Trans. KIEE. Vol 37. No. 10 OCT. 1988

論 文
37~10~10

파워 스펙트럼 해석법을 사용한 적응추정자의 파라미터 수렴특성

Parameter Convergence Properties of Adaptive Identifier using Power Spectrum Analysis

閔 內 台*·梁 海 元**
(Byung-Tae Min · Hai-Won Yang)

요 약

본 논문은 적응추정자의 파라미터 수렴특성을 기술하고, 일반적인 오차모델로 적응시스템에 대한 안정도 문제를 다룬다. 파라미터 수렴을 보장하기 위한 persistent excitation(PE) 조건이 파워스펙트럼 해석법을 사용하여 유도된다. 플랜트가 비모형화 특성을 갖지 않는다는 가정하에 설계된 적응추정자의 적응신호가 PE이면, 가조절 파라미터의 평형점이 입력 스펙트럼의 위치나 수에 관계가 없음을 밝힐 수 있다. 플랜트가 비모형화 특성을 포함하고 동일한 제어기를 사용할 때에는, PE조건이 여전히 만족되나 파라미터 평형 값이 스펙트럼에 따라 변화된다.

Abstract-This paper describes the parameter convergence property for an adaptive identifier and deals with the stability of the adaptive system in terms of the general error model. The Persistent Excitation (PE) condition to guarantee parameter convergence is derived using the Power Spectrum Analysis. In the adaptive identifier designed under the assumptions that the plant has not unmodelled dynamics, it can be shown that the equilibrium points of adjustable parameters are independent on the position or the number of input spectrums, if the adaptive signal is PE. When the plant contains unmodelled dynamics and the same controller is used, the PE condition can still hold but the parameter tuned values are changed with the spectrum.

1. 서 론

제어시스템은 제어대상의 특성을 정확히 알고 있다고 가정하여 설계된다. 이 때 플랜트 특성은 수식적 모델로 표현되고, 이 모델을 기초로 하여 제어기가 구성된다. 적응추정자 또는 적응관측자 이론은 미지시스템의 파라미터들을 식별하기 위하여 제안된 이론으로 그 동안 많은 연구가 진행되어 왔다.[1,2] 그렇지만 기존의 적응추정이론에서는 플랜트 차수를 유한하다고 가정하였기 때문에 비선형이며 시변인 적응제어시스템이 안정하게 설계될 수 있었다. 플랜트 차수를 알고 있는 경우라도 적응신호의 유계되기 위한 조건들이 주어지게 마련이다. 이러한 제약들의 일부는, 적응시스템을 실현하는 경우에 적합하지 않게 된다. 따라서 실용상 제어목적을 충분히 달성할 수 있는 강인한 설계가 요구된다.

적응추정자는 미지시스템의 외형적인 구조를 안다

*正 會 員 : 水原工業專門大學 電子計算科 助教授
**正 會 員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博
接受日字 : 1988年 6月 22日
1次修正 : 1988年 8月 12日

는 가정하에 설계된다. 일반적으로 적응제어시스템을 설계할 때에는, 적응신호들을 유계시키기 위하여 전체 적응루우프의 안정도가 보장되어야 한다. 적응시스템은 강정실(strictly positive real : 이하 SPR이라 함)과 PE(persistent excitation)조건으로 안정도가 설명된다. 적응오차모델의 SPR은 Lyapunov안정도 관점에서 적응칙을 선정하고 출력오차의 수렴특성을 유지하는 성질이며, PE는 적응파라미터의 유계성질을 설명하는 조건이다.

구조가 알려진 플랜트의 공칭모델을 식별하는 적응추정자의 PE는 파라미터들을 식별하기 위해 사용되는 입력의 주파수 조건으로 설명된다. 일반적으로 적응신호가 PE이기 위한 입력 주파수의 하한은 규명되었다. 그러나, 입력 주파수의 크기 및 위치가 적응신호에 미치는 영향과 추정파라미터에 대한 평형점(tuned value)의 변화는 해석되지 않았다.

설계시 사용되는 플랜트의 수식적인 모델(이하공칭모델이라 함)과 실제 플랜트 특성 사이에는 항상 구조적인 불확실성이 존재한다.[3,4] 이 특성(이하 비모형화 특성이라 함)은 어떤 제어시스템에서도 필연적으로 나타나는 것으로, 시스템의 물리적 특성이 부분적으로 알려져 있거나 비교적 영향이 적다고 무시해 버린 특성일 수 있다. 또는, 시스템의 모델을 임의의 낮은 차수로 하여 제어기를 설계하는 경우에도 존재한다. 이와같이 비모형화 특성이 존재하는 실제 문제에서는, 이상적인 가정하에 설계된 구조의 적응신호가 PE조건을 만족하더라도 추정모델과 공칭모델이 일치되지 않는다.[5] 그러나, 이 경우에도 적응구조가 안정하면 가조절 파라미터가 유계된 평형점에 수렴한다.[6]

본 논문은 적응추정자의 파라미터 수렴특성에 관한 해석이다. 적응신호에는 입력의 주파수 특성이 그대로 전이되므로, 적응신호의 PE조건이 스펙트럼 성질로 해석될 수 있다. 먼저, 적응추정자에 대한 오차모델을 구성하여 이 구조의 대국적 안정도특성이 검토된다. 이 경우, 적응신호가 PE이면, 공칭모델로 설계된 적응구조의 파라미터가 입력 스펙트럼의 위치나 수에 상관없이 공칭값(nominal value)으로 수렴한다는 사실을 밝힌다. 플랜트의 불확실성이 존재하더라도 적응신호의 PE성질이 유지되고,추정파라미터의 평형점도 구할 수 있다. 추정 모델은 공칭모델의 특성을 대부분 나타낼 수 있어야 한다. 따라서, 추정파라미터가 이 평형값에 접근수렴한다는 사실로 부터 평형점을 공칭값에 근접할 수 있는 주파수 조건이 구해진다. 비모형화 모델로 인하여 평형값이 입력 스펙트럼의 위치나 수에 따라 변화되는 것을 알 수 있으며, 이 사실로부터 추정모델이 공칭모델의 특성을 갖는 입력 스펙트럼 조건을 유도한다.

2. 적응추정자 구조와 안정도

플랜트를 단일 입·출력 선형시불변시스템이라 하여 그림1과 같은 적응추정자를 구성한다.

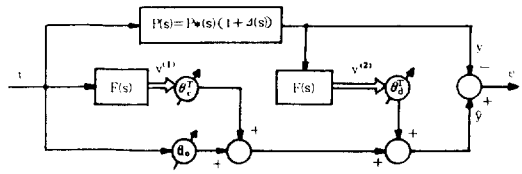


그림 1 적응추정자의 구조
Fig.1 A structure of an adaptive identifier.

표현을 간단히 하기 위하여 {s}는 안정한 전달함수의 집합, {SPR}은 SPR인 적응오차 전달함수의 집합을, {PE}는 PE조건을 만족하는 신호들의 집합이라 한다.

추정될 플랜트의 전달함수는

$$P(s)=P_*(s)(1+\Delta(s)) \tag{2-1}$$

$$P_*(s)=\frac{B(s)}{A(s)} \tag{2-2}$$

여기서 $P_*(s)$는 유한차원의 공칭모델로 {A(s),B(s)}는 서로 소이며, A(s)는 monic Hurwitz다항식으로 $\deg[A(s)]=n$이다. $P_*(s)$를 proper 전달함수라 하고 $\delta_k^T(s)=[s^k, s^{k-1}, ..., s, 1]$라 하면

$$A(s)=a^T\delta_n(s) \tag{2-3}$$

$$B(s)=b^T\delta_m(s) \tag{2-4}$$

이 때 $a^T=[1, a_n, ..., a_1]\in\mathbf{R}^{n+1}$, $b^T=[b_{m+1}, b_m, ..., b_1]\in\mathbf{R}^{m+1}$는 추정파라미터벡터로 $m\leq n$이다. 여기서 m은 B(s)의 차수이다. 일반적으로, 적응제어기는 $P_*(s)$에 관계되는 가조절 파라미터들을 식별한다.

그림1과 같은 구조에서 선형보조필터는

$$F(s)=\frac{\bar{\delta}_n(s)}{f^T\bar{\delta}^n(s)\ _n(s)} \tag{2-5}$$

$$v^{(1)}=F(s)r,\quad v^{(2)}=F(s)y \tag{2-6}$$

여기서 $f^T=[1, f_n, ..., f_1]\in\mathbf{R}^{n+1}$이고 $\bar{\delta}_k^T(s)=[1, s, ..., s^k]$이며, $f^T\delta_n(s)$는 안정한 monic다항식이다. 가조절 파라미터 $\theta(t)$는 $[\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n, \theta_{n+1}, ..., \theta_{2n}]^T=[\theta_0, \theta_c^T, \theta_d^T]\in\mathbf{R}^{2n+1}$이고, 적응신호가 z(t)가 $[r, v^{(1)T}, v^{(2)T}]\in\mathbf{R}^{2n+1}$일 때 추정출력은 $\hat{y}=z^T\theta$가 된다. 이 경우 출력오차e(t) 및 적응신호 z(t)는

$$e=\hat{y}-y \tag{2-7}$$

$$z=Q(s)r \tag{2-8}$$

단,

$$Q^T(s)=[1, F^T(s), F^T(s)P(s)] \tag{2-9}$$

한편, $\Delta(s)$는 비모형화 모델을 나타내며 다음과 같이 가정한다.

$$B_\sigma(s)=\{\Delta(s)\in\{S\}\,|\,|\Delta(j\omega)|\leq\sigma(\omega),\ ^\forall\omega\} \tag{2-10}$$

이 때 $B_\sigma(s)$는 $|\Delta(j\omega)|$가 모든 ω에 대하여 반경 $\sigma(\omega)$인 "ball"에 속하고 안정한 $\Delta(s)$의 집합을 나타낸다. 아울러, $\Delta(s)$의 주파수 특성은 다음과 같이 가정한다.

$$\lim_{\omega\to 0}\Delta(j\omega)=0 \tag{2-11}$$

본 논문에서 평형값이란, 안정한 적응시스템에대해 $t\to\infty$일 때 평형되는 파라미터 값을 의미하고, 공칭값이란 공칭모델로 설계된 구조에서 적응신호가 PE일 경우의 평형 값을 나타낸다.

비모형화 특성이 존재하더라도 공칭모델을 전제로 하여 설계된 제어기는 안정하며, e, z및 θ는 유계되어 그 평형점이 존재한다. 이 평형값을 e_T, z_T 및 θ_T라 표기하면 문헌6에 의해 다음의 적응오차모델이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix}e\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{er}(\theta_T, s) & H_{ev}(\theta_T, s)\\ H_{zr}(\theta_T, s) & H_{zv}(\theta_T, s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\v\end{bmatrix} \tag{2-12}$$

식(2-12)에서 $H(\theta_T, s)$는 전달연산자를 나타낸다. 여기서 적응오차신호는 $v=z^T\phi$이며 적응파라미터 오차벡터 $\phi=\theta-\theta_T$이다. 식(2-7), (2-8) 및 ϕ에의해 식(2-12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix}e\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^T(s)\theta_T-P(s) & 1\\ Q(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\v\end{bmatrix} \tag{2-13}$$

결국

$$e_T=[Q^T(s)\theta_T-P(s)]r \tag{2-14}$$

$$z_T=Q(s)r=z \tag{2-15}$$

이다. 적응오차모델에서 $H_{ev}(\theta_T, s)\in\{SPR\}$이므로 Lyapunov안정도 개념에서 다음과 같은 적응칙을 사용할 수 있다.

$$\dot{\phi}=-\gamma ez,\ \gamma>0 \tag{2-16}$$

만약 플랜트가 공칭모델로 완벽하게 표현 가능하면 $z_T=z_*$, $\theta_T=\theta_*$이다. 여기서 θ_* 및 z_*는 각각 파라미터 및 적응신호의 공칭값을 나타낸다. 따라서 식(2-13) 및 식(2-16)에 대하여 다음과 같은 안정도 조건이 성립된다.

(i) $z\in L_\infty$, $e_*\to 0$(exp.) $\Rightarrow\phi\in L_\infty$, $\dot{\phi}\in L_2\cap L_\infty$, $e\in L_\infty$

(ii) z가 uniformly continuous $\Rightarrow\dot{\phi}=0$, $e=0$

(iii) $z\in\{PE\}\Rightarrow\phi$, $\dot{\phi}$, $e\to 0$(exp.) (2-17)

물론 (i), (ii)결과는 $Q(s)\in\{S\}$이며 $z\in L_\infty$ 이고 $H_{er}(\theta_*, s)=0$이므로 이 성질을 이용하면 간단히 증명할 수 있다. 일반적으로 다음식

$$\beta I\geq\int_s^{s+\sigma}zz^T dt\geq\alpha I \tag{2-18}$$

를 만족하는 α, β 및 $\delta>0$이 존재하면 $z\in\{PE\}$이고 (iii)의 결과도 얻는다. 식(2-18)을 만족하고, $\Delta(s)\neq 0$인 경우에는 식(2-17)은 다음과 같이수정된다.

(i)′ $z\in L_\infty$, $e_T\in L_\infty\Rightarrow\phi\in L_\infty$, $\dot{\phi}\in L_2\cap L_\infty$, $e\in L_\infty$

(ii)′ z가 uniformly continuous $\dot{\phi}=0$, $e\in L_\infty$

(iii)′ $z\in\{PE\}\Rightarrow\phi$, $\dot{\phi}\to 0$(exp) (2-19)

3. 파워 스펙트럼 해석에 의한 PE조건[7,8]

입력신호 주파수 특성이 적응신호에 직접 천이되므로, 적응신호의 PE는 입력신호의 "sufficient richness(SR)"로 설명될 수 있다.[8] 따라서 r과 z의 주파수 변환관계를 정확히 규명하면 r의 스펙트럼 성질로 z가 PE를 만족하는가 조사할 수 있다. $\Delta(s)=0$인 적응구조에 대한 오차모델에서 $H_{er}(\theta_*, s)$: $r\to e$는 영이므로, $e=z^T\phi$이다. 따라서 식(2-16)은

$$\dot{\phi}=-\gamma zz^T\phi \tag{3-1}$$

ϕ의 초기치가 유계이면 식(3-1)의 안정도는 zz^T의 성질에 의해 결정된다. 이 때, 식(2-18)의관계 또는

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{trace}[zz^T]dt\leq\infty \tag{3-2}$$

를 만족하는 z가 존재하면 $t\to\infty$일 때 $\phi\to 0$이다.[5] 실제로 플랜트의 모든 특성을 $P_*(s)$로 나타낼 수 없으므로 $e_T\to 0$이 만족될 수 있을지는 단언할 수없다. 적응칙에 대하여 $e=e_T+z^T\phi$를 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{\phi}=-\gamma zz^T\phi-\gamma ze_T \tag{3-3}$$

식(3-3)은 선형 비제차 미분방정식으로 $e_T\in L_\infty$ 이면, 이 경우 역시 zz^T의 성질에 따라 안정도가 결정됨을 알 수 있다.

z의 스펙트럼 특성으로 PE를 증명하기 위하여 다음과 같은 자기상관함수를 정의한다. 다음식

$$R_x(\tau)=\lim_{\tau\to\infty}\int_s^{s+\tau}x(t)x^T(t-\tau)d\tau \tag{3-4}$$

가 s에서 유한할 때 함수 $x(t): \mathbf{R}_t \rightarrow \mathbf{R}^n$의 자기상관함수는 $R_x(\tau) \in \mathbf{R}^{n\times n}$이고, 이 때 x(t)를 정상과정(stationary process)이라 한다. 이 때 x(t)의 파워 스펙트럼 밀도 $S_x(\omega)$는 다음과 같이 정의 된다.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} R_x(\tau)\, d\tau \qquad (3-5)$$

결국 시간함수 x가 정상이면 $R_x(\tau)$와 $S_x(\omega)$는 Fourier변환쌍을 이룬다.[7] 이 장에서는 $\Delta(s)=0$인 경우에 대하여 정의식 (3-4)와 (3-5)의 관계를 이용하여 적응신호 PE조건을 검토한다.

입력의 스펙트럼이 ω_i, i=1, 2, ..., k에 위치하고 각각의 진폭이 $\bar{\alpha}_i$라 할 때 r(t)는 다음과 같이 표현된다.

$$r=\sum_{i=1}^{k} \bar{\alpha}_i e^{j\omega_i t} \qquad (3-6)$$

실제의 입력신호는 연속성 정상신호이므로 $\bar{\alpha}_i$는 실수 또는 순허수이다. 이 때 이 신호의 주파수 성분이 서로 다르면 상호상관함수는 0이다. 따라서, 직교성을 이용하면 식 (3-6)의 $R_r(\tau)$ 및 $S_r(\omega)$는 다음과 같이 구해진다.

$$R_r(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 e^{j\omega\tau}, \quad \alpha_i^2 = |\bar{\alpha}_i|^2 \qquad (3-7)$$

$$S_r(\omega) = 2\pi \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \delta(\omega-\omega_i) \qquad (3-8)$$

한편, k개의 스펙트럼을 가진 입력을 인과성 선형필터 H(s)에 인가하면 출력 $y(t)\in\mathbf{R}$에 대한 원점($\tau=0$)에서의 자기상관함수 $R_y(0)$는 다음과 같다.

$$R_y(0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 |H(j\omega_i)|^2 \qquad (3-9)$$

만약, $H(s)\in\mathbf{C}^{m\times 1}$이면, $y(t)\in\mathbf{R}^m$이고, 이 때 $R_y(0)\in\mathbf{C}^{m\times m}$은

$$R_y(0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \bar{H}(j\omega_i) H^T(j\omega_i) \qquad (3-10)$$

이다. 여기서 $\bar{H}(j\omega_i)=H(-j\omega_i)$로 $H(j\omega_i)$의 공액복소수를 나타낸다. 한편, $r(t)\in\mathbf{R}$, $y(t)\in\mathbf{R}$이고, $H_1(s): r\rightarrow y$ 및 $H_2(s): r\rightarrow z$가 인과성 전달함수라 하면 y와 z의 상호상관함수는 다음과 같이 구해진다.

$$R_{yz}(0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \bar{H}_1(j\omega_i) H_2(j\omega_i) \qquad (3-11)$$

일반적으로 정상신호인 x(t)에 대한 자기상관함수 $R_x(0)$는 Hermite행렬이다. 이 때 x(t)가 연속이면 $R_x(0)$는 실대칭 행렬이며, 준정치 행렬이 된다.

적응추정이나 적응제어에서의 PE조건은 식 (2-18)과 같이 적응신호 z에 대한 특성을 나타낸다. z와 r의 관계는 식 (2-15)로 주어지므로 PE 성질은 r의 주파수 스펙트럼 성질로 설명된다. 그림1과 같은 적응구조에 식 (3-6)의 입력을 인가하면 자기상관함수 $R_z(0)$은 다음과 같이 구해진다.

$$R_z(0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \bar{Q}(j\omega_i) Q^T(j\omega_i) \qquad (3-12)$$

여기서 $R_z(0)\in\mathbf{C}^{(2n+1)\times(2n+1)}$이고 $Q(j\omega_i)\in\mathbf{C}^{2n+1}$이다.

식 (3-12)는 식 (2-18)과 같이 z의 PE를 판정하는 기준으로 사용될 수 있다. 이 때 $R_z(0)$에 대한 다음 정리들을 얻을 수 있다.[7,8]

정리1. $H(j\omega_i)=\bar{Q}(j\omega_i)Q^T(j\omega_i)$이라 할 때 모든 i에 대하여 $H(j\omega_i)$는 Hermite행렬이다. 또한, $R_z(0)$도 Hermite행렬이다.

정리2. $Q(s): r\rightarrow z$가 인과성 전달함수이고 입력이 정상신호로 식 (3-6)으로 주어지며 $z: \mathbf{R}_t \rightarrow \mathbf{C}^m$일 때, 다음 관계가 성립된다.

(1). k<m이면 $\rho[R_z(0)]=k$이고, $R_z(0)\geqq 0$이다.

(2). k≧m이면 $\rho[R_z(0)]=m$이고, $R_z(0)>0$이다. 단, m=2n+1이고 $\rho[R_z(0)]$은 $R_z(0)$의 계수를 나타낸다.

이러한 정리는 파워 스펙트럼에 대한 문헌[7, 8]을 확장한 것으로 증명과정은 지면상 생략한다.

공칭모델을 추정하는 경우의 PE조건은 정리2의 값,(1)(2)로 설명된다. 즉, $R_z(0)$의 정칙성에 따라 파라미터 평형점과 공칭값의 관계를 밝힐 수 있다. 다시 말해서 k<2n+1의 스펙트럼을 가진 입력으로 구동되는 적응구조에서는 $R_z(0)$이 비정칙이며, k≧2n+1이면 $R_z(0)$이 정칙이다. 결국 적응신호의 PE는 $R_z(0)$의 정칙성으로 판정할 수 있다.

입력 스펙트럼이 k<2n+1에 집중되어 있으면 $R_z(0)\geqq 0$이므로, 다음의 Hermite형식

$$<q, R_z(0)q> = 0 \qquad (3-13)$$

을 만족하는 어떤 $q\in\mathbf{C}^{2n+1}\neq 0$이 존재한다. 실제의 입력r은 연속이고 발생 가능한 신호이므로, $R_z(0)$은 실대칭행렬이 되고 식 (3-13)은 2차형식이며, q는 실벡터이다. 한편, 식 (2-17)의 조건(ii)에 의하여 $t\rightarrow\infty$일 때 $e\rightarrow 0$이므로, 전체시스템은 안정하며 평형점 θ_T가 존재한다. 따라서

$$\bar{y} = Q^T(s)\theta_T r \qquad (3-14)$$

의 관계가 만족된다. 이 때

$$R_y(0) = R_{\bar{y}}(0) = \theta_T^T R_z(0) \theta_T \geqq 0 \qquad (3-15)$$

이다.

k≧2n+1인 경우에는 $\theta_T=\theta_*$이므로

$$R_{\bar{y}}(0) = \theta_*^T R_z(0) \theta_* \geqq 0 \qquad (3-16)$$

을 얻는다. 이 때 $R_y(0)=\theta^T R_z(0)\theta$이므로 식 (3-16)의 관계로 부터 다음식을 얻는다.

$$\phi^T R_z(0) \phi = 0 \qquad (3-17)$$

$R_z(0)$은 실대칭행렬이므로 k<2n+1인 경우에 $R_z(0)\geqq 0$이고, 따라서 식 (3-13)에 의해 $\phi\neq 0$이 존재

한다. 이 실벡터 ϕ는 $R_z(0)$의 계수가 $k<2n-1$이기 때문에 $2n-k$개의 영공간이 형성된다. 따라서 $z\in\{PE\}$이면 $\lim_{t\to\infty}\phi\neq 0$이 되므로, ϕ의 유계성은 식(3-13)으로 설명되지 않는다.

한편, $k=2n+1$이면 정리2에 의해 $R_z(0)>0$ 이고 $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\theta_*$가 성립된다. 식(2-16)에 식(2-7)를 적용하면

$$\dot{\theta}=-\gamma zz^T\theta+\gamma zy \tag{3-18}$$

r가 정상신호라 하여 식(3-18)를 평균치 시스템으로 변환하면

$$\dot{\theta}_{av}=-\gamma R_z(0)\theta_{av}+\gamma R_{zy}(0) \tag{3-19}$$

결국, 공칭모델로 설계된 적응추정기는 $\theta_{av}=\theta_*$이고, 입력이 $2n+1$개의 스펙트럼을 가지면 $R_z(0)$는 정칙행렬이므로 $R_z^{-1}(0)$이 존재한다. 이 때 공칭값 θ_*는 식(3-19)에 의해 다음과 같이 결정된다.

$$\theta_*=R_z^{-1}(0)\,R_{zy}(0) \tag{3-20}$$

일반적으로 θ_*가 존재하면 식(2-14)에 대하여

$$Q^T(j\omega_i)\,\theta_*=P(j\omega_i),\quad i=1,2,\ldots,k \tag{3-21}$$

관계가 성립된다. 따라서 ω_i, $i=1,2,\ldots,k$에 대하여 식(3-21)을 확장하면

$$G_R^T\theta_*=g_k \tag{3-22}$$

여기서

$$G_R^T=[Q(j\omega_1),Q(j\omega_2),\ldots,Q(j\omega_k)]^T$$

$$g_k=[P(j\omega_1),P(j\omega_2),\ldots,P(j\omega_k)]^T$$

이다.

$k=2n+1$인 경우에 식(3-22)의 관계를 식(3-20)에 적용하면

$$\theta_*=[\bar{G}_k G_k^T]\bar{G}_k g_k \tag{3-23}$$

의 관계가 만족된다. 결국, $R_z(0)=\bar{G}_k G_k^T$, $R_{zy}(0)=\bar{G}_k g_k$이다.

$k=2n+1$인 경우에는 G_k^T의 행벡터는 복소공간에서 1차 독립이면 되므로 ω의 크기에 무관하게 θ_*가 결정됨을 알 수 있다. 만약 $2n-1=l$이라 놓고, 이들 주파수와 다른 스펙트럼 신호를 추가로 인가하면 다음 식을 얻는다.

$$[R_z(0)+R_{z1}(0)]\theta_T=[R_{zy}(0)+R_{1yz}(0)] \tag{3-24}$$

이 때, $R_{z1}(0)$ 및 $R_{zy1}(0)$은 $l+1$번째 스펙트럼에 대한 자기상관함수이다. 물론, $R_z(0)$과 $R_{z1}(0)$과 $R_{zy}(0)$과 $R_{zy1}(0)$은 서로 1차 독립이지만 $R_z(0)+R_{z1}(0)$의 계수는 정리2에 의하여 $2n-1$을 초과할 수 없다. 이 때 식(3-24)를 분리해 쓰면

$$R_z(0)\theta_T+R_{z1}(0)\theta_T=R_{zy}(0)+R_{zy1}(0) \tag{3-25}$$

ω_i, $i=1,2,\ldots,2n+1$의 주파수에 스펙트럼이 집중되어 있으면 식(3-20)이 만족되므로, 식(3-25)에대해 $\theta_T=\theta_*$라 놓을 수 있고, 따라서 식(3-25)에 대하여

$$R_{z1}(0)\theta_*=R_{zy1}(0) \tag{3-26}$$

이 성립된다. 결국, $k\geq 2n+1$이면 $z\in\{PE\}$이고, 입력스펙트럼의 위치와 수에 관계없이 θ_*는 유일하게 결정됨을 알 수 있다.

4. 비모형화 특성과 PE조건

입력이 $2n+1$개의 스펙트럼을 가지면, 비모형화 특성이 존재하는 경우에도 식(2-18)을 만족하는 유한상수 α, β 및 $\delta>0$이 존재하므로 $z\in\{PE\}$이다. 그렇지만 $P(s)$는 $P_*(s)$의 차수보다 증가되어 n차라 가정하여 설계된 제어기는 가조절 파라미터 수가 부족해진다. 이 경우에는 고차 플랜트를 저차화 모델로 하여 설계된 제어시스템의 경우와 유사한 제어 특성이 얻어진다. 적응추정자의 경우에는 안정도 유지되어야 하고 추정된 모델의 특성이 공칭모델 또는 플랜트 특성과 유사해야 한다. 그렇지만, 비모형화 특성이 개입되면 추정파라미터의 평형치가 공칭값과 일치되지 않는다.

입력이 SR이면 적응루우프의 신호 e, 및 $z\in L_\infty$이고, 식(2-13) 및 (2-17)의 (ii), (iii)에 의해 유일해 θ_T가 존재한다. 적응칙 식(2-16)에 식(2-13)을 대입하면

$$\dot{\phi}=-\gamma zz^T(\phi+\theta_T)+\gamma zy \tag{4-1}$$

를 얻을 수 있다. 모형화되지 않는 특성이 존재하더라도 $\theta=\theta_T+\phi$이고 $t\to\infty$에 따라 $\phi\to 0$이 되므로, 식(4-1)의 평형값은

$$\theta_T=R_z^{-1}(0)\,R_{zy}(0) \tag{4-2}$$

한편, 식(2-7)에 의해 출력오차는

$$e=z^T\theta_T-y \tag{4-3}$$

이다. 이 출력오차에 대한 자기상관함수를 구하면 다음과 같다.

$$R_e(0)=R_{\hat{y}}(0)-R_y(0) \tag{4-4}$$

여기서

$$R_{\hat{y}}(0)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2\,|Q^T(j\omega_i)\,\theta_T|^2 \tag{4-5}$$

이다. 일반적으로 $\Delta(s)\neq 0$인 경우에도 순수한 정현파 신호를 인가하면 $R_e(0)=0$이므로 $R_{\hat{y}}(0)=R_y(0)$의 관계가 성립된다. 물론 이와 같은 사실이 $z^T\theta_T=y$임을 의미하는 것이 아니다. 따라서 $e_T\to 0$(exp.)라 단정할 수 없다. $R_e(0)=0$이라 함은 자기상관함수정의에 의하여 $z^T\theta_T$ 및 y의 크기가 같다는 것을 나타내니 위상차가 영이라는 것은 아니다. 본 논문에서는 이 점을 착안하여 $e_T\to 0$(exp.)이 만족하는 조건을 구한다. r(t)는 일반적으로 고조파 성분의 신호이므로 정상상태오차 $e(\infty)$값을 평가하는 방법으로

e_T의 성질을 해석할 수 있을 것이다. 식(2-13)에서 $e_T = Q^T(s)\theta_T - P(s)r$이므로 e_T에 대한 정상상태의 단위계단응답은 다음과 같다.

$$e_T(\infty) = Q^T(0)\theta_T - P(0) \qquad (4-6)$$

공칭모델로 설계된 적응추정자에서는 $\theta_T = \theta_*$이고, $Q(s)$에 포함된 $f^T\delta_n(s)$는 극영점 소거에 의해 $e^*(s)=0$이 되므로 $e_*(\infty)=0$이다. 따라서 $Q^T(0)\theta_* = P_*(0)$이 되며

$$\theta_{1*} + \theta_{n+1*} \cdot P_*(0) = f_1 P_*(0) \qquad (4-7)$$

의 관계가 성립된다.

그러나, 비모형화 특성이 존재하면 식(4-2)를 만족하는 θ_T에 대해 $Q^T(s)\theta_T$와 $P(s)$ 분모차수는 일치하지 않으며, 공칭모델인 경우와는 달리 $f^T\delta_n(s)$의 소거는 이루어지지 않는다. 그렇지만 복소공간내에서 모든 ω_i, $i=1, 2, \cdots, k$에 대하여

$$Q^T(j\omega_i)\theta_T = P(j\omega_i) \qquad (4-8)$$

가 만족되는 어떤 벡터 $\theta_T \in \mathbf{R}^{2n-1} \neq 0$이 존재한다. 따라서 입력 스펙트럼 $\omega_i = \omega_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots\cdots$, $2n+1$에 대하여 확장하면 다음 관계가 성립된다.

$$G_{2n+1}^T \cdot \theta_T = g_{2n+1} \qquad (4-9)$$

물론, $P(s)=P_*(s)$인 경우는 $r(t)$가 SR이면 ω_i의 위치에 상관없이 $\theta_T = \theta_*$가 존재하지만, $\Delta(s) \neq 0$인 경우에는 식(4-9)를 만족하는 유일해 θ_T가 주파수의 함수형태로 나타나며, 이런 사실로, 복소공간에서 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$\theta_T(\omega) = [G_{2n+1}^T]^{-1} g_{2n+1} \qquad (4-10)$$

이 관계를 식(4-6)에 적용하면

$$e_T(\infty) = Q^T(0)\theta_T(\omega) - P(0) \qquad (4-11)$$

을 얻게 되고 결국 ω_i값에 의해 $e_T(\infty)$값이 변화됨을 알 수 있다.

$\Delta(s) \neq 0$인 경우에도 $t \to \infty$에 따라 $e(\infty) \to 0$이기 위해서는 $Q^T(0)\theta_T = P(0)$가 성립되어야 하므로 다음과 같은 관계를 유지해야 한다.

$$\theta_{1T} - \theta_{n+1T} P(0) = f_1 P(0) \qquad (4-12)$$

만약 식(4-12)에 대하여 $\Delta(s)=0$라 가정하고 식(4-7)을 이용하면 다음식을 얻는다.

$$\frac{\theta_{1*} - \theta_{1T}}{\theta_{n+1T} - \theta_{2*}} = P_*(0) \qquad (4-13)$$

이 식은 $\lim_{\omega \to 0} \Delta(j\omega) = 0$이란 가정에 의해서도 식(4-11)로 부터 얻어질 수 있다. 따라서 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$\lim_{\omega \to 0} [Q^T(0)\ \theta_T(\omega) - P(0)] = 0 \qquad (4-14)$$

θ_T가 유일하게 결정되려면 식(4-10)에서 G_{2n+1}^{-1}가 존재하여야 하므로 $z \in \{PE\}$가 만족해야 하고, $e_T(\infty)=0$이기 위해서는 식(4-14)에서 알 수 있는 바와 같이 입력 스펙트럼이 가능한 한 원점근방에 집중되어야 한다. 이러한 사실은 매우 흥미로운 것으로 그림1과 같은 추정구조에서 적응신호가 PE일 때, 공칭모델의 경우와는 달리 파라미터 평형 값이 스펙트럼의 위치와 수에 관계됨을 보여준다.

시스템의 추정문제는 $P(s)$를 추정하여 이 추정된 모델을 실제 플랜트 모델로 이용하는 것이므로, θ_T가 유계되고 이 값을 예측할 수 있다고 해서 추정목적을 달성했다고 할 수 없다. 다시 말하면 추정모델 $\hat{P}(s)$가 $\Delta(s) \neq 0$인 경우에 대해서도 $P(s)$와 동질의 성질을 갖고 있거나 유사한 특성을 갖고 있어야 한다. 그렇지만 θ_T는 스펙트럼 위치에 따라 변하므로, 때로는 특정한 입력스펙트럼으로 추정될 모델 $\hat{P}(s)$는 비최소위상이 되거나 불안정하게 될 수도 있다. 물론 이와같은 특성이 나타나는 한계는 추정된 파라미터가 미지이므로 해석하기 곤란하다.

적응시스템에 대한 추정모델은 유일해 θ_T에 의해 계산된다. 추정모델을 $\hat{P}(s) = \hat{B}(s)/\hat{A}(s)$라 하고 $\hat{P}(s)$가 strictly proper 전달함수라 하면 적응추정루우프는 다음 관계를 갖는다.

$$\theta_{cT}\bar{\delta}_{n-1}(s)\hat{A}(s) + (\theta_{dT}\bar{\delta}_{n-1}(s) - f^T\delta_n(s))\hat{B}(s) = 0 \qquad (4-15)$$

따라서 추정파라미터 $\hat{a}$ 및 $\hat{b}$는 다음 식에 의해구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \theta_{nT} & \theta_{n+1T} \cdots \theta_{3T} & \theta_{2T} & -1 \\
\theta_{nT} & \theta_{n+2T} & \theta_{n2T} \cdots \theta_{2T} & \theta_{1T} & \theta_{2n-1T} - f_n \\
\theta_{n-1T} & \theta_{n+2T} & \theta_{n+2T} \cdots \theta_{1T} & 0 & \theta_{2n-2T} - f_{n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot \cdots \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\cdot \cdots \cdot & \cdot & \cdot \\
\theta_1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \theta_{n+1T} - f_1
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots 0 & -1 \\
0 & 0 & \cdots -1 & \theta_{2nT} - f_n \\
\cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\
\theta_{2n-1T} - f_n & \theta_{2n-2T} - f_{n-1} & \cdots \theta_{n+3T} - f_3 & \theta_{n+2T} - f_2 \\
\theta_{2n-2T} - f_{n-1} & \theta_{2n-3T} - f_{n-2} & \cdots \theta_{n+2T} - f_2 & \theta_{n+1T} - f_1 \\
\theta_{2n-3T} - f_{n-2} & \theta_{2n-4T} - f_{n-3} & \cdots \theta_{n+1T} - f_1 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdots 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_n \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{b}_{m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_{nT} \\ \theta_{n-1\,T} \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{1\,T} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (4-16)$$

여기서, θ_{n-k}, $\theta_{2n-k}=0$ $k=0, 1, ..., n-m-1$이다.

5. 컴퓨터 시뮬레이션 및 검토

이미 설명한 바와 같이 적응추정기의 파라미터 수렴특성은 입력주파수와 밀접한 관계를 갖는다. 이 장에서는 실제 플랜트와 공칭모델의 전달함수를 다음과 같이 가정하고, 가조절 파라미터 및 추정플랜트 파라미터의 유계성질을 검토한다.

$$P(s)=\frac{30}{(s+2)\ (s+10)}$$

$$P_*(s)=\frac{3}{s+2}$$

이 때 주파수 스펙트럼 특성이 각기 다른 다음과 같은 입력을 사용하고 적응이득 $\gamma=1$로 하였다.

(1) $r_1(t)=2\sin(t)$

(2) $r_2(t)=2\sin(5t)$

(3) $r_3(t)=2\sum_{k=1}^{5}\sin(1.1kt)$

(4) $r_4(t)=2\sum_{k=1}^{10}\sin(1.1kt)$

(5) $r_5(t)=2\sin(4t)$

(6) $r_6(t)=2\sin(2t)$

(7) $r_7(t)=2\sin(0.01t)$

비모형화 특성이 없다고 가정하여 설계된 적응구조에 입력 (1), (2) 및 (3)을 인가했을 때 파라미터오차의 수렴특성을 그림2에 나타낸다. 3장에서 밝힌 바와 같이, 적응신호가 PE이므로 $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=0$이고, 따라서 식(4-6)에 의해 추정 파라미터는 스펙트럼의 위치와 수에 상관없이 유일한 공칭값이 존재한다.

그림3은, 그림2와 같은 입력에 대하여 $\Delta(s)=0$이라 가정한 경우의 수렴특성이다. 이 경우 각 입력에 대한 추정파라미터 평형값 $[\hat{a}_T, \hat{b}_T]$는 식(4-2)와 (4-16)에 의해 (1)[1.583, 2.5], (2)[−0.417, 2.5] 및 (3) [1.243, 2.379]로 구해진다. 4장에서 해석한바

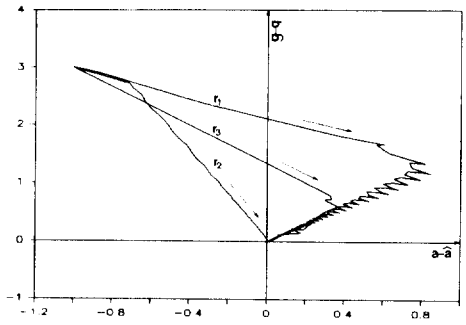


그림2 공칭모델로 설계된 적응시스템의 추정파라미터 오차

Fig.2 Identified parameter errors of the adaptive system designed on a nominal model.

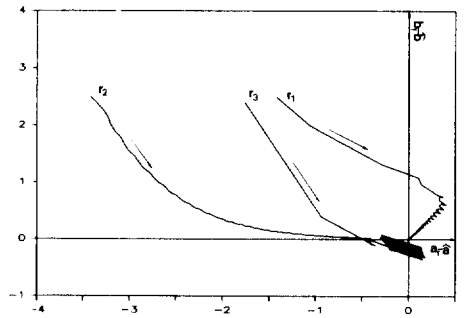


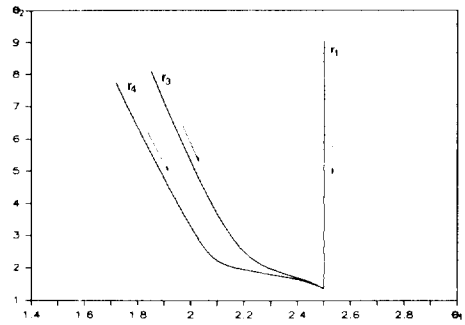
그림3 비모형화 특성이 존재하는 플랜트에 대한 파라미터 수렴 특성

Fig.3 Parameter convergence properties for the plant in the presence of unmodelled dynamics.

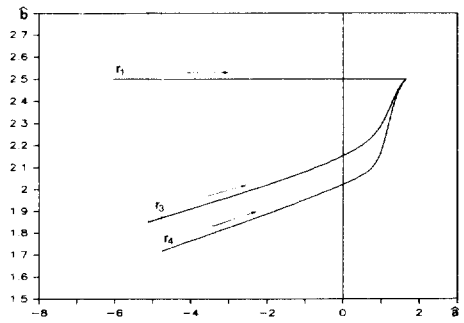
와 같이, $\Delta(s)\neq 0$인 경우에는, 입력 스펙트럼의 위치와 수에 따라 평형값이 다르게 존재하며, 스펙트럼 증가에 따라 수렴특성도 나빠짐을 확인할 수 있다.

비모형화 특성이 존재할 때 파라미터 평형값이 입력 스펙트럼의 위치와 수에 관계된다는 것을 좀 더 자세히 검토하기 위하여, (1), (2) 및 (4)의 입력을 인가하였다. 이 때 θ_T와 $[\hat{a}_T, \hat{b}_T]$의 특성을 그림4에 나타낸다. 그림4(a)에서 알 수 있듯이 ω값에 따라 θ_T값은 변화된다. 특히 2장에서 플랜트가 안정하다고 가정하였으나 특정 주파수에 대해서는 불안정한 추정모델이 얻어짐을 그림4(b)로 알 수 있다. 이 때, 주파수의 초기치 $\omega_0=10$으로 하였다.

4장에서 제시한 바와 같이 $\Delta(s)\neq 0$인 경우에는추정모델이 실제 플랜트의 특성과 유사하려면 가능한 한 스펙트럼 ω가 $2n+1$개이어야 하고 이 스펙트럼



(a) Q_1-Q_2



(b) $\hat{a}-\hat{b}$

그림4 입력스펙트럼에 따른 평형치의 특성

Fig.4 properties of tuned values by input spectrums.

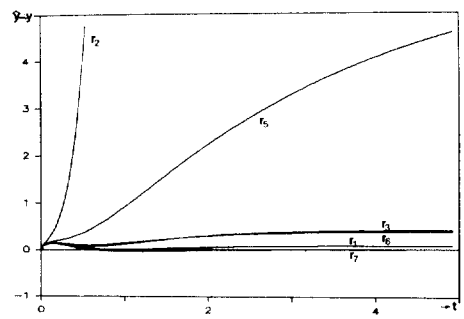


그림5 몇 가지 입력스펙트럼으로 구한 추정모델과 실제 플랜트의 단위계단응답 사이의 오차 특성

Fig.5 Error properties between unit step response of real plant and that of the estimated model determined by several input spectrums.

이 원점근방에 밀집되어야 한다. 입력(1)-(3) 및(5)-(7)에 대한 추정된 모델에 대한 단위계단응답 $\hat{y}(t)$와 실제 플랜트 응답 y(t)사이의 오차특성은 그림5와 같다. 그림에서 알 수 있듯이, ω=0.01인 경우가 가장 작은 오차를 갖는다.

6. 결 론

본 논문에서는 파워 스펙트럼 해석법을 도입하여 적응추정자의 PE조건을 해석하였다. 플랜트의 불확실성이 존재하지 않는 경우, 즉, 공칭모델로 설계된 적응구조에 있어서 적응신호가 PE조건만 만족하면, 파라미터 평형값은 입력신호의 스펙트럼위치나 수에 무관하다. 비모형화 특성이 존재하는 경우에도 적응신호는 PE조건이 성립되어 지수적 안정도가 보장되지만 파라미터 평형값은 변한다. 그렇지만 공칭모델 이외에 모형화되지 않은 특성이 존재하더라도, 적응신호가 PE를 성립하는 최소개의 스펙트럼을 갖고 그 스펙트럼들이 원점 근방에 집중되면 추정모델이 실제 플랜트 특성에 근사화된다.

참 고 문 헌

1) K.S.Narendra and P.Kudva, "Stable adaptive schemes for system identification and control, Part Ⅰ, Ⅱ., " IEEE Trans. on System, Man and Cybernetics, vol. SMC-4, pp.542-560, 1974.

2) G.Kreisselmeier, "Adaptive observer with exponential rate of convergence," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-22, pp.2-8, 1977.

3) J.C.Doyle and G.Stein, "Multivariable feedback design:concepts for a modern / classical synthesis," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-26, pp. 4-17, 1981.

4) B.D. Riedle and P.V. Kokotovic, "Stability analysis of an adaptive system with unmodelled dynamics." Int. J. of Contr., vol. 41, pp. 389-402, 1985.

5) B.D.O. Anderson et al, Stability of adaptive systems: passivity and averaging analysis, Cambridge, MA. MIT Press, 1986.

6) R.L.Kosut and B. Friedlander, "Robust adaptive control: condition for global stabiltity," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol.AC-30 pp. 610-624, 1985.

7) P.Z. Peebles, Jr., Probability, random variables, and random signal principles, McGraw-Hill, 1987.

8) S. Boyd and S.S.Sastry, "Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control," Automatica, vol.22, pp. 629-639, 1986.