

大學造船學會誌  
 第25卷 第1號 1988年 3月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 25, No. 1, March 1988

## 多目的函數 最適化 技法에 의한 格子型 構造物의 最適設計

任 尙 鋏\* · 梁 永 淳

### Computer-Aided Optimal Grillage Design by Multiple Objective Programming Method

by

S.J. Yim\* · Y.S. Yang\*

#### Abstract

From the engineering point of view, a synthesis as well as an analysis technique is explored to search for the improved design of grillage which is common in ship structure.

As an approximate analysis method for the grillage, an intersection reaction method is developed and compared with the finite element method. It is found that the discrepancy between these two methods is so negligible that the present method could be used effectively for the grillage analysis.

As an optimization technique, a feasible direction method is combined with the intersection reaction method in order to design a minimum weight optimal grillage. The feasible direction method shows a good numerical performance although it requires more calculation times compared with the direct search method.

Finally, the application of multiple objective optimization method to grillage is investigated in order to resolve conflicts existed between the multiple objectives which is a common characteristic of structural design problem. Goal programming method is extended to handle a nonlinear property of constraints and objective functions. It seems that the nonlinear goal programming could help not only to establish a relative importance of each objective, but also enable the designer to choose the best combination of design variables.

#### 1. 序 論

최근 船舶의 大型化로 인해 船體構造 強度問題가 많이 제기되어 왔으며, 특히 에너지 파동 이후, 보다 효율적인 船舶構造物을 만들기 위해, 船體構造 設計分野

에서도 船體의 輕量化를 위한 最適化技法의 研究가 활발히 진행되어 가고 있는 실정이다[1], [2], [3].

그러나 構造物의 多樣性 및 複雜性때문에 주로 船級規則을 이용하는 간접적인 最適化 方式이 취해져 왔으며, 최근에 이르러, 重量 및 建造費로 표시되는 目的函數의 複雜性 때문에 하나의 目的函數를 택하는 方法

接受日字: 1987年 11月 16日, 再接受日字: 1988年 1月 13日

\* 正會員, 서울大學校 工科大學 造船工學科

을 이용하여, 주로 最小 重量 또는 最小 建造費를 갖는 船體의 中央斷面設計에 관한 研究가 수행되었다 [4], [5], [6]. 이러한 最適構造 設計方法은 몇가지 특수한 경우에서만 有用할 뿐이고, 重量과 建造費가 서로 상충하는 船體構造設計에 적용할 경우에는 전체적으로 불합리한 結果를 얻게 되는 問題點이 있다.

따라서, 本 研究에서는 船體構造 設計問題를 효율적으로 다루기 위해서 船級規則을 이용하는 間接적인 方法을 사용치 않고 직접 構造力學理論을 사용하여 構造解析을 하는 直接計算法을 개발하였고, 이와 아울러 重量과 建造費란 두개의 目的函數를 동시에 취급할 수 있는 多目的 函數 最適化技法 [7], [8]을 개발하여, 보다 경제적이고 효율적인 船體構造設計 技術開發에 役점을 두었다.

2. 格子型 構造物의 構造解析

2.1. 假定

補強板을 格子型 構造物로 理想化(modelling)하기 위해 다음과 같은 假定을 세운다.

- a) 應力은 彈性限度 이내이고, 처짐은 판두께에 비해 상대적으로 작다.
- b) 열린 斷面의 補強材로 보강되어 있어 비틀應力은 무시할 만 하다.
- c) 각 部材의 交차점은 剛結되어 있다.
- d) 剪斷에 의한 영향은 무시한다.
- e) 개개의 보(beam)는 斷面이 일정한 柱狀體이다.

2.2. Intersection reaction method

格子型 構造物의 각 部材를 각각 보로 분할하여 獨立的으로 생각하면, 개개의 보는 외부 荷重과 거어더

와 補強材의 交차점에 발생하는 未知의 反力  $r$ 이 작용하는 보로 置換될 수 있다. 따라서 개개의 거어더에 대해 補強材와의 交차점에서의 처짐은 단순보 理論을 적용하면 그 거어더에 작용하는 外力과 反力  $r$ 의 函數로 표시할 수 있다. 또한 補強材에 대해서도 같은 方式으로 처짐을 既知의 荷重과 未知 反力  $r$ 의 項으로 표시할 수 있다.

같은 交차점에서, 이 두식은 서로 같으므로, 이 條件을 이용하면 未知의 反力  $r$ 이 구해진다. 만약  $(n \times m)$ 의 格子型 構造物의 경우라면,  $(n \times m)$ 개의 未知數가 생기는데, 그 값들은 각 交차점의 처짐식들을 連립하여 풀면 된다. 그러면 개개의 거어더나 補強材는 독립된 보로 置換될 수 있으므로, 기초적인 材料力學의 지식을 이용하면 굽힘應力, 剪斷力, 및 처짐 등을, 다른 方法에 비해 아주 容易하게 구할 수 있는 長點이 있다.

2.3. 計算結果 및 比較

本 解析方法에 대한 과정 및 그 結果를 검증하기 위해  $3 \times 2$  格子型構造物(Fig. 1)을 택해 計算을 수행하였고, 그 結果를 SAP IV의 結果와 比較하여 Table 1에 실었다.

상기의 結果를 比較하면, 처짐, 모우먼트에 있어서 두 方法의 結果가 서로 잘 일치하고 있음을 알았는데,

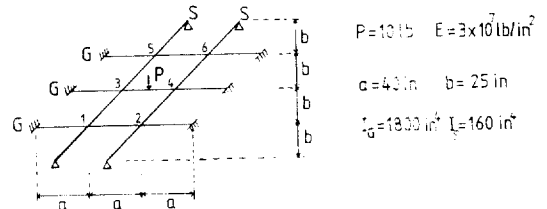


Fig. 1 (3x2) Grillage structure

Table 1 Structural analysis results

| Deflection (in)    | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Int. Reac. Met.    | 2.6E-7 | 2.6E-7 | 8.3E-7 | 8.3E-7 | 2.6E-7 | 2.6E-7 |
| SAP IV             | 2.6E-7 | 2.6E-7 | 8.3E-7 | 8.3E-7 | 2.6E-7 | 2.6E-7 |
| Girder BM(1b-in)   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
| Int. Reac. Met.    | 17.64  | 17.64  | 23.16  | 23.16  | 17.64  | 17.64  |
| SAP IV             | 17.64  | 17.64  | 23.18  | 23.18  | 17.64  | 17.64  |
| Stiffner BM(1b-in) | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
| Int. Reac. Met.    | -7.927 | -7.927 | 17.23  | 17.23  | -7.927 | -7.927 |
| SAP IV             | -7.926 | -7.926 | 17.23  | 17.23  | -7.926 | -7.926 |

본 方法은 有限要素法과 같은 汎用性은 없으나, 비틀 剛性을 거의 고려하지 않아도 될 수 있는 格子 構造物의 경우에는 精度가 떨어지지 않는 解를 얻을 수 있다고 본다.

### 3. 最小 重量 構造 設計

#### 3.1. Feasible direction method [9]

Zoutendijk가 제안한 이 方法은 gradient method의 일종으로서, 目的函數와 制限條件式의 1次度函數를 활용하여 feasible 방향을 求함으로써, 函數의 最適值를 효율적으로 구하는 最適化 技法의 하나이다. 制限條件이 있는 最適化 問題의 最適解는 대개 制限條件式上에 존재하는 경우가 많은데, 일반적으로 1次度函數를 이용하는 gradient method는 주어진 目的函數 및 制限條件 式들의 1次度函數를 구하는데 數值的 불안정성을 나타내고 있다. 이러한 數值的 불안정성은 특히 最適化 問題가 數學的 問題가 아닌 構造設計 問題인 경우에 흔히 일어나서, 最適化 技法으로 1次度函數를 이용하지 않는 direct method를 사용하거나, 數值的으로 1次度函數를 計算하는 方法을 적용해 왔다.

그러나 feasible 방향의 概念을 이용함으로써, 이러한 數值的 불안정성을 해결할 수 있었으나, 그 基本概念上 동등(equal)의 구속條件을 갖는 경우에는 feasible 영역이 매우 좁기 때문에 사용하기에 不適合한 短點이 있으나, 다량히도 工學問題에서 동등의 구속條件을 갖는 경우가 많지 않은 것 같다.

이 方法의 基本概念인 feasible 방향에 대해 간단히 살펴 보자. 먼저 아래와 같은 일반적인 非線型 最適化 問題에서

$$\begin{aligned} \min [f(x)] \\ \text{subject to } g_i(x) > 0, \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

q스텝 이후, 다음단계의 위치 벡터  $X_{q+1}$ 를 다음과 같이 정의 할때

$$X_{q+1} = X_q + \alpha S_q \quad (2)$$

여기서,  $\alpha$  = 스텝 길이

$S_q$  = feasible 방향

그러면 feasible 방향  $S_q$ 는 다음 식을 만족하여야 한다.

$$S_q^T \cdot \nabla g_i < 0. \quad (3)$$

$$S_q^T \cdot \nabla f < 0. \quad (4)$$

여기서, 식 (3)은  $S$ 의 방향이 feasible 방향이라는 條件을 나타내며, 식 (4)는 그 방향이 usable 방향이라는 條件을 나타낸다. 이러한 usable feasible 방향의 概

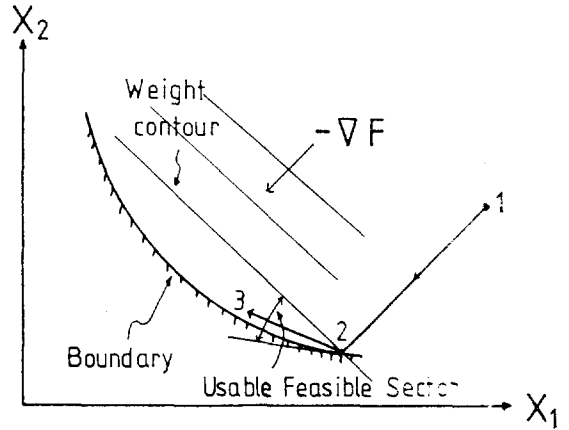


Fig. 2 Usable feasible direction

念을 2차원 問題에 적용하여 살펴 보면 Fig. 2와 같다.

일반적으로, usable feasible 방향을 찾는 方法은

- (a) random 벡터를 이용하는 方法
- (b)  $-\nabla F$ 를 拘束條件들의 交차面에 투영하는 方法
- (c)  $S_q$ 를 最適化하는 方法

등이 있는데, 이 중 c)가 쉽고, 좋은 結果를 들 수 있다. Zoutendijk의 feasible 방향은 Fig. 2에서 알 수 있듯이  $\nabla f(x)$ 의 반대방향이 되므로, 식 (3), (4)을 아래와 같이 線型化하여, 이미 개발되어 있는 線型 프로그래밍(LP)에 의해  $S_q$ 의 방향을 구한다.

$$\max. a \quad (\text{단 } a > 0).$$

$$S_q^T \cdot \nabla f + a < 0. \quad (5)$$

$$S_q^T \cdot \nabla g_i + w_i a < 0. \quad (\text{단 } i \in I)$$

여기서,  $I$ 는 구속條件의 境界線上에 設計點이 놓여 있는 구속條件式들의 집합을 표시하며,  $w_i$ 는 拘束條件을 표시하는 일의의 陽數이다. 만일 (5)식에서 구해진  $S_q$  벡터가 영 벡터가 되면 이 때의 점이 最適解라 된다.

#### 3.2. 格子型 構造物의 最適 設計

구하고자 하는 目的函數는 斷面이 일정한 寸법과 補强材로 구성된 格子構造物의 最少重量이고, 設計條件으로 最大許容 應力이 許用應力보다 크게 應力이 된다는 條件을 사용하였으며, 이때 設計變數로서는 寸법과 斷面積과 補强材의 斷面積을 선택하였는데, 그 이유로서는 단순히 構造解析 및 最適設計에서 얻어지는 解의 傾向과 局부적 성질(local optimum)을 2차원 平面에서 쉽게 파악할 수 있도록 한 것이지 方法上의 問題가 있는 것은 아니다. 이때, 構造解析에 필요한 2차모멘트나 斷面係數 값은 경험식 [10]을 이용하여 斷

面積의 函數로 표시하였다. 이러한 格子構造物의 最適構造 設計問題를 수식적으로 표시하면,

$$\min. \text{weight} = C_1 X_1 + C_2 X_2 \quad (6)$$

subject to  $\sigma_{\max} < \sigma_{\text{all}}$

여기서,  $X_1$ : 거어더의 斷面積

$X_2$ : 補强材의 斷面積

$C_1$ : 거어더의 길이와 갯수의 곱

$C_2$ : 補强材의 길이와 갯수의 곱

$\sigma_{\max}$ : 最大 韌性 應力

$\sigma_{\text{all}}$ : 許用 應力

最適化 技法으로서, 1次度函數를 이용하는 feasible direction 方法을 사용하는 관계로, 目的函數 및 制限條件의 1次度函數가 필요한데, 이때 制限條件式은 目的函數와는 달리 주어진 設計變數들의 陰函數型態로 표시되어 있어 직접 制限條件式을 미분하여 1次度函數를 구할 수 없다. 이 1次度函數를 유한차분법이 아닌 解析的 方法에 의해 구할 수 있는데, 그 과정은 다음과 같다.

$$Dr + Cq = 0 \quad (7)$$

여기서,  $r$ : 교차점에서 未知 反力 벡터

$D$ : 未知反力에 의한 처짐을 표시하는 柔軟性 행렬

$q$ : 部材에 작용하는 外力 벡터

$C$ : 外力에 의한 처짐을 표시하는 柔軟性 행렬

식 (7)에서 反力  $r$ 이 구해지면, 각 部材에 작용하는  $i$ 점에서의 韌性 모우먼트가 구해진다.

$$M_i = M_{i0} + \sum_j M_{ij} \quad (8)$$

여기서  $M_{i0}$ : 外力에 의한  $i$ 점의 韌性모우먼트

$M_{ij}$ :  $j$ 교차점에 작용하는 反力  $r_j$ 에 의한  $i$ 점의 韌性모우먼트

따라서, 韌性應力은  $\sigma_i = M_i / Z_i$ 로 표시 되므로, 이 韌性應力의 設計變數에 대한 1次度函數는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k} = \left( Z_i \frac{\partial M_i}{\partial x_k} - M_i \frac{\partial Z_i}{\partial x_k} \right) \frac{1}{Z_i^2} \quad (9)$$

그런데

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_k} = \sum_j m_{ij} \frac{\partial r_j}{\partial x_k} \quad (10)$$

여기서,  $m_{ij} = M_{ij} / r_j$

그리고 식(7)을 設計變數  $x$ 로 미분하면

$$\frac{\partial D}{\partial x_k} r + D \frac{\partial r}{\partial x_k} + \frac{\partial C}{\partial x_k} q + C \frac{\partial q}{\partial x_k} = 0. \quad (11)$$

이 되므로, 식 (10)과 식 (11)을 식 (9)에 代入하면

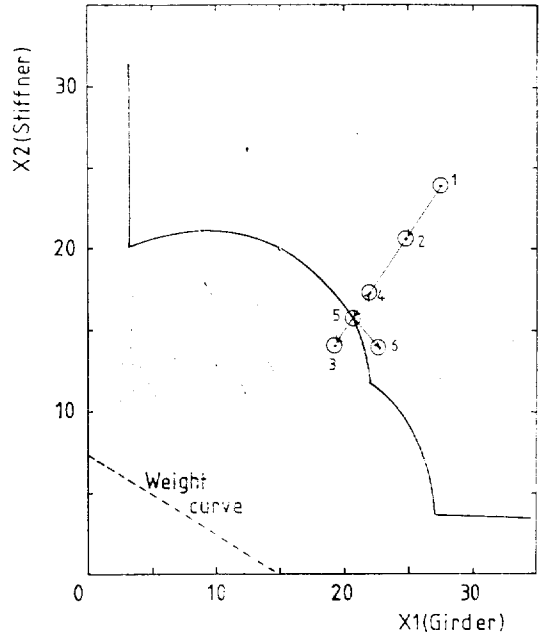


Fig. 3 Trajectory of optimum point

韌性應力의 1次度函數가 解析的으로 구해진다.

目的函數 및 制限條件의 1次度函數가 구해지면, 결국 最適化 構造物의 最適設計는 線型問題가 되어, usable feasible 방향이 線型 프로그래밍(LP)에 의해 구해지는데, 이 때 最適解를 구하는 方法을 圖式化하면 Fig. 3과 같다.

初期값으로 1點이 주어졌다고 하면, 우선 새로운 設計點의 방향을 결정하는데 있어, 1點이 feasible 영역 내에 있으므로,  $-rF$  방향을 새로운 設計點의 방향으로 잡고, 주어진 스템 길이만큼 그 방향으로 전진하면 2點이 얻어진다. 2點에서는 制限條件을 만족하므로 새로운 基準點으로 선택한다. 이때 制限條件을 표시하는 線은 最適化 과정에서 最大韌性應力이 허용應力이 되는 點들을 화일에 기억해 두었다가 그런 線이지, 처음부터 알고 있는 線은 아니다. 2點에서도 다음 設計點의 방향은  $-rF$ 이므로,  $2\alpha$  만큼 전진하여 3點으로 가면 制限條件을 넘하게 되어, 스템 길이를  $2\alpha$ 에서  $\alpha$ 로 하여 4點으로 간다. 이 4點은 制限條件을 만족하므로 새로운 基準點이 되고, 이 點에서  $-rF$ 의 방향으로 전진하면서 스템 길이를 조절하면 결국 制限條件上的 點을 만나게 된다. 그 點을 5點이라 하면, 이 點은 制限條件式의 境界선상에 있으므로 식(5)에 의해 usable feasible 방향 ( $S_q$ )를 결정하여 스템 길이만큼

전진하여 6點으로 이동할 수 있다. 이러한 과정을 반복하면, 결국 最適解에 도달하게 된다.

3.3. 計算 結果 및 考察

먼저 格子構造물의 最適設計 問題에서 중요한 制限條件式이 본 解析方法 (즉 intersection reaction method 및 feasible direction method)에 의해 Fig. 3과 같이 얻어지는 것을 검증하기 위해, 分布荷重을 받는 1×1 格子構造물을 모델로 하여 計算을 수행하였다. Fig. 4에서 實線과 點線으로 표시된 것은 材料力學의 方法을 사용하여 解析의으로 얻어진 制限條件들의 境界이며, 圓으로 표시된 것은 본 方法에 의해 얻어진 境界條件上的 點들인데, 두 경우가 상당히 일치하고 있다. 본 解析方法을 통해 feasible 영역을 표시하기 위해서는 상당한 計算時間이 소요되나, 일반적인 (n×m) 格子構造물 경우에 材料力學的 方法으로는 feasible 영역을 얻기가 不可能하여, 본 方法과 같은 數值解析方法을 이용하여 境界條件上的 點들을 구해서, 주어진 最適設計 問題의 feasible 영역을 圖示하는 方法도 유용하다 (Fig. 5).

最適化 技法의 타당성을 검증하기 위해 1×2 格子構造物에 대해 본 方法을 적용하여 얻어진 結果를 Fig. 6

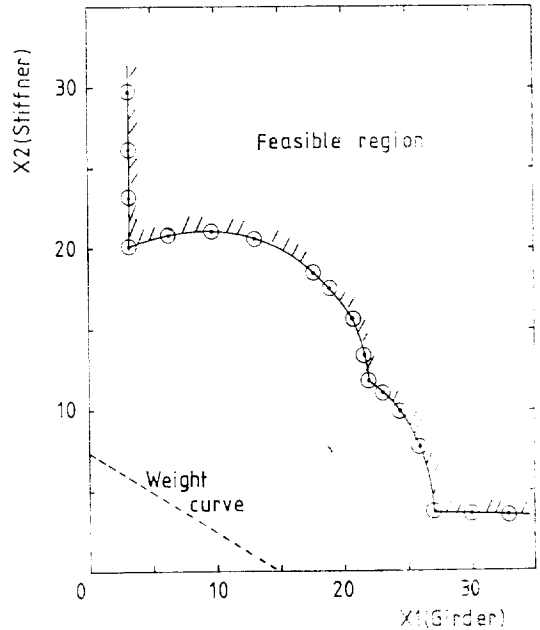


Fig. 5 2×3 Grillage(dist. load)

Table 2 Local optimal solution

|   | (X <sub>1</sub> , X <sub>2</sub> ) | Weight  |
|---|------------------------------------|---------|
| A | ( 4.36, 20.23)                     | 4,569.2 |
| B | (27.78, 5.54)                      | 4,441.6 |
| C | (18.09, 13.95)                     | 4,960.8 |

weight=120. X<sub>1</sub>+200. X<sub>2</sub>

에 圖示하였는데, 그림에서 보는 바와 같이, 格子型 構造물의 最適設計 問題에 국부적인 最適解(A,B,C점)가 존재하는 것을 확인하였다. 특히, 이러한 현상은 最適構造 設計問題에서 흔히 일어나는 것으로서, 그 국부적인 最適解의 값이 設計變數들의 初期值 선정에 따라 달라지는데, 이 경우 國庫적인 最適解는 B點에서 얻어질 것을 알았다(Table 2).

사용한 最適化 技法(feasible direction method)은 Hookes-Jeeves 方法과는 달리 境界 條件上에 設計點이 머물었다고 하면, 그 자리에 머물지 않고 계속해서 最適值를 찾아가는 특성이 있어, 最適化 技法으로서 고려해 볼 만한 方法이라고 생각된다. 이 때, 國庫적인 最適解의 특성이라고 생각할 수도 있으나, 이것은 最適化 技法의 方法上에 따른 差異이지, 진정한 國庫적인 最適解 특성에 기인하여 境界선상에 멈춘 것은 아니다.

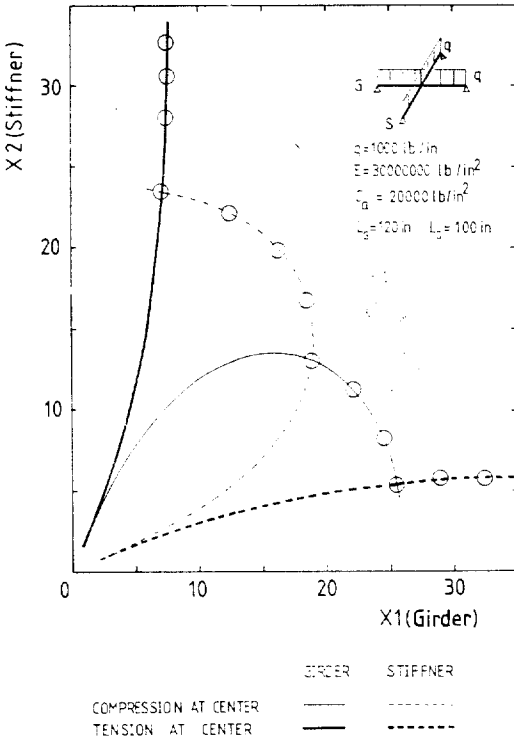


Fig. 4 1×1 Grillage (dist. load)

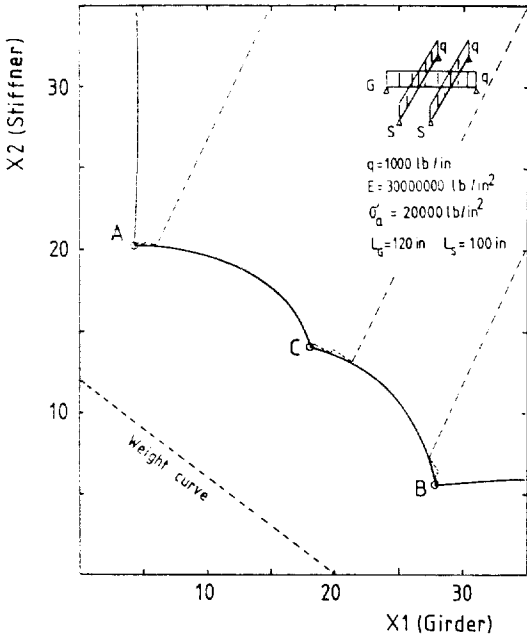


Fig. 6 Design space (1x2 grillage)

4. 多目的 函數 最適化 技法

4.1. 概要

지금껏 船體構造 設計分野에서는 보다 합리적인 構造設計을 위하여 構造物의 효율성(strength/weight), 경제성 및 신뢰성 등의 3가지 目的函數의 특성을 함께 고려할 수 있는 보다 적절한 最適化 技法의 적용을 요구하였으나, 실제의 경우, 다른 目的函數를 단순히 制限條件式으로 假定하거나, 단순히 여러개의 目的函數를 價値比率로 置換하여 하나의 目的函數를 갖는 數學的 모델에 대한 最適解를 구하는 단일 目的函數 最適化技法(single objective optimization method)이 사용되어 왔다.

그러나, 실제 工學問題가 하나의 最適解 만을 갖고 있는 경우가 드물고, 서로 상충이 되는 다수의 目的函數를 가지는 問題에 대해, 고정된 일정한 값의 도출이 아닌 다수의 目的函數들의 상호 關係속에서 가능한 最適解의 집합(set)을 제시하는 것이 보다 합리적이라는 設計觀點에서 최근 多目的 函數 最適化 技法의 研究가 점차 증가 되고 있는 실정이다[11], [12], [13].

특히 構造設計者의 가치기준이 設計環境에 따라 변할 수 있다는 점에서, 기존의 最適構造 設計 方法보다

多目的 函數의 最適化 技法은 最適構造 設計問題에서 그 이용 가능성이 높으리라 예상된다. 일반적으로, 多目的 函數 最適化 技法으로는 weighting method, ranking method 및 minimax method가 있다.

Weighting method는 다수의 目的函數에 대해 단순히 상대적인 중요성을 나타내는 加重值를 이용하여 다수의 目的函數를 하나의 目的函數로 置換하여 기존의 最適化 方法을 이용하여 最適解를 구하는 方法이다.

Ranking method는 加重值 대신에 정성적인 觀點에서 주어진 다수의 目的函數에 대해 상대적인 중요성을 나타내는 우선순위(priority level)를 이용하여, 이 우선순위에 따라 다수의 目的函數를 最適化시키는 方法으로서 Goal 프로그래밍이 대표적인 方法이다. 이 때 最適化시키는 과정은 단순히 目的函數의 最小를 기하는 것이 아니라, 다수의 目的函數에 대해 設計者가 미리 설정한 期待值 또는 目標(goal)와 현재의 設計點에서의 目的函數값 사이의 偏差를 最小化시키는 方向에서 最適解를 구한다.

Minimax method는 각 目的函數에 대한 우선순위의 결정이 곤란할때 각 目的函數의 理想的인 解에 대한 相對偏差를 구한후, 그 중 最大偏差를 最小化 시켜 最適解를 구하는 方法이다.

본 節에서는 格子構造物의 最適構造 設計에 多目的 函數 最適化 技法의 구체적인 이용 가능성을 제시하고자 두번째 方法인 Goal 프로그래밍 方法에 대한 方法論과 問題點에 대해 記述하였다.

4.2. Goal 프로그래밍 方法[14]

40년대에 George B. Dantzig가 線型 프로그래밍(LP)을 개발한 이래, 많은 학자들이 LP 技法의 활용과 그 向上에 관심을 가져 왔다. 그 중, A. Charnes와 W.W. Cooper는 1961년에 LP 方法으로는 해결할 수 없는 問題에 대해 Goal 프로그래밍 方法을 적용하여 最適解를

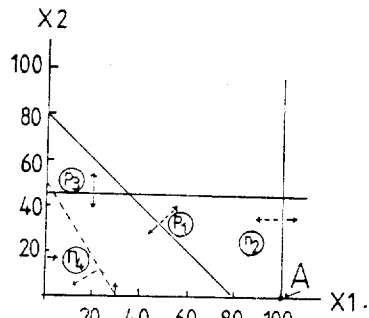


Fig. 7 Design variable space

구했다. 예를 들면, 식 (12) 및 (13)으로 주어지는 最適化問題는 Fig. 7에 보인바와 같이, 모든 拘束條件을 동시에 만족하는 feasible 영역이 存在하지 않으므로, LP로는 解를 구할 수 없다.

$$\text{Minimize } Z = -25X_1 - 15X_2 \quad (12)$$

$$\text{subject to } x_1 + x_2 < 80.$$

$$x_1 > 100. \quad (13)$$

$$x_2 < 45.$$

$$x_1, x_2 > 0.$$

이와같이 nonfeasible 解가 存在하는 最適化問題에 대해서, 設計者가 次善策으로 생각할 수 있는 最適解는 Fig. 7의 拘束條件을 가장 적게 위반하면서, 주어진 目的函數를 最小化시키는 解가 된다. Goal 프로그래밍을 적용하기 위해서는 目的函數에 대해서도 設計者가 만족할 수 있는 期待値를 할당하는데, 보통 最小値問題에 대해서는 期待値를 아주 작은 값으로 택하고, 目的函數가 이 期待値보다 작게 되게 한다. 그러면, 형태상으로는 目的函數나 拘束條件이나 별다른 바 없고, 우선순위만 다르게 되는데, 보통 우선순위는 設計條件에 따라 주어진 最適化 問題의 目的函數 및 拘束條件에 대해 결정해야 한다. 이때, 拘束條件은 절대적으로 만족해야 하므로 最上의 우선순위를 갖는데 反해, 期待値가 할당된 目的函數는 拘束條件 보다는 한 단계 아래인 우선순위를 갖는다.

뿐만 아니라, Goal 프로그래밍에서는 目的函數 자체를 最小化 하는 것이 아니라, 주어진 期待値에서 얼마나 벗어나는가 하는 정도를 표시하는 量, 즉 偏差를 最小化 시킨다. 예를 들면, 目的函數  $f_i(x)$ 에 期待値  $b_i$ 가 주어지고, 이 目的函數는 最小한 期待値  $b_i$ 보다 크면 좋다는 상황을 설정하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$f_i(x) > b_i \quad (14)$$

이때, 期待値  $b$ 에서 벗어날 수 있는 陽의 방향의 偏差  $p_i$ 와 陰의 방향의 偏差  $n_i$ 를 고려하면, 식 (14)는

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i \quad (15)$$

로 바꾸어 할 수 있다. 따라서,  $f_i(x)$ 가 最小한  $b_i$ 보다 크져 된다는 것은 식 (15)에서  $n_i$ 를 最小化 시킴으로써 얻을 수 있다. 이때 양의 偏差  $p_i$ 는 최소화시킬 필요가 없으므로 자동적으로  $p_i=0$ 이 된다. 이와 반대로,  $f_i(x) < b_i$ 이면, 陽의 偏差  $p_i$ 를 最小化 시키면 되고,  $f_i(x) = b_i$ 인 경우는 陽의 偏差와 陰의 偏差의 합, 즉  $(p_i + n_i)$ 를 最小化 시킴으로써, 동등(equality)의 條件을 만족시킬 수 있다.

상기와 같은 方法으로, 식(12), (13)을 Goal 프로그

래밍 問題로 定式化하면 식(16), (17)에서 보는바와 같이, 目的函數 및 拘束條件의 부등호에 따라

$$\text{Minimize } Z = P_1n_2 + P_2p_1 + P_3p_3 + P_4n_4 \quad (16)$$

$$\text{subject to } x_1 + x_2 + n_1 - p_1 = 80.$$

$$x_1 + n_2 - p_2 = 100. \quad (17)$$

$$x_2 + n_3 - p_3 = 45.$$

$$25x_1 + 15x_2 + n_4 - p_4 = 750.$$

여기서,  $P_1, P_2, P_3, P_4$ 는 우선순위를 表示한다.

最小化시킬 偏差들의 집합이 얻어지는데, 각 函數들의 우선순위에 따라 最小化할 偏差들(Fig. 7에서 원으로 둘러 쌓아 있는 偏差)로 구성된 새로운 형태의 目的函數, 즉 식(16)을 구성하여 最適解를 구한다. 이때 하위의 우선순위를 갖는 函數를 最小化 시키는 과정에서, 그 解는 절대로 상위의 우선순위를 갖는 函數의 정도를 低下시키지 않도록 주의할 필요가 있는데, 이 점이 바로 Goal 프로그래밍의 特色중의 하나이다.

우선 주어진 目標를 만족시켜야 할 順序대로 나열하면, 첫번째 目標는 가능한 한  $x_1 > 100$ . 이 되도록  $n_2$ 를, 두번째 目標는  $x_1 + x_2 < 80$ . 이 되도록  $p_1$ 을, 세번째 目標는  $x_2 < 45$ . 이 될 수 있도록  $p_3$ 를, 마지막 目標는 最小의 目的函數가 얻어지도록  $p_4$ 를 最小化시키면 된다. 따라서, 첫번째 目標를 만족시키는 解는  $x_1 > 100$ . 인데, 이 중에서 두번째 目標를 만족시키는 解를 구할 수가 없다. 그래서 첫번째 目標를 滿足하면서, 두번째 目標인  $p_1$ 을 最小化 시키면, A點이 얻어진다. 그런데 이 A點에서는 세번째 目標는 自動적으로 만족되고, 네번째 目標는 만족이 안되나, 이 경우, feasible 영역이 A點 만으로 주어지므로, 네번째 目標를 가능한 한 만족 시킬 수 있는 解도 역시 A點이 되어, 最適解로서 A點이 구해진다.

이 例에서 보듯이 모든 目標가 성취되지는 않았지만 LP로서 풀 수 없는 경우에 비해, Goal 프로그래밍 技

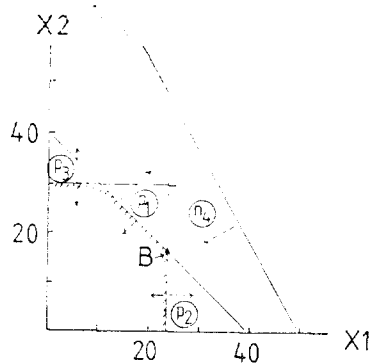


Fig. 8 Design variable space

법을 사용함으로써 最善의 解를 얻을 수 있다. 특히 feasible 領域이 存在하는 식(18), (19)와 같은 最適化 問題(Fig. 8)

$$\text{Minimize } Z = -80x_1 - 40x_2 \quad (18)$$

$$\text{subject to } x_1 + x_2 < 40.$$

$$x_1 < 24. \quad (19)$$

$$x_2 < 30.$$

$$x_1, x_2 > 0.$$

의 最適解는 B점 ( $x_1=24.$ ,  $x_2=16.$ ,  $Z=-2,560.$ )이 되는데, 이를 GP 技法으로 解를 구하려던 우선 식(18), (19)를 식(20), (21)과 같이 定式化해야 한다. 즉

$$\text{Minimize } Z = P_1(p_1 + p_2 + p_3) + P_2n_4 \quad (20)$$

$$\text{subject to } x_1 + x_2 + n_1 - p_1 = 40.$$

$$x_1 + n_2 - p_2 = 24. \quad (21)$$

$$x_2 + n_3 - p_3 = 30.$$

$$80x_1 + 40x_2 + n_4 - p_4 = 4,000.$$

따라서, 첫번째 목표를 만족하는 領域은 Fig. 8에서 보듯이, 기존의 最適化技法에서 얻어지는 feasible 領域과 同一하므로, 그 領域 內에서 두번째 목표인  $n_4$ 를 最小化 시키면서, 첫번째 목표를 만족할 수 있는 點은 B點 밖에 없으므로, Goal 프로그래밍에 의해서도 결국 같은 解가 얻어진다.

그래서 feasible 領域의 存在에 관계없이 GP 技法을 사용하면 最適解를 구할 수 있는 長點이 있는데, 이 方法은 원래 目的函數와 拘束條件이 線型인 數學的 모델을 다룰 수 있는 線型 프로그래밍 技法을 상기의 관점에서 더욱 발전 확정시킨 方法으로써 目的函數와 拘束條件이 線型인 最適化 問題에 대해서는 별 어려움이 없이 最適解를 구할 수 있다.

### 4.3. 最適 設計 問題의 定式化

格子構造物의 重量과 建造費를 目的函數로 하면서, 應力條件을 拘束條件으로 하는 最適構造 設計問題는 식(22)로 定式化 된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize Weight} &= C_1X_1 + C_2X_2 \\ \text{Cost} &= C_2X_1 + C_1X_2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{subject to } \sigma_{\max} < \sigma_{\text{all}}$$

이때, 重量函數는 통상의 方法대로 선정하였으나, 建造費 函數는 워낙 건조과정의 복잡하여 건조제이터를 蒐集 分析하는 것이 容易치 않아, 본 問題에서는 일단 重量函數와 建造費函數가 서로 상충되는 경우를 假定하여 각각의 目的函數를 조정하였는데, 이와 같이 假定된 경우라 할지라도 多目的函數 最適化 技法의 하나인 Goal 프로그래밍 (GP 技法)의 응용 가능성을 考察하는데 별 問題가 없으리라 사료된다.

식 (22)를 GP 技法으로 풀기 위해선 우선 重量과 建造費 및 拘束條件에 대해, 우선순위 및 期待值를 할당해야 되는데, 拘束條件은 항상 만족되어야 하므로 제 1의 우선순위를 拘束條件에 주고, 重量과 建造費에 대해선 最小값을 구하는 問題이므로, 期待值로서 아주 작은 값(이 경우 0)을 주고, 우선 순위로는 重量, 建造費의 順으로 주는 경우를 設定하면, 식 (22)는

$$\text{Minimize } Z = P_1p_3 + P_2p_1 + P_3p_2$$

$$\text{subject to } C_1X_1 + C_2X_2 + n_1 - p_1 = 0.$$

$$C_2X_1 + C_1X_2 + n_2 - p_2 = 0. \quad (23)$$

$$\sigma_{\max} + n_3 - p_3 = \sigma_{\text{all}}$$

이 되는데, 이때 만약 重量과 建造費의 우선순위를 바꾸는 경우에는 식 (23)에서 最小化 할 目的函數 Z만 식(24)와 같이 바뀌면 된다.

$$\text{Minimize } Z = P_1p_3 + P_2p_2 + P_3p_1 \quad (24)$$

앞서 보인 바와 같이 構造設計 問題에서는 拘束條件의 非線型 特性이 있어 기존의 Goal 프로그래밍을 그대로 使用하기가 곤란하다. 그래서 본 논문에서는 非線型 特性을 線型化시켜 기존의 Goal 프로그래밍을 사용하는 方法 대신에, 目的函數 및 拘束條件의 非線型 特性을 그대로 이용할 수 있는 非線型 Goal 프로그래밍 方法[8]과 目的函數와 拘束條件의 函數값을 이용하는 direct search 方法을 결합하였는데, 이때 direct search 方法 중, 拘束條件이 非線型인 경우에 計算시간은 많이 걸리나 計算 精度가 높은 結果를 주는 Nelder-Mead 方法을 사용하였다.

### 4.4. 計算 結果 및 考擦

상기에서 언급된 非線型 Goal 프로그래밍 技法의 타당성을 檢證하기 위해, 간단한  $1 \times 2$  格子構造物이 分布荷重을 받는 경우에 대한 最適構造 設計問題를 선택하여, 식(23) 및 (24)로 주어지는 GP 모델에 대해 計算을 遂行하였다.

初期值( $X_1=40.$ ,  $X_2=40.$ )를 사용한 結果, 우선순위가 應力, 重量, 建造費의 順 일 때는 B點( $X_1=27.8$ ,  $X_2=5.9$ )이 얻어졌고, 우선순위가 應力, 建造費, 重量의 順 일 때는 A點( $X_1=4.5$ ,  $X_2=20.5$ )이 얻어졌는데, 重量의 우선순위가 建造費보다 높을 경우는 앞 절에서 구한 結果와 잘 일치 함을 알 수 있었다. 특히, Fig. 9.에서 보는 바와 같이, 拘束條件의 非線型 특성으로 인해 야기 될 수 있는 극부적인 最適解가 있는 경우에는 初期值 선정에 따른 最適解의 結果에 상당한 주의를 要한다.

上記의 모델에서는 建造費 函數를 重量函數와 상충되게 가정하였는데, 실제에 보다 적합한 建造費 모델



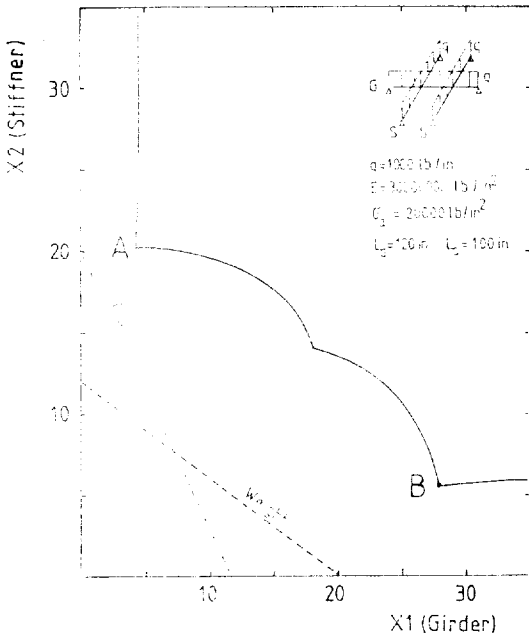


Fig. 9 Design variable space of GP model

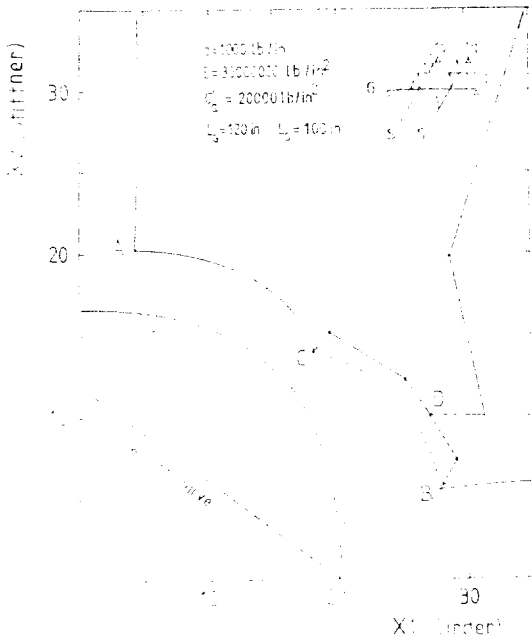


Fig. 10 Trajectory of optimal point for GP model

을 도출하여 計算을 수행할 필요가 있다. 이때 建造費 函數는 건조시 투입되는 용접봉의 重量에 비례한다고 가정하여 建造費를 단면적의 函數로 표시하면, 建造費

函數는 대략 斷面積의 2.6승에 비례한다[15]. 따라서 格子構造物의 建造費 目的函數는

$$\text{Cost} = C_1 X_1^{2.6} + C_2 X_2^{2.6} \quad (25)$$

로 表示된다. 이 GP 모델에 대해, 初期值( $X_1=35.$ ,  $X_2=35.$ )를 사용하여 計算을 수행하면, 目的函數의 우선순위가 重量, 建造費의 順일 경우는 앞의 경우와 마찬가지로 B點에서 最適值가 얻어 졌고, 建造費, 重量의 順일 경우는 앞의 경우와는 달리 C點( $X_1=17.97$ ,  $X_2=14.34$ )에서 最適值가 구해졌는데, 이는 建造費 函數의 非線型 特性에 기인한 結果로 보아진다. 이때 각각의 경우 最適解에 이르는 과정을 圖示해 보면 Fig. 10과 같이 처음부터 어느 구간(D點)까지는 重量과 建造費函數의 우선순위에 관계없이 같은 방향으로 진행해 가다가, 어느 구간을 지나서는 각각의 우선 순위에 따라 진행방향을 바꾸어 最適解에 도달하는 것을 알았다. 目的函數가 線型인 경우에도 비슷한 경향을 보이는데, 이러한 特性은 多目的函數 最適化技法 때문 이라기 보다는 最適化 方法중 사용된 Nelder-Mead 方法에 의한 結果라고 보아진다.

## 5. 結 論

앞 節의 計算結果 및 考擦로부터 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) Intersection reaction method는 SAP II와 같은 有限要素法에 비해 一般構造物에 적용할 수 있는 普遍性은 없으나, 格子構造物의 構造解析에서 데이터를 보다 간단하게 入力시킬 수 있고, 材料力學의 단순보 理論만을 적용한 관계로 構造解析 과정을 보다 容易하게 이해할 수 있어서, 最適構造 設計과정에서 간단 명료하게 最適化 技法과 연결될 수 있는 長點이 있다.

2) 最適化 技法으로서 1次度函數를 이용하는 feasible direction 方法은 非線型性이 있는 構造設計 問題에서 最適解를 찾는 데 數值的으로 안정성이 있어, 函數값만을 이용하는 direct search 方法에 비해 그 이용 가능성이 높다.

3) 多目的函數 最適化技法의 하나인 Goal 프로그래밍 方法은 서로 상반되는 目的函數가 있는 경우에, 기존의 最適化 方法보다는 目的函數간의 상관관계를 보다 합리적으로 考慮할 수 있어서, 탄력성 있는 最適設計를 할 수 있는 長點이 있다.

4) 데이터 부족으로 建造費 目的函數가 불충분하게 定式化 되었는데, 보다 효율적인 格子構造物을 設計하기 위해서는 建造費에 대한 보다 정밀한 조사가 요망

되며 아울러 構造物의 안전성을 表示하는 신뢰성 目的 函數도 多目的函數의 하나로 고려되어야 할 필요가 있다.

### 後 記

본 研究는 돈교부의 1986년도 자유과제 學術研究 助成費 支援으로 수행되었으며, 이 기회에 관계자 여러분에 깊은 謝意를 표한다.

### 參 考 文 獻

- [1] 나승수, 민계식, 엄항섭, 신동희, “유한 요소법에 의한 횡강도 부재의 최소 重量 설계”, 大韓造船學會誌, 第22卷, 第3號, 1985.
- [2] 任尙鏞, 金基和, 梁永淳, “Flexible tolerance method을 이용한 파형隔壁의 最適構造設計”, 大韓造船學會誌, 第24卷, 第4號, 1987.
- [3] 김의현 外 “Optimization Theory and its Application to Bulk carrier Design”, 技術現代, Vol. 1, 1981.
- [4] 金在瑾, 魚民佑, 辛鍾桂, “最小重量 및 建造費를 위한 油槽船 中央斷面 設計에 관한 研究”, 大韓造船學會誌, 第20卷, 第2號, 1983.
- [5] 辛鍾桂, “最適化 技法을 이용한 船體中央斷面の 最小重量設計”, 大韓造船學會誌, 第17卷, 1980.
- [6] 韓國機械研究所, “船體構造重量 및 建造費 制御 프로그램 (1)”, UCN 072-895. D, 1987.
- [7] T.D. Lyon & F. Mistree, “A computer-based Method for the Preliminary Design of Ships”, *J.S.R.*, Vol. 29, 1985.
- [8] J.D. Ignizio, “Goal programming and Extensions”, Lexington Books, 1976.
- [9] G. Zoutendijk, “Method of Feasible Direction”, Elsevier, 1960.
- [10] F. Moses & S. Cnoda, “Minimum Weight Design of Structures with application to elastic structures”, *Int. J. for Num. Method in Eng.*, Vol. 1, 1969.
- [11] Y.S. Yang, “Marine hazard assessment”, Ph. D. thesis, University of Newcastle upon Tyne, 1985.
- [12] D.L. Bartel & R.W. Marks, “The optimum Design of Mechanical Systems with Competing Design Objectives”, *J. of Eng. for Industry*, ASME, Feb. 1974.
- [13] S.S. Rao, “Structural optimization by chance constrained programming Techniques”, *Computer & Structures*, Vol. 12, 1980.
- [14] S.M. Lee, “Goal programming for decision analysis”, Auerbach publisher Inc, 1972.
- [15] 김근호, “Sequential Linear Goal Programming에 대하여”, 석사 학위 논문, 서울 대학교, 조선공학과, 1988.