

선형 시변 시스템의 안정도 영역에 관하여

On a Stability Region of Liner Time-Varying Systems

崔 棕 鎬* · 張 泰 正**

(Chong-Ho Choi · Tae-Jeong Jang)

요 약

이 논문에서는 선형 연속 시간 시스템과 선형 이산 시간 시스템 각각에 대해, 시스템의 안정도를 보장할 수 있는 매개변수 변동영역에 대한 충분 조건을 시간 영역에서 Lyapunov 방법을 사용하여 구하였다. 그리고, 연속시간 시스템의 경우에 대하여, 이 충분 조건을 만족하는 매개변수 변동영역을 비선형 계획법을 이용하여 구하는 방법을 제시하였으며, 이를 이산 시간 시스템의 경우에도 확장하였다. 연속 시간 시스템의 경우, 본 논문의 방법으로 지금까지 이루어져 왔던 다른 연구 결과들보다 더 넓고 다양한 매개변수 변동영역을 구할 수 있다는 것을 예를 통하여 보였으며, 이산 시간 시스템의 안정도 영역에 관한 예도 들었다.

Abstract-Sufficient conditions concerning the perturbation region of system parameters, which guarantee the asymptotic stability of linear time-varying systems, are presented. These conditions are obtained by Lyapunov function approach for continuous-time and discrete-time systems. Also, a computational algorithm using nonlinear programming is proposed for finding the maximum perturbation region which satisfies the sufficient condition for the continuous-time systems. The technique of finding the solution for the continuous-time systems can also be applied to the discrete-time systems. In the continuous-time case, it is shown by an example that the method proposed in this paper yields much larger perturbation region of parameters than other previously reported results. An example of the perturbation region of system paramters for the discrete-time system is also given.

1. 서 론

선형 시불변 시스템의 경우, 시스템 행렬 A의 고유치(eigenvalue)들이 모두 음의 실수부를 가지면 그 시스템은 안정하다는 것은 잘 알려진 사실이다.¹⁾ 그러나, 시스템이 시변일 경우에는 이와 상반되는 예

들이 존재하기 때문에²⁾, 일반적으로 시스템 행렬 A(t)의 고유치들만으로 안정도를 판정할 수가 없다.

최근에 Yedavalli^{3),4)}, Zhou 등⁵⁾이 매개변수 변동(parameter perturbation)이 있는 불확실한 시스템(uncertain system)의 안정도에 대해 연구했는데, 이는 결국 선형 시변 시스템의 안정도 문제로 생각할 수 있다.

본 연구에서는 선형 연속 시간 시스템과 선형 이산 시간 시스템 각각에 대해, 시스템의 안정도를 보장할 수 있는 매개변수 변동영역에 대한 충분 조건을 Lyapunov 방법에 의한 시간 영역에서의 해석에

*正 會 員 : 서울대 工大 制御計測工學科 副教授 · 工博

**正 會 員 : 서울대 大學院 制御計測工學科 博士課程

接受日 字 : 1988年 2月 10日

1次修正 : 1988年 6月 3日

의해 유도하고, 이 변동영역을 최적화 문제를 푸는 비선형 계획법을 이용하여 구하는 방법을 제시하였다. 먼저, 연속 시간 시스템의 경우에 대해 제약식이 없는 최적화 문제를 구성하여 매개변수 변동영역을 구하는 방법을 보였고, 이를 이산 시간 시스템의 경우에까지 확장하였다.

각 경우에 대해 응용 예를 들어 매개변수 변동영역을 구해 보았는데, 현재까지 유사한 연구가 있어 왔던 연속 시간 시스템의 경우, 본 논문의 방법으로 더 넓고 다양한 매개변수 변동영역을 구할 수 있었다.

2. 선형 시변 시스템의 안정도 영역

2.1 연속 시간 시스템의 안정도 영역

다음과 같이 주어지는 연속 시간 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) \\ &= (A_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i(t) A_i)x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

단, $x(t) \in R^n$ 이며, $\omega_i(t) \in R$, $0 \leq \omega_i(t) \leq \omega_i^*$, $i=1,2,\dots,m$, $\forall t \geq t_0$, $A_0 \in R^{n \times n}$ 인 상수 Hurwitz 행렬, 그리고 $A_i \in R^{n \times n}$, $i=1,2,\dots,m$, 인 임의의 상수 행렬이다. 그러면 (1)과 같이 주어지는 선형 시변 시스템의 점근적 안정도(asymptotic stability)에 대한 충분 조건을 다음의 정리 1과 같이 얻을 수 있다.

정리 1: $\lambda_i(t)$, $i=1,2,\dots,m$, 를 다음과 같이 정의하자.

$$\lambda_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{\omega_i^*}, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (2)$$

어떤 positive definite 한 $n \times n$ 상수 행렬 P, Q_0, Q_i , $i=1,2,\dots,m$ 가 존재하여

$$A_0^T P + P A_0 = -Q_0, \quad (3)$$

$$(A_0 + \omega_i^* A_i)^T P + P (A_0 + \omega_i^* A_i) = -Q_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (4)$$

가 성립하고, $\lambda_i(t)$, $i=1,2,\dots,m$ 가

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \leq 1 \quad (5)$$

을 만족하면, (1)로 주어지는 선형 시변 시스템은 점근적으로 안정하다.

증명: 시스템(1)에 대한 Lyapunov 함수 $V(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$V(t) = x^T(t) P x(t), \quad (6)$$

$V(t)$ 를 시간에 대해 미분하면,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= x^T(t) \{ (A_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \omega_i^* A_i)^T P \\ &\quad + P (A_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \omega_i^* A_i) \} x(t) \\ &= -x^T(t) \{ (1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)) Q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) Q_i \} x(t). \end{aligned} \quad (7)$$

그런데, 여기서 $0 \leq \omega_i(t) \leq \omega_i^*$ 이므로, (2)로부터

$$0 \leq \lambda_i(t) \leq 1, \quad i=1,2,\dots,m \quad (8)$$

이고, 또 (5)로부터

$$1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \geq 0 \quad (9)$$

가 된다. 그러므로 $(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)) Q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) Q_i$ 는 모든 $t \geq t_0$ 에 대해 positive definite한 행렬이라는 것을 알 수 있다. 따라서 (7)의 $\dot{V}(t)$ 가 항상 음의 값을 가지게 되어 선형 시변 시스템(1)은 점근적으로 안정하게 된다.

$\omega_i(t)$ 가 $-\omega_i^- \leq \omega_i(t) \leq \omega_i^*$, $\omega_i^* > 0$, $\omega_i^- > 0$ 와 같이 +, -양 방향으로 모두 변할 때는 $\omega_i^+(t)$, $\omega_i^-(t)$ 를

$$\omega_i^+(t) = \begin{cases} \omega_i(t), & \text{if } 0 \leq \omega_i(t) \leq \omega_i^* \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

$$\omega_i^-(t) = \begin{cases} -\omega_i(t), & \text{if } -\omega_i^- \leq \omega_i(t) \leq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

로 정의하여, $\omega_i(t) A_i$ 대신에 $[\omega_i^+(t) A_i + \omega_i^-(t)$

$(-A_i)]$ 를 대입하여 사용하면 $0 \leq \omega_i^+(t) \leq \omega_i^*$, $0 \leq \omega_i^-(t) \leq \omega_i^-$ 가 되어 앞의 정리 1을 그대로 적용할 수 있다.

2.2 이산 시간 시스템의 안정도 영역

다음과 같은 이산 시간 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) \\ &= (A_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i(k) A_i)x(k), \end{aligned} \quad (12)$$

단, $x(k) \in R^n$ 이며, $\omega_i(k) \in R$, $0 \leq \omega_i(k) \leq \omega_i^*$, $i=1,2,\dots,m$, $k \geq k_0$, $A_0 \in R^{n \times n}$ (고유치가 모두 단위원 내에 존재), 그리고 $A_i \in R^{n \times n}$, $i=1,2,\dots,m$, 인 임의의 상수 행렬이다. 그러면 (12)와 같이 주어지는 시변 이산 시간 시스템에서도 정리 1과 유사한 방법으로 시스템의 점근적 안정도를 보장하는 매개변수 변동영역에 대한 충분 조건을 얻을 수 있다.

보조정리: 임의의 $n \times n$ 차 행렬 A, B 와 $n \times n$ 차 positive definite 행렬 P 에 대하여

$$A^T P B + B^T P A \leq A^T P A + B^T P B \quad (13)$$

이 성립한다.

증명: $A^T P A + B^T P B - A^T P B - B^T P A$
 $= (A - B)^T P (A - B) \geq 0$ (14)

위의 관계식을 사용하면 (13)을 얻을 수 있다.

정리 2: $\lambda_i(k)$ 를 다음과 같이 정의 하자.

$$\lambda_i(k) = \frac{\omega_i(k)}{\omega_i^*}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

어떤 positive definite한 $n \times n$ 상수 행렬 $P, Q_0, Q_i, i = 1, 2, \dots, m$ 가 존재하여

$$A_0^T P A_0 - P = -Q_0, \quad (16)$$

$$(A_0 + \omega_i^* A_i)^T P (A_0 + \omega_i^* A_i) - P = -Q_i, \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

가 성립하고, $\lambda_i(k), i = 1, 2, \dots, m, k$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(k) \leq 1 \quad (18)$$

을 만족하면, (12)로 주어지는 선형 시변 시스템은 점근적으로 안정하다.

증명: 시스템 (12)에 대한 Lyapunov 함수 $V(k)$ 를 다음과 같이 정의 하자.

$$V(k) = x^T(k) P x(k). \quad (19)$$

그러면,

$$V(k+1) - V(k) = x^T(k) \left[\left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) \right) A_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) (A_0 + \omega_i^* A_i) \right]^T \cdot P \left[\left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) \right) A_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) (A_0 + \omega_i^* A_i) \right] P x(k). \quad (20)$$

여기서,

$$\lambda_0(k) = 1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(k), \quad (21)$$

$$\hat{A}_0 = A_0, \quad (22)$$

$$\hat{A}_i = A_0 + \omega_i^* A_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (23)$$

로 놓고, 보조정리를 이용하면,

$$V(k+1) - V(k) = x^T(k) \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i^2(k) \hat{A}_i^T P \hat{A}_i + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^m \lambda_i(k) \lambda_j(k) (\hat{A}_i^T P \hat{A}_j + \hat{A}_j^T P \hat{A}_i) - P \right\} x(k) \leq x^T(k) \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i^2(k) \hat{A}_i^T P \hat{A}_i + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^m \lambda_i(k) \lambda_j(k) (\hat{A}_i^T P \hat{A}_j + \hat{A}_j^T P \hat{A}_i) - P \right\} x(k) = x^T(k) \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i(k) \lambda_j(k) \hat{A}_i^T P \hat{A}_i - P \right\} x(k) = -x^T(k) \left\{ \left(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) \right) Q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) Q_i \right\} x(k). \quad (24)$$

그러나, 여기서 $0 \leq \omega_i(k) \leq \omega_i^*$ 이므로, (15)로부터

$$0 \leq \lambda_i(k) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

이고, 또 (18)로부터

$$1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) \geq 0 \quad (26)$$

가 된다. 그러므로 $(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) Q_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(k) Q_i)$ 는 모든 $k \geq k_0$ 에 대해 positive definite한 행렬이라는 것을 알 수 있다. 따라서 (24)에서 $V(k+1) - V(k)$ 가 항상 음의 값을 가지게 되어 (12)로 주어지는 이산시간 시스템은 점근적으로 안정하다.

$\omega_i(k)$ 가 $-\omega_i \leq \omega_i(k) \leq \omega_i^*, \omega_i^* > 0, \omega_i > 0$ 와 같이 +, -양 방향으로 모두 변할때도 연속 시간 시스템의 경우와 마찬가지로 방법으로 안정도 영역을 구할 수 있다.

3. 안정도 영역을 구하는 계산상의 방법

우선 연속 시간 시스템의 경우 안정도 영역을 구하는 방법에 대하여 생각하자. 정리 1의 제약 조건 (3), (4)를 만족하는 $Q_0, P, \omega_i^*, Q_i, i = 1, 2, \dots, m$ 를 구하였다면, 시스템의 매개변수들이

$$\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i(t)}{\omega_i^*} \leq 1, \quad 0 \leq \omega_i(t) \leq \omega_i^* \quad (27)$$

의 조건을 만족시키는 범위 내에서 변하는 경우에는 시스템의 안정도를 보장할 수 있다는 것을 알 수 있다. 그런데 (3), (4)의 제약 조건을 만족하는 Q_0, P, ω_i^*, Q_i 는 무수히 많이 존재하므로, 이 중 가장 넓은 안정도 영역을 가지는 해를 구해야 한다.

어떤 행렬 Q 가 positive definite하다면 $Q = LL^T$ 를 만족하는 lower triangular 행렬 L 이 항상 존재한다. 따라서 임의의 nonsingular lower triangular 행렬 L_0 에 대하여 $Q_0 = L_0 L_0^T$ 라 정의하면 Q_0 행렬은 항상 positive definite 하다.

먼저 어떤 positive definite 행렬 $Q_0 = L_0 L_0^T$ 가 주어졌다고 하자. 그러면 A_0 가 Hurwitz 행렬이므로 Lyapunov 정리'에 의해 (3)의 해로서 항상 positive definite한 행렬 P 를 구할 수 있는데, 이 P 를 (4)에 대입하면 ω_i^* 값에 따른 Q_i 행렬이 구해진다. 만약 $\omega_i^* = 0$ 이라고 가정하면 $Q_i = Q_0 = L_0 L_0^T$ 가 되어 Q_i 는 positive definite하다. 그리고 ω_i^* 를 0으로 부터 조금씩 증가시키면서 Q_i 행렬을 계산해 보면 Q_i 행렬의 positive definiteness를 보장하는 ω_i^* 의 최대값 (supremum)을 구할 수 있다. 여기서 ω_i^* 의 최대값을 실제로 구하기는 쉽지 않지만, 주어진 L_0 에 대해 Q_i 의 positive definiteness를 보장하는 ω_i^* 의 최대값은 유일하게 존재한다. 따라서 (3), (4)의 조건하에서 ω_i^* 의 최대값은 L_0 의 함수이다. 즉 ω_i^* 의 최대

값을 $\bar{\omega}_i$ 라고 하면

$$\bar{\omega}_i = f_i(L_0), i = 1, 2, \dots, m \quad (28)$$

와 같이 표현할 수 있다.

주어진 L_0 에 대해 $\bar{\omega}_i$ 를 구할 수 있다면 우리가 목적으로 하는 문제는 어떤 L_0 를 선택해야 $\bar{\omega}_i$ 들을 최대할 수 있는냐는 것이다. 이 문제는 $\bar{\omega}_i$ 의 적당한 단조증가함수 $F(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_m)$ 에 대하여

$$\text{maximize}_{L_0} F(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_m) \quad (29)$$

를 푸는 최적화 문제를 구성하여 해결할 수 있다. 그런데 $\bar{\omega}_i$ 는 수식적 표현이 어렵기 때문에 직접 그 값을 구하지는 못하고, 주어진 L_0 에 대해서 (3)으로 부터 P 를 구한 다음, 이 P 를 (4)에 대입하고 line search 방법을 이용하여 $\bar{\omega}_i$ 를 구한다. 그리고 여기서 구한 $\bar{\omega}_i$ 값을 써서 F 값을 구하며, 이 값을 증가시켜 주는 방향으로 L_0 값을 변화시키는데, 이 과정에서는 HARWELL subroutine library⁶⁾의 VA10AD를 사용하였다.

L_0 가 주어졌을 때 $\bar{\omega}_i, i = 1, 2, \dots, m$ 를 구하는 구체적인 방법은 다음의 알고리즘과 같다.

알고리즘 : 주어진 L_0 에 대한 $\bar{\omega}_i$ 의 결정

- step 1 : $Q_0 = L_0 L_0^T$ 를 계산한다.
- step 2 : $A_0^T P + P A_0 = -Q_0$ 를 만족하는 positive definite 행렬 P 를 구한다.
- step 3 : $i = 0$ 으로 놓는다.
- step 4 : $i \leftarrow i + 1$ 로 하고, $\omega_i^* = 0$, scale = 1.0으로 놓는다.
- step 5 : $\omega_i^* \geq C$ (충분히 큰 값, 예를 들면 10^6) 이면 step 11로 간다.
- step 6 : scale \leftarrow scale $\times 2$
 $\omega_i^* \leftarrow \omega_i^* + \text{scale}$
 $Q_i = -\omega_i^* (A_0^T P + P A_0) + Q_0$ 를 계산한다.
- step 7 : Q_i 의 positive definiteness를 check한다.
 만약 $Q_i > 0$ 이면 step 5로 간다.
 그렇지 않으면 $dr = -1$ 로 하고 step 8로 간다.
- step 8 : scale \leftarrow scale $\div 2$
 $\omega_i^* \leftarrow \omega_i^* + dr \times \text{scale}$
 $Q_i = -\omega_i^* (A_0^T P + P A_0) + Q_0$ 를 계산한다.
- step 9 : Q_i 의 positive definiteness를 check 한다.
 만약 $Q_i > 0$ 이면 $dr = +1$,
 그렇지 않으면 $dr = -1$ 로 놓는다.
 이때, scale $\geq \epsilon$ 이면 step 8, scale $< \epsilon$ 이면 step 10으로 간다.

step 10 : 만약 $Q_i \succ 0$ 이면 $\omega_i^* \leftarrow \omega_i^* - \text{scale}$ 하여 $Q_i > 0$ 이 되게 한다.

step 11 : $\bar{\omega}_i = \omega_i^*$ 로 놓는다.

step 12 : $i < m$ 이면 step 4로 가고, $i = m$ 이면 정지한다.

위와 같은 방법으로 부터 $\bar{\omega}_i, i = 1, 2, \dots, m$ 를 구하면서, 이를 사용하여 (29)의 최적화 문제를 풀면 주어진 목적 함수를 최대하는 ω_i^* 의 최대값을 구할 수 있다. 이때, ω_i^* 를 구하는 과정에서 $\omega_1^* : \omega_2^* : \dots : \omega_m^* = r_1 : r_2 : \dots : r_m$ 등과 같이, 좀 더 사용자의 목적에 맞는 해를 얻기 위해 약간의 제약을 주어 해를 구할 수도 있다.

이산 시간 시스템의 안정도 영역은 앞서 제시한 연속 시간 시스템의 안정도 영역을 구하는 방법을 그대로 적용하여 구할 수 있다. 그리고 $\bar{\omega}_i$ 와 F 값의 결정 방법은 step 2의 P 행렬, step 6, step 8의 Q_i 행렬을 구하는 부분을 제외하고는 앞의 알고리즘과 꼭 같은데, step 2에서 P 행렬은 $A_0^T P A_0 - P = -Q_0$ 로 부터 구하고, step 6, step 8에서 Q_i 행렬은 $Q_i = P - (A_0 + \omega_i^* A_i)^T P (A_0 + \omega_i^* A_i)$ 로 부터 구하는 것으로 바뀌 주면 된다.

4. 시변 시스템의 안정도 경계에의 응용

예 1: 연속 시간 시스템의 안정도 영역

Zhou 등⁵⁾의 Example 2와 같은 예를 들겠다. 다음과 같이 주어지는 출력 되먹임 시스템(output feedback system)을 생각하자.

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + BK(t)C)x(t), \quad (30)$$

단,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

이고, 되먹임 이득 $K(t)$ 는

$$K(t) = \begin{bmatrix} -1 + \omega_1(t) & 0 \\ 0 & -1 + \omega_2(t) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

로 가정한다. (31), (32)를 (30)에 대입하여, 시스템을 (1)과 같은 꼴로 고치면

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A_0 + \omega_1(t)A_1 + \omega_2(t)A_2)x(t), \quad (33)$$

이고, 여기서

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

이 된다. $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ 가 +, - 양 방향으로 변한다고 가정하고 ω_1^+ , ω_1^- , ω_2^+ , ω_2^- , $i=1,2$ 에 적당한 비를 주어 표 1과 같은 여러 가지 해들을 얻었다. 이때 목적 함수는

$$F = (\omega_1^+)^{1/4} \quad (35)$$

를 사용하였다. 각 경우에 대한 매개변수 변동영역을 그림 1에 나타내었는데, 본 논문의 방법으로 Zhou 등의 경우보다 더 넓은 안정도 영역을 구할 수 있었다.

표 1 ω_1^+ , ω_1^- , ω_2^+ , ω_2^- 의 최대값(예 1)

Table 1 Bounds of ω_1^+ , ω_1^- , ω_2^+ , ω_2^- (Example 1).

case	$\omega_1^+ : \omega_1^- : \omega_2^+ : \omega_2^-$	ω_1^+	ω_1^-	ω_2^+	ω_2^-
1	2 : 1 : 3.4 : 1.7	3.4988	1.7499	5.9496	2.9748
2	5 : 1 : 8.5 : 1.7	8.7495	1.7499	14.874	2.9748
3	100 : 1 : 170 : 1.7	174.85	1.7485	297.24	2.9724
Zhou 등의 방법 ii)		1.6323	1.6323	2.8473	2.8473

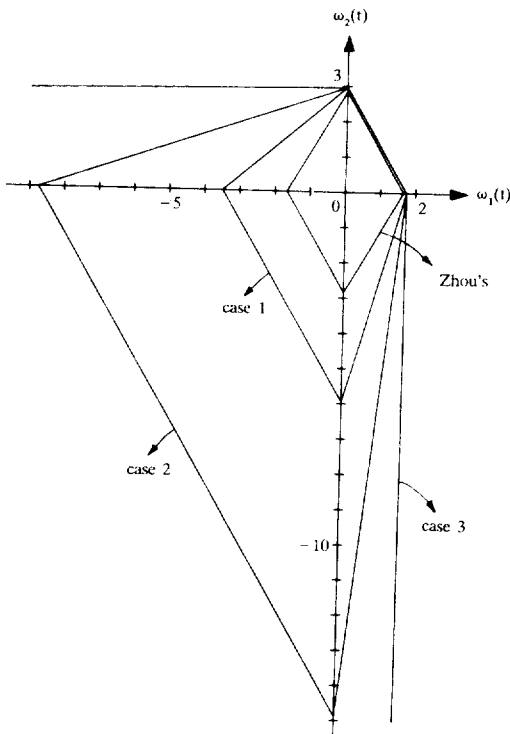


그림1 시변 연속시간 시스템 (30)의 안정도 영역
Fig.1 Stability region of the time-varying continuous-time system (30).

예 2: 2차 시변 차분 시스템의 안정도 영역

다음과 같은 2차 시변 차분 시스템을 생각하자.

$$x(k+2) + a_1(k)x(k+1) + a_2(k)x(k) = 0, \quad (36)$$

단, $a_i(k) = a_i + \omega_i(k)$, $i=1,2$ 이다.

이 시스템을 (12)와 같은 상태 공간 모델로 나타내면

$$x(k+1) = (A_0 + \omega_1(k)A_1 + \omega_2(k)A_2)x(k), \quad (37)$$

로써,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

가 된다. 여러 가지 a_1, a_2 에 대한 $\omega_1(k)$, $\omega_2(k)$ 의 안정도 영역을 $\omega_1(k)$, $\omega_2(k)$ 가 모두 +, -양 방향으로 변할 수 있다고 가정하여 표 2와 같은 여러 가지 해들을 얻었다. 이때 목적 함수는

$$F = (\omega_1^+)^{1/4} + (\omega_1^-)^{1/4} + (\omega_2^+)^{1/4} + (\omega_2^-)^{1/4} \quad (39)$$

를 사용하였다. 각 경우에 대한 시스템의 안정도를 보장하는 매개변수 변동영역을 그림 2에 4 각형들로써 도시하였다.

표 2 ω_1^+ , ω_1^- , ω_2^+ , ω_2^- 의 최대값(예 2)

Table 2 Bounds of ω_1^+ , ω_1^- , ω_2^+ , ω_2^- (Example 2)

a_1	a_2	ω_1^+	ω_1^-	ω_2^+	ω_2^-
-0.8	0.2	0.289	0.963	0.399	0.462
-0.4	0.3	0.466	0.734	0.875	0.436
0	0.4	0.526	0.527	1.192	0.392
0.4	0.5	0.522	0.380	1.098	0.305
0.8	0.6	0.419	0.270	0.743	0.215
1.2	0.7	0.263	0.169	0.374	0.139
1.5	0.8	0.133	0.091	0.167	0.079

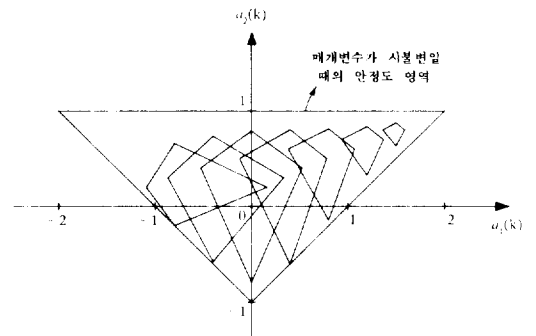


그림2 2차 시변 차분 시스템 (36)의 안정도 영역
Fig.2 Stability region of the time-varying difference system (36).

5. 토의 및 결론

본 논문에서는 여러 개의 매개변수들이 시간에 따라 변하는 선형 시변 시스템의 안정도에 대해 연구하였다. 연속 시간 시스템과 이산 시간 시스템 각각에 대해, 시스템의 점근적 안정도를 보장하는 매개변수 변동영역에 대한 충분 조건을 Lyapunov 방정식을 이용한 시간 영역에서의 해석에 의해 구하였다. 그리고 비선형 계획법을 사용하여 이 충분 조건을 만족하는 매개변수 변동영역을 구하는 방법을 제시하였다. 여기서 제시한 연속 시간 시스템에 대한 충분 조건은 Zhou 등의 것과 유사하나, 이산 시간 시스템에 대한 충분 조건은 이와 유사한 결과를 다른 곳에서 찾아볼 수 없었다.

현재까지 관련 연구 결과가 많았던 연속 시간 시스템의 경우, 본 논문의 방법과 최근에 발표된 Zhou 등의 방법을 비교해 보았는데, 본 논문의 방법으로 더 넓고 다양한 매개변수 변동영역을 구할 수 있었다. 그 이유는 다른 논문에서는 행렬의 norm을 사용하던데, Lyapunov 방정식의 Q_0 를 어떤 특정한 행렬(대부분의 경우 단위 행렬)로 고정시키는데 반하여, 여기서는 행렬의 norm을 사용하지 않았고, 또한 모든 가능한 Q_0 들 중에서 안정도 영역을 가장 크게 하는 값을 구하였기 때문이다.

본 논문에서는 구조화된 시변 매개변수들을 가지는 일반적인 형태의 시스템에 대한 안정도 영역을 구했으므로, 이러한 매개변수 변동을 가지는 시스템에 대한 견실한 제이기의 설계 등에 응용하면 시스템의 안정도 문제를 해석하는데 유용하리라 생각된다. 또 여러 가지 시변 필터 설계시에도 이를 적용할 수 있다.

참 고 문 헌

- 1) C.T. Chen, *Linear system theory and design*, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- 2) M.Y. Wu, "A note on stability of linear time-varying systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-19, p. 162, Apr., 1974.
- 3) R.K. Yedavalli, "Improved measures of stability robustness for linear state space models," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, pp. 577 - 579, June, 1985.
- 4) R.K. Yedavalli and Z. Liang, "Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, pp. 863-866, Sep., 1986.
- 5) K. Zhou and P.P. Khargonekar, "Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, pp. 621-623, July, 1987.
- 6) M.J. Hopper, *Harwell subroutine library*, AERE Harwell, 1981.