

불감대를 사용한 최소자승법의 일반화

A Generalized Least Square Method using Dead Zone

李 河 正* · 崔 悰 鎬**
(Ha-Joung Lee · Jong-Ho Choi)

요 약

유한한 출력 잡음을 갖는 선형 시스템의 매개변수 추정방법을 논하였다. 잡음의 크기의 상한을 아는 경우에 일반적인 최소자승법을 변형하여 그 식에 가중치를 주는데 이 추정방법이 수렴하는 성질을 갖기 위해서 가중치가 가져야할 조건을 제시하였다. 이러한 조건들은 다른 연구자들이 제안한 조건들 보다 일반화된 조건들이다. 한편, 매개변수 추정식의 보정항은 출력예측 오차의 함수로 나타내져야 하는데 이 함수는 가중치가 위의 조건을 만족하기 위해서 X-Y 평면의 특정한 영역에 있어야 한다. 이런 영역에 있는 가중치 중에서 매개변수의 수렴속도도 좋고 계산량도 별로 증가하지 않는 가중치를 선정하였다. 여기서 선정한 가중치를 사용한 알고리즘을 기존의 다른 알고리즘과 시뮬레이션에 의하여 비교하였으며 매개변수의 수렴특성에 대하여 토의하였다.

Abstract - In this paper, a parameter estimation method of linear systems with bounded output disturbances is studied. The bound of the disturbances is assumed to be known. Weighting factors are proposed to modify LS(Least Square) algorithm in the parameter estimation method. The conditions of weighting factors are given so that the estimation method has good convergence properties. This condition is more relaxed form than other known conditions. The compensation term in the estimation equations is represented by a function of the output prediction error and this function should lie in a specified region on x-y plane to satisfy these conditions of weighting factors. A set of weighting factor is selected and an algorithm is proposed using this set of weighting factor. The proposed algorithm is compared with another existing algorithm by simulation and its performance in parameter estimation is discussed.

1. 서 론

많은 경우에 플랜트는 회귀식 (regression) 형태의 모델로 표시할 수 있는데 이때 모델과 플랜트 출력간의 차이가 생기게 된다. 이러한 잡음이나 모델화되지 않은 운동의 상한을 알 수 있는 경우에 모

델의 매개변수 추정방법으로 불감대 (dead zone)를 사용하는 방법이 많이 연구되었으며 이러한 기법은 적응제어에도 많이 응용되었다.¹⁻⁶⁾ (플랜트와 모델간의 출력의 차이가 모델화되지 않은 운동에 의한 것이라 할지라도 그것을 유한하게 표현할 수 있으면 매개변수의 추정에서는 유한한 잡음으로 취급하여도 이론의 전개과정에서는 어려운 점이 없으므로 본 논문에서는 유한한 잡음에 모델화되지 않은 운동에 대한 출력도 포함시킨다.)

이 경우에도 불감대를 사용하지 않은 경우와 마찬가지로 매개변수 추정방법으로 투영법과 최소자

*正 會 員 : 서울大 大學院 制御計測工學科 博士課程
**正 會 員 : 서울大 工大 制御計測工學科 副教授 · 工博
接受日字 : 1988年 2月10日

1次修正 : 1988年 7月11日

승법이 많이 사용되며 특히 최소자승법은 투영법에 비하여 계산량이 많고 안정성이 증명되어 용이하지 않음에도 불구하고 수렴속도가 빠르기 때문에 최소자승법의 변형된 형태가 많이 제안되었다.^{1), 4), 6), 7)} 보통 사용하는 변형법은 목적함수에 가중치를 두고 매개변수 추정식이 안정하도록 가중치를 조정하여 가는 방법^{1), 4), 6)}이 있는데 이로부터 얻어지는 결과식들은 매개변수의 보정량과 분산행렬의 발산속도를 늦추는 형태가 된다.

Fogel⁶⁾은 목적함수에 가중치를 결정하는 기준으로 플랜트의 입출력 데이터로부터 얻어지는 해집합의 부피나 축의 길이를 최소화하는 방법을 제시하였는데 여기서 얻어지는 추정치는 해집합의 중심점(center)이다. 한편 매개변수 추정방법이 적응제어에 이용되기 위해서는 추정식의 안정성 이외에도 몇가지 만족하여야 될 성질이 있는데 Fogel은 이러한 성질을 증명하지 않았다. 적응제어 시스템에 적용할 수 있는 최소자승법 형태의 매개변수 추정방법으로는 Lozano 등⁴⁾과 Middleton 등⁷⁾의 방법을 들 수 있는데 Lozano 등은 Fogel과 같은 목적함수를 사용하여 해집합중 임의의 한점을 추정하였는데 Fogel에 비하여 보다 간단한 추정식을 얻었다. Middleton 등은 목적함수를 제시하지는 않았으나 제시한 추정식을 사용하면 추정치가 몇가지 성질을 만족시킬 수 있으며 이를 적응제어에 응용하여 전체 제어시스템의 안정성을 증명하였다.

본 논문에서는 이러한 여러가지의 변형된 방법들이 어떤 조건을 만족하는 일반화된 하나의 매개변수 추정식으로서 나타낼 수 있음을 보인다. 그리고 이러한 과정을 통하여 얻은 방법들의 성질을 규명하고 여기서 이런 조건을 만족시키는 방법을 제안하며 이 추정식을 시뮬레이션을 통하여 다른 방법과 성능을 비교한다.

2. 매개변수의 추정방법

많은 경우의 시스템은 다음과 같은 회귀식(regression) 형태의 표현이 가능하다.^{7)~9)}

$$y(k) = \phi^T(k-1) \theta^* + n(k) = y^*(k) + n(k) \quad (1)$$

$$y^*(k) \triangleq \phi^T(k-1) \theta^* \quad (2)$$

여기서 θ^* 는 찾고자 하는 매개변수의 벡터이며 $n(k)$ 는 모델화되지 않은 운동이나 잡음을 포함하여 본 논문에서는 그 크기가 유한하다고 가정한다. (1)이 이산시간 영역에서 전개된 식인 경우 $y(k)$ 는 시

간 k 에서의 출력을 나타내며 $\phi(k)$ 는 시간 k 또는 그 이전의 입출력 데이터로 구성되는 벡터이다. (2)로 정의되는 $y^*(k)$ 는 $y(k)$ 에서 모델화된 부분이 차지하는 양이다. 대상시스템이 선형시스템인 경우 (1)은 입출력 신호가 정규화 되거나⁶⁾ 필터링된 상태로 전개된 것일 수도 있는데⁷⁾ 항상 유한한 양으로 시스템을 나타낼 수 있거나 매개변수 추정성능을 향상시킬 수 있는 장점이 있다. 시간 k 에서의 θ^* 에 대한 추정치를 $\theta(k)$ 로 나타내기로 하고 시간 k 에서의 예측오차 $e(k)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$e(k) \triangleq \phi^T(k) \theta(k) - y(k+1) = \hat{y}(k+1) - y(k+1) = \phi^T(k) \theta_e(k) - n(k) \quad (3)$$

$$\hat{y}(k) \triangleq \phi^T(k-1) \theta(k-1) \quad (4)$$

$$\theta_e(k) \triangleq \theta(k) - \theta^* \quad (5)$$

(3)의 $e(k)$ 는 $n(k)$ 를 포함하므로 $\theta(k-1) = \theta^*$ 라 하더라도 0이 되지는 않는다. 따라서 이상적 조건 ($n(k) = 0$) 하에서 얻어진 매개변수 추정식이 오차항으로 $e(k)$ 를 사용하면 $n(k) \neq 0$ 인 경우에는 $\theta(k)$ 가 θ^* 가 된 후에도 추정량을 보정함으로써 θ^* 와는 다른 값을 갖게 할 수 있다.

만일 플랜트의 모델화된 부분에 대한 추정오차 $e^*(k)$ 를

$$e^*(k) = \hat{y}(k+1) - y^*(k+1) = \phi^T(k) \theta_e(k) \quad (6)$$

로 정의하고 앞의 논리를 적용하면 $e^*(k)$ 는 이상적인 추정오차라 생각할 수 있으나 $e^*(k)$ 는 측정치로부터 정확히 얻을 수 없으며 다만 $|n(k)| \leq \Delta$ 이고 Δ 를 아는 경우 Δ 와 $e(k)$ 로부터 $e^*(k)$ 의 존재범위를 알 수가 있다. (3)과 (6)으로부터 그 영역을 구하면

$$e^*(k) = e(k) + n(k), \quad |n(k)| < \Delta \quad (7)$$

이므로,

$$e^*(k) \in [e(k) - \Delta, e(k) + \Delta] \quad (8)$$

와 같고 이를 좌표평면에 나타내면 그림 1과 같다. 그러면 우리는 매개변수 추정에서 $e(k)$ 대신에 어떤 주어진 함수 $f(e(k))$ [그림 2]를 사용한다 하자. 스칼라 $a(k)$ 를 다음과 같이 정의하고

$$a(k) \triangleq \begin{cases} f(e(k)) / e^*(k) & e^*(k) \neq 0 \\ 0 & e^*(k) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$e(k)$ 대신 $f(e(k))$ 를 사용하는 변형된 방법들을 사용하여 얻은 추정치가 수렴하도록 하는 $a(k)$ 값의 범위를 생각해 보기로 하자. 우선 매개변수 추정방

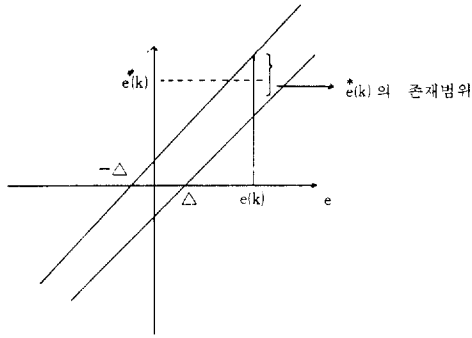


그림 1 $e^*(k)$ 의 존재 범위
Fig. 1 Existing region of $e^*(k)$.

법에서의 최소화승법에 대하여 알아보자.

(1)에서 $n(k) = 0$ 일때 최소화승법으로 얻어진 매개변수 θ^* 의 추정식은

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \frac{P(k) \phi(k) e^*(k)}{1 + \phi^T(k) P(k) \phi(k)} \quad (10)$$

$$P^{-1}(k+1) = P^{-1}(k) + \phi(k) \phi^T(k) \quad (11)$$

으로 주어지는데 (10)과 (11)의 보정항에 각각 유한한 가중치 $a(k)$ 와 $\beta(k)$ 를 두는 다음과 같은 방법을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \theta(k+1) &= \theta(k) - \frac{P(k) \phi(k) f(e(k))}{1 + \lambda(k)} \\ &= \theta(k) - a(k) \frac{P(k) \phi(k) e^*(k)}{1 + \lambda(k)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$P^{-1}(k+1) = P^{-1}(k) + \beta(k) \phi(k) \phi^T(k) \quad (13-A)$$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{\beta(k) P(k) \phi(k) \phi^T(k) P(k)}{1 + \beta(k) \lambda(k)} \quad (13-B)$$

$$\lambda(k) \triangleq \phi^T(k) P(k) \phi(k)$$

그러면 (12)와 (13)에 대하여 다음과 같은 결과를 얻는다.

정리: ϵ_1 과 ϵ_2 를 임의의 작은 양수라 하자. 그러면 (12)와 (13)의 알고리즘은 임의의 상수 $a(k)$ 에 대하여 $0 \leq a(k) \leq 2 - \epsilon_1$ 이며 $a(k) \neq 0$ 인 경우 $\beta(k)$ 는

$$0 \leq \beta(k) \leq (1 - \epsilon_2) g(k) \quad (14)$$

$$g(k) \triangleq \frac{-\lambda(k) (a^2(k) - 2a(k)) + 2a(k)}{(1 + \lambda(k) - a(k) \lambda(k))^2}$$

를 만족하도록 잡고 $a(k) = 0$ 인 경우 $\beta(k) = 0$ 으로 잡으면 다음의 성질을 갖는다.

$$i) \quad \|\theta_e(k)\| \leq K \|\theta_e(0)\|, \quad K \geq 0 \quad (15)$$

K : $P(0)$ 의 condition number

$$ii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \|\theta(k+1) - \theta(k)\|^2 < \infty \quad (16)$$

$$iii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{f^2(e(k))}{1 + \lambda(k)} < \infty \quad (17)$$

(증명)

i) (12)의 양변에서 θ^* 를 빼고 (6)을 사용하자.

$$\theta_e(k+1) = \theta_e(k) - \frac{a(k) P(k) \phi(k) \phi^T(k) \theta_e(k)}{1 + \lambda(k)} \quad (18)$$

Liapunov 함수를 다음과 같이 정의하고

$$V(k) \triangleq \theta_e^T(k) P^{-1}(k) \theta_e(k)$$

이때 $V(k)$ 의 증가량 $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ 를 구하자.

$$\Delta V(k) = \theta_e^T(k+1) P^{-1}(k+1) \theta_e(k+1)$$

$$- \theta_e^T(k) P^{-1}(k) \theta_e(k)$$

$$= \left[\theta_e(k) - \frac{a(k) P(k) \phi(k) \phi^T(k)}{1 + \lambda(k)} \theta_e(k) \right]^T$$

$$\cdot [P^{-1}(k) + \beta(k) \phi(k) \phi^T(k)]$$

$$\cdot \left[\theta_e(k) - \frac{a(k) P(k) \phi(k) \phi^T(k)}{1 + \lambda(k)} \theta_e(k) \right]$$

$$\cdot - \theta_e^T(k) P^{-1}(k) \theta_e(k)$$

(이하 index (k)를 생략)

$$\begin{aligned} &= \left[\theta_e - \frac{a P \phi \phi^T \theta_e}{1 + \lambda} \right]^T \left[P^{-1} \theta_e - \frac{a \phi \phi^T \theta_e}{1 + \lambda} + \beta \phi \phi^T \theta_e \right. \\ &\quad \left. - \frac{a \beta \lambda \phi \phi^T \theta_e}{1 + \lambda} \right] - \theta_e^T P^{-1} \theta_e \\ &= (\phi^T \theta_e)^2 \frac{\beta (1 + \lambda - a \lambda)^2 + \lambda (a^2 - 2a) - 2a}{(1 + \lambda)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

이식이 λ 에 관계없이 항상 양수가 되지 않기 위해서는 분자의 두번째 항이 항상 양수가 되지 않도록 하며 이로부터 $a(k)$ 의 범위 $0 \leq a(k) \leq 2$ 를 구하고, 이에 대한 $\beta(\geq 0)$ 의 범위를 구하면,

$$\beta \leq \frac{-\lambda (a^2 - 2a) + 2a}{(1 + \lambda - a \lambda)^2} \quad (20)$$

이 된다. 그러므로 $a(k)$ 가 $0 \leq a(k) \leq 2$ 인 경우에 (20)을 만족하는 $\beta(\geq 0)$ 는 항상 존재하는 것을 알 수 있다.

따라서 $\beta(k)$ 가 (20)을 만족하면 (19)는 0 또는 음수가 되므로

$$\theta_e^T(k) P^{-1}(k) \theta_e(k) \leq \theta_e^T(0) P^{-1}(0) \theta_e(0) \quad (21)$$

이 된다.

이 관계식은 $a(k)$ 와 $\beta(k)$ 가 정리에서 제시한 조건을 만족시킬때는 성립한다. 그런데 (13)에서 $P^{-1}(k)$ 는 비감소함수이므로

$$\lambda_{\min} [P^{-1}(0)] \leq \lambda_{\min} [P^{-1}(k)]$$

이 되고 이를 (21)에 적용하면

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min} [P(0)^{-1}] \|\theta_e(k)\|^2 \leq \lambda_{\min} [P^{-1}(k)] \\ & \cdot \|\theta_e(k)\|^2 \\ & \leq \theta_e^T(k) P^{-1}(k) \theta_e(k) \\ & \leq \theta_e^T(0) P^{-1}(0) \theta_e(0) \\ & \leq \lambda_{\max} [P^{-1}(0)] \|\theta_e(0)\|^2 \end{aligned}$$

이 되어 (15)가 성립한다. 위에서 $\lambda_{\min}(A)$ 및 $\lambda_{\max}(A)$ 는 행렬 A의 최소 고유치와 최대 고유치를 나타낸다.

ii) $\beta(k)$ 가 (14)를 만족하는 경우 (19)에서

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= -M_1(k) e^{*2}(k) \\ M_1(k) &\triangleq \frac{\lambda(k)(2a(k)-a^2(k))+2a(k)}{(1+\lambda(k))^2} \\ &\quad - \frac{\beta(k)(1+\lambda(k)-a(k))\lambda(k)}{(1+\lambda(k))^2} \\ &\geq \epsilon_2 \frac{\lambda(k)(2a(k)-a^2(k))+2a(k)}{(1+\lambda(k))^2} \end{aligned}$$

으로 쓸 수 있으므로

$$V(0) - V(\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} M_1(k) e^{*2}(k) \quad (22)$$

가 된다. 또한

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \|\theta(k+1) - \theta(k)\|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\theta_e(k+1) - \theta_e(k)]^T [\theta_e(k+1) - \theta_e(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [a^2(k) \frac{\theta_e^T(k) \phi(k) \phi^T(k) P(k) P(k) \phi(k) \phi^T(k) \theta_e(k)}{(1+\lambda(k))^2}] \\ &\leq \lambda_{\max} [P(0)] \sum_{k=0}^{\infty} [a^2(k) e^{*2}(k) \frac{\lambda(k)}{(1+\lambda(k))^2}] \\ &= \lambda_{\max} [P(0)] \sum_{k=0}^{\infty} M_2(k) e^{*2}(k) \quad (23) \end{aligned}$$

$$M_2(k) \triangleq a^2(k) \frac{\lambda(k)}{(1+\lambda(k))^2}$$

가 된다. 그런데 $0 < a(k) \leq 2 - \epsilon_1$ 인 경우에는

$\frac{M_2(k)}{M_1(k)}$ 는 유한하다는 것을 아래와 같이 보일 수 있다.

즉, $M_1(k)$ 및 $M_2(k)$ 의 정의로부터

$$\frac{M_2(k)}{M_1(k)} \leq \frac{a^2(k) \lambda(k)}{\epsilon_2 (\lambda(k) (2a(k) - a^2(k)) + 2a(k))}$$

이므로 모든 $\lambda(k)$ 에 대하여

$$\frac{M_2(k)}{M_1(k)} < \infty \text{ 이다.}$$

또 $a(k) = 0$ 인 경우는 $M_1(k) = M_2(k) = 0$ 이 된다. 따라서 충분히 큰 유한한 상수 $C_1 (> 0)$ 이 존재하여 모든 k 에 대하여

$$M_2(k) \leq C_1 M_1(k)$$

이 성립한다. 그러므로 (23)으로 부터

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\theta(k+1) - \theta(k)\|^2 &\leq \lambda_{\max} [P(0)] C_1 \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty} M_1(k) e^{*2}(k) \\ &= C_1 \lambda_{\max} [P(0)] (V(0) - V(\infty)) < \infty \end{aligned}$$

이 되어 (16)이 성립한다.

iii) $C_2 \triangleq \frac{\epsilon_1}{2 - \epsilon_1}$ 이라 하자. 그러면 $0 < \epsilon_1 < 2$ 이면 $C_2 > 0$ 이다. (22)를 사용하면

$$\begin{aligned} V(0) - V(\infty) &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_2 \frac{\lambda(k)(2a(k)-a^2(k))+2a(k)}{(1+\lambda(k))^2} e^{*2}(k) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_2 \frac{C_2 \lambda(k) a^2(k) + a^2(k)}{(1+\lambda(k))^2} e^{*2}(k) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_2 \frac{C_3 a^2(k)}{1+\lambda(k)} e^{*2}(k), \quad C_3 \triangleq \min(C_2, 1) \\ &\geq \epsilon_2 C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^2(e(k))}{1+\lambda(k)} \end{aligned}$$

이 되므로 (17)이 성립한다.

정리의 ii) - iii)은 적응제어 시스템에서 시스템의 안정성을 증명하는데 필요한 조건이다. 그러면 정리의 조건이 무엇인지 살펴보고 이를 어떻게 사용하면 보다 좋은 매개변수 추정방법을 얻을 수 있나 생각하자.

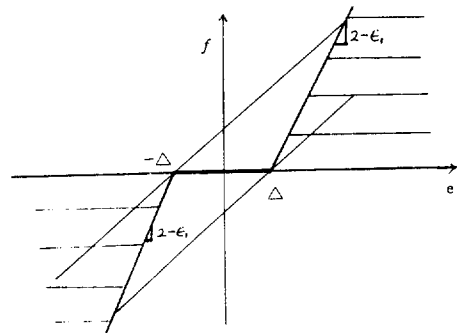


그림 2 정리를 만족하는 $(e(k), f(e(k)))$ 의 영역 및 $f(e(k))$ 의 예

Fig. 2 Region of $(e(k), f(e(k)))$ which satisfies theorem and an example of $f(e(k))$.

모든 $e(k)$ 에 대하여 $0 \leq a(k) \leq 2 - \epsilon_1$ 인 조건을 만족하는 함수 $f(e(k))$ 가 존재하는 영역은 그림 2의 빗금친 부분으로 주어진다. 따라서 $f(e(k))$ 가 그림 2의 빗금친 부분을 지나도록 하는 $a(k)$ 는 자연스럽게 0과 $2 - \epsilon_1$ 사이에 있다.

$0 \leq \beta(k) \leq (1 - \epsilon_2)g(k)$ 인 조건을 살펴보면 $a(k) = 0$ 일 때는 $\beta(k) = 0$ 이 되어 (13) 으로부터 $P^{-1}(k) = P^{-1}(k+1)$ 이 된다.

$a(k) \neq 0$ 인 경우 $a(k)$ 는 (7) 과 (8) 로 부터 다음과 같은 구간 $I(k)$

$$a(k) \in \left[\frac{f(e(k))}{e(k) + \Delta}, \frac{f(e(k))}{e(k) - \Delta} \right]; f(e(k)) > 0 \text{ 인 경우}$$

$$a(k) \in \left[\frac{f(e(k))}{e(k) - \Delta}, \frac{f(e(k))}{e(k) + \Delta} \right]; f(e(k)) < 0 \text{ 인 경우} \quad (24)$$

에 존재하는데 시간 $(k+1)$ 에서 $e(k)$ 는 (3)으로 부터 구할 수 있고 $f(e(k))$ 는 미리 주어진 함수이며 Δ 는 주어진 상수이므로 $a(k)$ 의 상하한은 쉽게 구해진다. $I(k)$ 에 속하는 임의의 $a(k)$ 에 대하여 $\beta(k) \leq (1 - \epsilon_2)g(k)$ 가 되도록 잡으면 정리의 모든 성질을 갖게 된다. 그런데 Liapunov 함수 $V(k) = \theta_e^T(k)P^{-1}(k)\theta_e(k)$ 는 비증가함수이며 $P^{-1}(k)$ 가 빨리 증가할수록 $\|\theta_e(k)\|$ 가 적어지게 되므로 (13)에서 부터 $\beta(k)$ 를 될수 있도록 크게 잡아주면 $P^{-1}(k)$ 는 빨리 증가하는 것을 알 수 있다. 따라서 $\beta(k)$ 는 모든 $a(k) \in I(k)$ 에 대하여 (14)를 만족시키는 값 중에서 최대가 되도록 하는 것이 바람직하며 그러기 위하여서는

$$\beta(k) = a(k) \min \{ I(k) \mid (1 - \epsilon_2)g(k) \} \quad (25)$$

가 되도록 정한다. 그런데 $g(k)$ 를 변형하면

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{(1 + \lambda(1 - a))^2 + 2(1 - a) + \frac{1}{\lambda} + \lambda + 2a}{(1 + \lambda(1 - a))^2}$$

$$= -\frac{1}{\lambda} + \frac{2 + \frac{1}{\lambda} + \lambda}{(1 + \lambda(1 - a))^2}$$

이다. 그러므로 주어진 $\lambda(k)$ 에 대하여 $g(k)$ 의 최소값은 $a(k)$ 가 $I(k)$ 의 범위중 제일 큰 곳이나 제일 작은 곳 둘 중에 한 곳에 있게된다. 따라서 (24)에서 구해진 $a(k)$ 의 상하한 값을 $g(k)$ 에 대입하고 이들 중에서 작은 값을 택하면 된다.

$$\beta(k) = \begin{cases} (1 - \epsilon_2) \left[\min \left\{ g \left(\frac{f(e(k))}{e(k) + \Delta} \right), g \left(\frac{f(e(k))}{e(k) - \Delta} \right) \right\} \right] & ; f(e(k)) > 0 \\ (1 - \epsilon_2) \left[\min \left\{ g \left(\frac{f(e(k))}{e(k) - \Delta} \right), g \left(\frac{f(e(k))}{e(k) + \Delta} \right) \right\} \right] & ; f(e(k)) < 0 \end{cases} \quad (26)$$

$a(k)$ 와 $\beta(k)$ 에 대한 조건들을 다른 알고리즘 에서의 조건과 비교하여 보자.

Middleton 등⁷⁾의 경우는

$$0 \leq a(k) \leq \alpha, \alpha \in (0, 1)$$

$$\beta(k) = \frac{a(k)}{1 + \lambda(k) - a(k)\lambda(k)}$$

을 선택한 경우로 볼 수 있다. Lozano 등⁴⁾의 방법에서 매개변수를 새로이 계산하는 식으로 (12) 분자 중 $P(k)$ 대신 $P(k+1)$ 을 사용하고는 있으나 만약 (12)를 그대로 사용한다면

$$0 \leq a(k) \leq \alpha, \alpha \in (0, 1)$$

$$\beta(k) = \frac{a(k)}{1 + \lambda(k)}$$

를 선택한 경우로 볼 수 있으며 이 방법들의 수렴성은 정리로부터 쉽게 알아볼 수 있다. 결국 정리는 위의 두 경우를 포함하는 보다 일반화된 조건을 제시하는 것으로써 시스템의 상황에 따라 $\beta(k)$ 를 잘 선택함으로써 매개변수의 수렴성질을 향상시킬 수 있다.

3. 시뮬레이션

앞에서 제시한 매개변수 추정방법의 성능을 보기 위하여 Fogel⁸⁾이 사용한 2 차의 AR 모델

$$y(k) = -1.3y(k-1) - 0.4y(k-2) + w(k)$$

과 다음과 같은 3 차의 ARMA 모델

$$y(k) = -2.1y(k-1) - 1.43y(k-2) - 0.315y(k-3) + 3x(k-1) + 3.9x(k-2) + 1.26x(k-3) + w(k)$$

에 대하여 시뮬레이션 하였다. 여기서 $w(k)$ 는 $(-1, 1)$ 사이에 균일한 분포를 갖는 백색잡음이고, $x(k)$ 는 주기가 60스텝인 구형파이며 그 크기는 30 스텝마다 5와 -5로 바꾸어 가면서 주었다. 매개변수의 초기치는 AR 모델인 경우 (5, 5), ARMA 모델인 경우는 전부 0으로 하였다.

여기서 사용한 함수 $f(e(k))$ 는

$$f(e(k)) = \begin{cases} \alpha e(k) - \Delta & e(k) > \Delta \\ 0 & -\Delta \leq e(k) \leq \Delta \\ \alpha e(k) - \Delta & e(k) < -\Delta \end{cases}$$

으로써 $\Delta = 1$ 이며 Lozano 등⁴⁾의 경우는 $\alpha = 1$ 을 택하였고 본 논문의 경우는 $\epsilon_1 = 0.01$, $\alpha = 1.5$ 와 1.9 , 그리고 $\epsilon_2 = 0.01$ 로 하고 $\beta(k)$ 를 구하는데 (26)을 사용하였다.

AR모델의 경우가 그림 3에, ARMA 모델의 경우가 그림 4에 나타나 있는데 본 논문에서 제시한 방법이 AR 모델인 경우는 수렴속도가 월등 좋아짐을 볼 수 있고, ARMA 모델인 경우는 초반에는 나쁘다가 후반에는 좋아짐을 볼 수 있다. 또한 α 를 크게

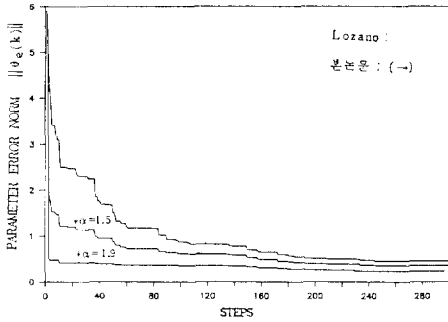


그림 3 매개변수 추정 성능비교 (AR모델)

Fig. 3 A comparison of parameter error norms for different methods. (AR model)

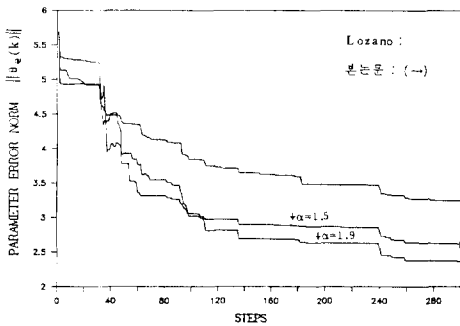


그림 4 매개변수 추정 성능비교 (ARMA 모델)

Fig. 4 A comparison of parameter error norms for different methods. (ARMA model)

할수록 후반에 수렴이 잘 되는 것을 볼 수 있다.

4. 결론 및 토론

본 논문에서는 그 크기의 상한을 아는 유한한 잡음이 존재하는 선형시스템의 매개변수 추정에 대하여 연구하였다. 기존의 최소자승법을 변형하기 위해 추정식의 각 보정항에 가중치를 두는 방법을 제시하고 이러한 매개변수 추정식이 유용한 성질을 갖기 위한 가중치의 조건을 규명하였다.

기존의 여러방법들은 본 논문의 조건을 만족하는 특수한 경우로 볼 수 있고 여기서 이러한 조건을 만족시키는 한 알고리즘을 제안하였으며 시뮬레이

션하여 매개변수 추정능력을 기존의 방법과 비교하여 보았는데, 매개변수 추정능력이 시간이 지남에 따라 향상됨을 알 수 있었다.

본 논문에서 제시한 방법은 최소자승법 뿐만 아니라, 투영법에도 적용할 수 있다.¹⁰⁾

참 고 문 헌

- 1) G.G. Goodwin, and K.S. Sin, Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice Hall, 1984.
- 2) G. Kreisselmeier, "A robust indirect adaptive control approach", INT.J. Control, 1986, vol. 43, no. 1, pp. 161~175.
- 3) B.B. Peterson and K.S. Narendra, "Bounded error adaptive control", IEEE Trans. AC-27, no. 12, pp. 1161-1168, Dec., 1982.
- 4) R. Lozano-Leal and R. Ortega, "Reformulation of the parameter identification problem for systems with bounded disturbances," Automatica, vol. 23, no. 2, pp. 247-251, 1987.
- 5) R.Ortega and R. Lozano "A note on direct adaptive control of systems with bounded disturbances," Automatica, vol. 23, no. 2, pp. 253-254, 1987.
- 6) E. Fogel and Y.F. Huang, "On the value of information in system identification-bounded noise case," Automatica, vol. 18, no. 2, pp. 229-238, 1982.
- 7) R.H. Middleton, G.C. Goodwin, D.J. Hill and D.Q. Mayne, "Robust adaptive control (Convergence, Stability and Performance.)," Technical Report EE8544, Dept. of Electrical and Computer Eng., Univ. of Newcastle, 1985.
- 8) G.Kreisselmeier and B.D.O. Anderson, "Robust model reference adaptive control," IEEE Trans., AC-31, no. 2, pp. 127-133, Feb., 1986.
- 9) H. Elliott, "Direct adaptive pole placement with application to nonminimum phase systems", IEEE Trans., AC-27, no. 3, pp. 720-722, Mar., 1982.
- 10) 이하정, 유한한 잡음하에서의 매개변수 추정과 적응 제어에의 응용, 서울대학교 공학석사 논문, 1988.