조건식을 이용하였다.

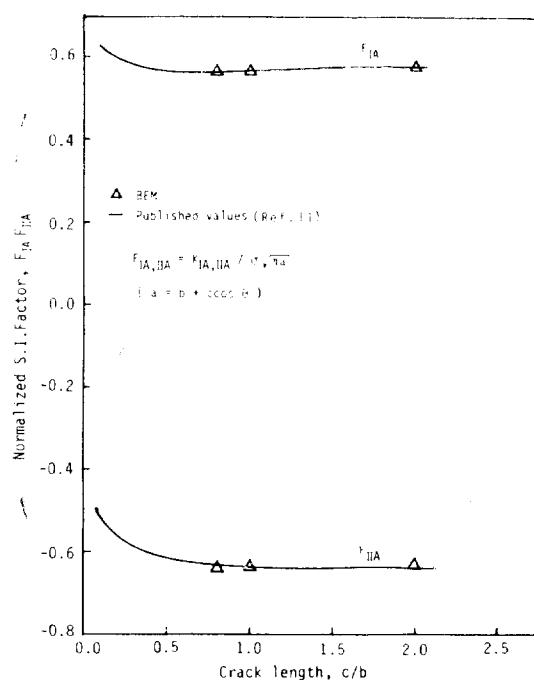


Fig. 4-2 K_{IA} , K_{IIA} vs. crack length for kinked crack

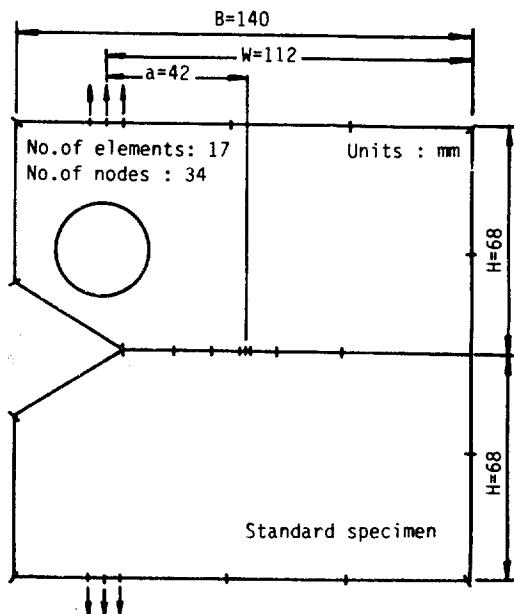


Fig. 4-3 Boundary element discretization for compact tension specimen

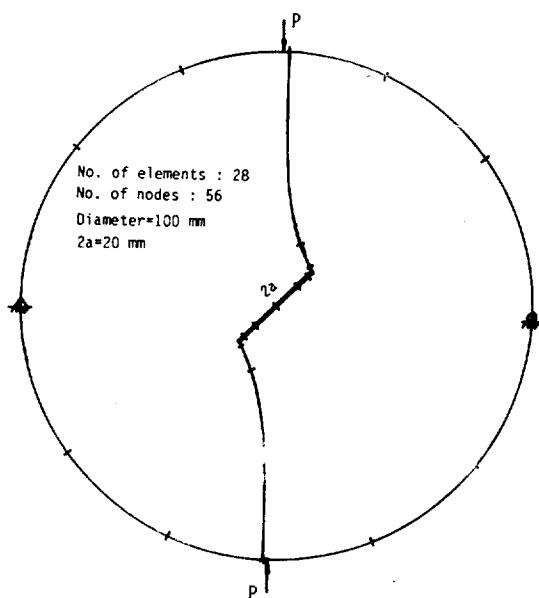


Fig. 4-4 Boundary element discretization for center slanted crack in a circular cross section

먼저 표준 C.T 시험편 및 폭의 길이를 길게 한 2개의 시험편 등 3개의 C.T 시험편 모델에 대한 경계요소 해석을 수행하였으며, 표준 시험편에 대한 대표적인 요소분할을 Fig. 4-3에 図示하였다. 폭 W의 길이가 112mm인 시험편을 표준시험편, 그리고 폭의 길이가 162mm, 172mm인 시험편을 각각 모델 A, 모델 B라고 하였을 때, 각 시험편에 대한 분할경계요소수는 영역 1, 2에 대하여 共히 17개의 2차요소로 분할하였으며 초기크랙으로부터 크랙 증분량은 10mm씩 주어가며 크랙진전 경로의 해석을 수행하였다.

다음은 단일 압축하중을 받는 원형평판내의 경사진 크래과 半無限 평판내의 단일압축하중점의 경계표면 부근에 존재하는 크래이 하중방향과 직각으로 존재하며, 크랙 중심이 하중선 및 경계표면으로 부터 크랙 길이만큼 편심된 위치에 존재하는 모델에 대하여 크랙 진전 경로를 해석하여 보았다. 前者の 경계요소 해석을 위한 경계요소 분할은 크랙선을 따라 영역분할하여 각 영역을 28개의 2차요소로 분할하였으며 (Fig. 4-4), 後자는 半無限평판내의 크래으로 가정하기 위하여 시편의 길이 B는 크랙 길이의 16배, 폭 H는 크랙길이의 7배 정도가 되도록 하여 역시 크랙선을 따라 영역분할을 한다음 각 영역을 27개의 2차요소로 분할하였다 (Fig. 4-5). 두 모델 共히 크랙의 증분량은 초기크랙의 1/4로 주어가며 해석을 수행하였다.

4-3. 실험결과의 비교

해석 결과와 실험으로부터 얻은 결과와를 비교하기 위하여 앞의 해석 모델에 대하여 아크릴材를 사용하여 실험을 수행하였다. 특히 압축하중을 받는 원판내 경사진 크래에 대하여 크래 사이의 간격을 1mm로 가공하였으며, 마찬가지로 半無限 평판내의 하중점 경계부근에 있는 크래에 대하여서도 크래 사이의 간격이 0.2 mm가 되도록 하였고, 크랙선단을 예리하게 가공하여 실험을 수행하였다.

먼저 photo. 1에 폭의 길이를 길게 한 C.T 시험편에 대한 실험결과를 図示하였다. 사진에서 보듯이 시편 폭의 길이가 점점 길어질수록 크래의 진전은 점점 곡선적 경로를 이루고 있는데, 이들 실험 결과와 해석 결과에 의한 크랙진전 경로를 상호 비교하기 위하여 Fig. 4-6에 실선과 점으로 図示하였다. 그림에서 보듯이 균열진전 경로가 급격히 변화하는 부분에서는 해석

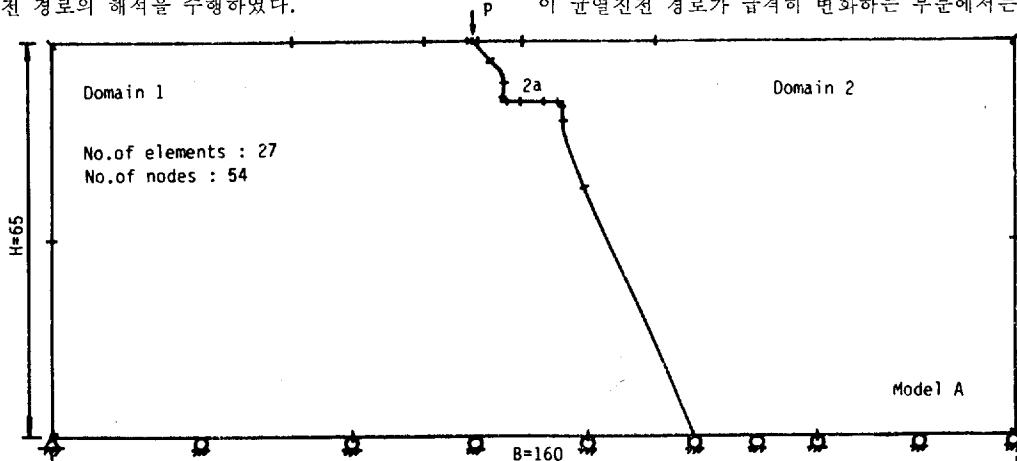


Fig. 4-5 Boundary element discretization for horizontal crack near the concentrated force

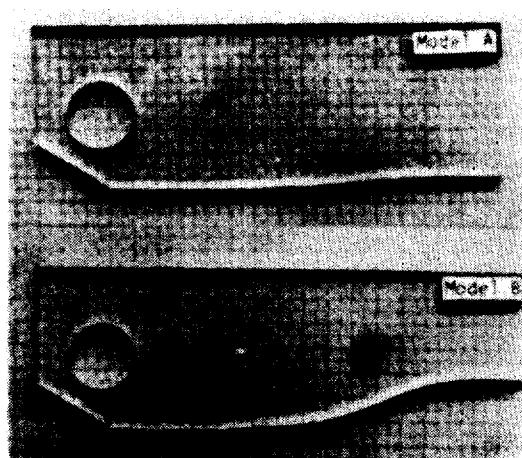


Photo. 1 Compact tension specimens

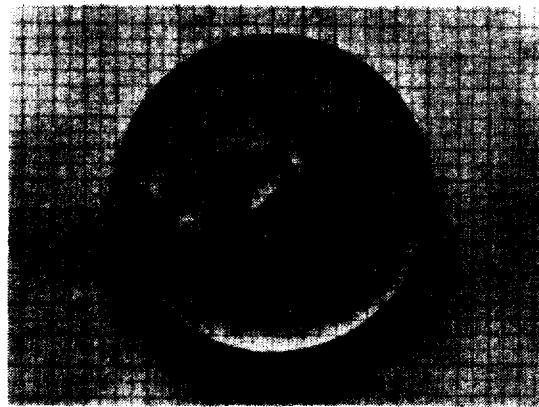


Photo. 2 Center slanted crack in a circular cross section under the concentrated force

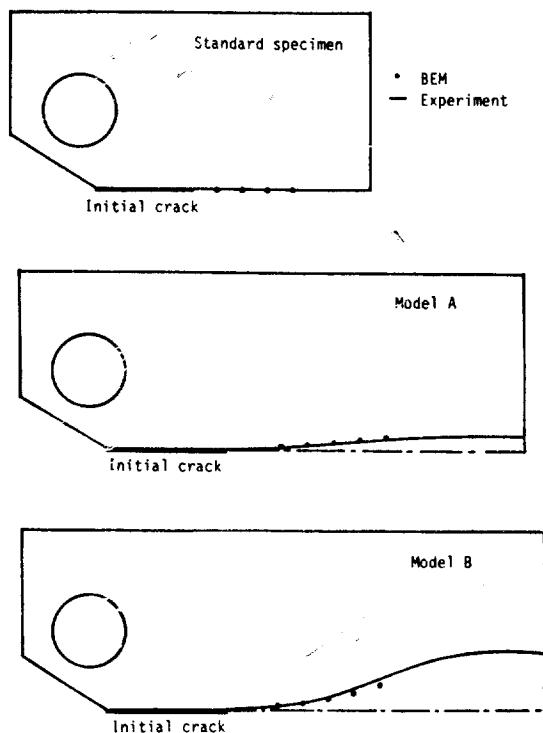


Fig. 4-6 Crack growth paths by BEM with experimental results for compact tension specimens

결과와 실험 결과가 조금의 차이를 보이고 있으나 대체적으로 실험 결과와 가까이 근접하고 있다. 이와 같이 시편의 폭이 길어짐에 따른 크랙의 곡선적 경로는 시편의 폭이 길어짐에 따른 시편 자체 중량의 증가와

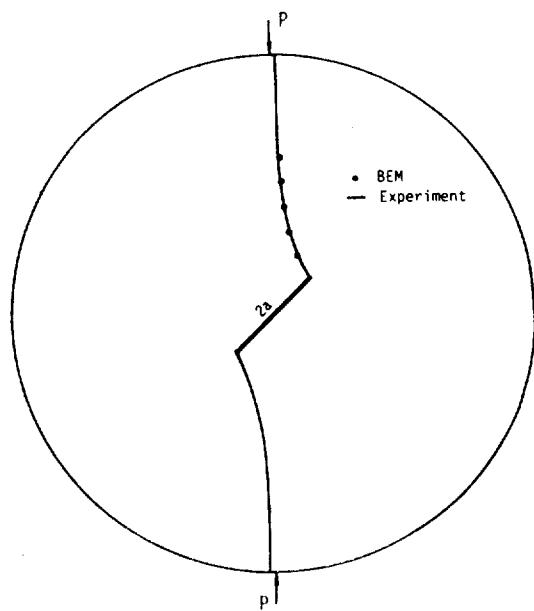


Fig. 4-7 Crack growth path by BEM with experimental results for center slanted crack under the concentrated force

크래션단에서 급수로 표시되는 응력과 변위들의 2차 항의 영향 때문이라고 볼 수 있다.

다음은 압축하중을 받는 원판내 경사진 크랙에 대하여 실험을 수행하여 이를 photo. 2에 図示하였다. 역시 실험으로부터 얻은 결과와 해석 결과를 함께 図示한 Fig. 4-7을 통하여 보듯이 해석 결과가 실험으로부터 얻은 크랙진전 경로에 거의 일치함을 보이고 있다.



Photo. 3 Horizontal crack near the concentrated force at surface (model A)

이번에는 半無限평판 내의 하중점 경계 부근의 하중 방향과 직각으로 존재하는 크랙에 대하여 실험을 수행하였다. 크랙의 진전하는 모습을 카메라로 연속적으로 촬영하였으며, 이의 대표적인 크랙진전 모습을 photo. 3에 図示하였다. 사진에서 보듯이 하중점 가까운 크랙선단에서부터 크랙 진전이 먼저 발생하여, 하중점 방향으로 일정량의 크랙진전이 진행된 후에 크랙진전이 멈추면서, 또 다른 크랙선단에서 크랙의 진전이 일어나게 된다. 이와같은 前者에 발생한 크랙의 하중점 부근에서의 크랙법총 현상은 이 부근에 작동하는 압축력의 영향 때문이라고 생각된다. 상기 실험으로부터 얻은 결과와 해석 결과를 Fig. 4-8에 図示하여본 결과,

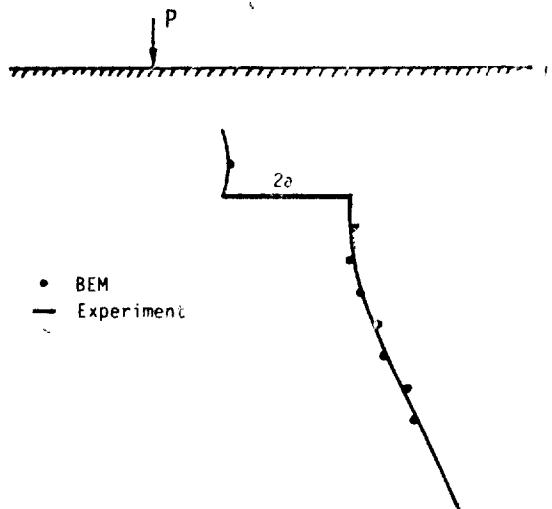


Fig. 4-8 Crack growth path by BEM with experimental results for horizontal crack near the concentrated force

해석 결과는 실험으로부터 얻은 크랙진전 경로에 지그재그 방향인, K_{II} 가 작아지는 방향으로 이루어지고 있음을 알 수 있다. 위의 해석 결과에 대한 각 크랙진전 경로마다의 중간점을 연결하였을 때에 크랙진전 경로는 실험 결과와 거의 일치함을 보이고 있다.

이상의 크랙진전 경로의 해석을 통하여 최대원주응력선에 따른 크랙진전 경로에 대한 조건식은 초기크랙 및 그 후의 크랙진전 경로를 잘 나타내어주고 있으며, 또한 크랙선단에서 응력 확대계수가 정확히 구하여 진다면 거시적 크랙 중분량으로서 크랙진전 경로를 예측할 수 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

크랙의 발생이 불가피한 구조물에서의 크랙진전에 따른 재료의 취성파괴 방지를 위하여 매우 중요한 크랙진전 경로의 예측에 경계요소법을 적용하여, 이의 효율성을 실험과 해석을 통하여 규명하였다.

본 연구를 통하여 얻은 주요한 결론을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 균열진전 경로의 예측시 경계요소법은 각 크랙 진전 단계마다 크랙선단을 포함하는 경계단을 간단히 재분할하여 줌으로서 데이터 입력과정에서의 많은 노력을 경감시키 수 있으며, 또한 크랙선단 특이요소를 적용함으로서 적운 분할요소수로 응력학대계수를 정확히 해석할 수 있다.

(2) 표면력 특이요소를 사용한 경계요소 해석에 있어서 초기크랙의 약 1/4 정도로 균열진전량을 크게 부여하여, 크랙진전 경로를 예측하여 실험 결과와 잘 일치하며, 응력화대계수가 정확히 구하여 진다면 균열진전 경로는 균열 증분량에 그다지 영향을 받지 않는다.

(3) 半無限탄성체의 경계 표면 근방의 크랙이 표면에서 단일 압축하중을 받을 때에, 크랙의 진전은 먼저 하중점에 가까운 크랙선단에서부터 하중점을 향하여 진행하며, 이후 상기 크랙이 하중점을 부근의 압축력 영역에 이르러 크랙의 진전이 둔화되면서, 다른 크랙선단에서의 크랙진전이 일어난다.

참 고 문 헌

- [1] Miyamoto, H. Fukuda, S. and Kageyama, K., "Finite Element Analysis of Crack Propagation under Compression", in Fracture, Vol. 3, ifc 4, Canada, 1977.
- [2] Love, A.E.H. "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", New York, 1944.
- [3] Atkin, J.E., "The Generation of Elements with Singularity", Int. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 1249-1260, 1976.
- [4] Henshell, R.D. and Shaw, K.G., "Crack Tip Elements are Unnecessary", Int. Num. Meth. Engng., Vol. 9, pp. 495-509, 1975.
- [5] Barsoum, R.S., "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics", Int. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 25-37, 1976.
- [6] V.E. Saouma and D. Schwemmer, "Numerical Evaluation of the Quarter Point Crack Tip Element", Int. Num. Meth. Engng., Vol. 20, pp. 1629-1641, 1984.
- [7] Nuismer, R.J., "An Energy Release Rate Criterion for Mixed Mode Fracture", Int. J. Frac., Vol. 11, pp. 245-250, 1975.
- [8] Sih, G.C., "Strain Energy Density Factor Applied Mixed Mode Crack Problems", Int. J. Frac., Vol. 10, p. 305, 1974.
- [9] Erdogan, F. and Sih, G.C., "On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear", Trans. ASME, J. Basic Engng., pp. 519-527, 1963.
- [10] Blandford, G.E. Ingraffea, A.R. and Liggett, J.A., "Two Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method", Int. Num. Meth. Engng., Vol. 17, pp. 387-404, 1981.
- [11] Kitagawa, H. Yuuki, R. and Ohira, T., "Crack-Morphological Aspects in Fracture Mechanics", Engng. Frac. Meth., Vol. 7, pp. 515-529, 1975.
- [12] Brebbia, C.A., "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, 1978.