

論 文
37~5~7

# 선형계획법을 사용한 매개 변수 추정 방법에 의한 견실한 적응제어 시스템

## Robust Adaptive Control Systems by using Linear Programming in Parameter Estimation.

崔 悰 鎬\* · 李 河 政\*\*

(Chong-Ho Choi · Ha-Joung Lee)

### 요 약

잡음이나 모델화되지 않은 운동에 의해 나타나는 출력의 상한을 안다는 가정하에서 모델화 되지 않은 운동을 포함하는 플랜트에 대한 적응 제어에 대하여 연구하였다. 이 문제는 Middleton 등이 다룬 문제로서 그들은 플랜트의 매개 변수를 추정하는데 최소자승법의 변형을 사용하였으나 본 논문에서는 매개 변수의 상하한을 선형 계획법에 의하여 추정하고 이 정보를 투영법에 사용하여 매개변수를 구하는 알고리즘을 제시하였다. 적응 제어 시스템의 안정성은 Middleton과 비슷하게 증명할 수 있었다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 제시된 알고리즘이 매개 변수의 수렴 특성이나 플랜트의 출력 특성에서 Middleton의 방법보다 우수하였다.

**Abstract**-An adaptive control problem for a plant with unmodelled dynamics is studied. The upper bounds of the output due to the unmodelled dynamics and measurement noise is assumed to be known. This problem was studied by Middleton et al. They used a modified form of the least square method in estimating the plant parameters. In this paper, the bounds of the parameters are estimated by linear programming and the parameters are estimated by the projection type algorithm incorporating the bounds of the parameters. The stability of the proposed adaptive control system can be proved in nearly the same way as the proof of Middleton. The performance of the proposed method is found to be much better than the method of Middleton's with respect to the parameter convergence and plant output in computer simulations.

### 1. 서 론

모델구조와 플랜트의 구조가 일치하는 경우에 대한 적응제어 연구는 1970년경에 많이 연구되었다<sup>1)~4)</sup> 그러나 제어 대상 플랜트가 모델화되지 않은 운동을 포함하고 있을 때, 가정된 모델과 플랜트는 일

치하지 않게 되는데 이 경우 적응 제어 시스템은 불안정해 질 수 있다.<sup>5)</sup> 실제 플랜트에 모델화되지 않은 운동이 존재하더라도 그 안정성을 유지할 수 있는 적응제어기를 견실한 적응제어기라고 하는데 최근 이러한 견실한 적응제어기를 설계 방법에 대해 많은 연구가 행해지고 있다.

모델화되지 않은 운동으로부터 발생하는 신호가 유한한 경우 dead zone을 사용하거나,<sup>6)</sup> 매개 변수 추정치의 norm이 어떤 한계를 넘는 경우에만 적응 법칙을 가동하는 방법,<sup>7)</sup> 매개 변수의 추정치를 일

\* 正 會 員 : 서울대 工大 制御計測工學科 副教授 · 工博  
 \*\* 正 會 員 : 서울대 大學院 制御計測工學科 碩士課程  
 接受日字 : 1987年 11月 5日  
 1次修正 : 1988年 3月 9日

종의 저주파 필터를 통과시키는 방법<sup>9)</sup> 등이 제시되어 적응제어 시스템을 보다 안정하게 할 수 있었다.

한편 모델화되지 않은 운동으로부터 발생하는 신호가 유한하지 않으나 그 상한을 입력이나 출력으로 표시할 수 있는 경우에 대해 relative dead zone을 사용하여 시스템을 안정시킬 수 있음이 보였다.<sup>9)~10)</sup> Kreisselmeier 등<sup>9)</sup>은 매개 변수의 상하한을 알 때 relative dead zone과 투영법의 매개 변수 추정 방법을 사용하여 시스템의 안정성을 증명하였다. 반면 Middleton 등<sup>10)</sup>은 최소사승법의 변형을 relative dead zone과 함께 사용했을 때 Gronwall의 Lemma<sup>10)</sup>를 사용하여 시스템의 안정성을 증명하였다. 이때, 매개 변수의 상하한을 안다면 추정치들이 상하한 범위를 벗어날 경우 매개변수가 존재하는 범위로 투영하여 매개변수를 추정하는 방법을 제안하였다. 본 논문에서는 Middleton 등이 연구한 문제를 다루는데 모델화되지 않은 운동으로부터 발생하는 신호의 상하한을 알 경우 시스템은 어떤 부등식을 만족함을 이용하여 선형계획법을 통하여 매개 변수의 상하한을 추정한 다음 Kreisselmeier가 사용한 투영법 형태의 매개 변수 추정방법<sup>9)</sup>을 사용하고, 적응구조로는 Middleton 등<sup>10)</sup>이 제시한 것을 사용하여 적응제어 시스템의 안정성을 보이겠다.

간단한 플랜트에 대하여 제시된 알고리즘의 매개 변수의 수렴 특성이나 플랜트의 출력특성을 Middleton의 방법과 비교하였다.

## 2. 플랜트에 대한 가정과 플랜트의 모델

적용제어를 하려는 플랜트는 다음에 제시되는 5가지의 가정을 만족한다고 가정하는데 이는 Middleton 등<sup>10)</sup>이 연구한 플랜트와 같다.

가정 1. 플랜트는 다음 식으로 표시된다.

$$y = H(1 + H')u + n \quad (2.1)$$

여기서  $u$ 와  $y$ 는 플랜트의 입력과 출력이며  $n$ 은 유한한 (bounded) 외란이다. 또  $H$ 와  $H'$ 는 각각 모델화된 플랜트(nominal)와 모델화 되지 않은 운동을 나타낸다.

가정 2. (2.1)에 나타난  $H$ 는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$H = \frac{B}{A} \quad (2.2)$$

$$A(\delta) \triangleq a_0 + a_1\delta + \dots + \delta^n$$

$$B(\delta) \triangleq b_0 + b_1\delta + \dots + b_m\delta^m$$

여기서  $\delta$ 는 operator로써  $q$ 를 forward shift operator라 하고  $\Delta$ 를 샘플링 주기라 하면  $\delta \triangleq (q-1)/\Delta$ 이며  $\Delta \rightarrow 0$ 이 되면서  $d/dt$ 가 된다. (여기서  $\delta$ 대신  $q$ 를 사용하여도 되나 Middleton 등<sup>10)</sup>과 같은 표현법을 사용하기 위하여  $\delta$ 를 사용하였다. Middleton 등<sup>11)</sup>은  $\delta$ 를 사용하는 경우  $q$ 의 경우보다 finite word length의 특성등이 향상된다고 하였다.) 이때  $A, B$ 는 서로소(coprime)인  $\delta$ 의 다항식이며  $\partial A$ 는  $A$ 의 차수를 나타낸다고 할 때  $\partial A > \partial B$ 이다.

가정 3. (2.1)에 나타난  $H'$ 는 안정한 유리 전달함수로  $H' = B'/A'$ 의 형태를 가지며  $\partial A' \geq \partial B'$ 이다. (2.1)의 식을 다음과 같이 쓰자.

$$Ay = Bu + \frac{BB'}{A'}u + An$$

$$= Bu + \eta \quad (2.3)$$

$$\eta \triangleq \frac{BB'}{A'}u + An$$

여기서 ( $H$ 와 비슷한 대역을 갖는) 필터  $G/F(\partial F = \partial A + \partial G$ ,  $G$ 와  $F$ 는 안정한 다항식)를 이용하여 (2.3)의 신호를 필터링 하면

$$Ay_r = Bu_r + \eta_r \quad (2.4)$$

$$y_r \triangleq \frac{G}{F}y, \quad u_r \triangleq \frac{G}{F}u, \quad \eta_r \triangleq \frac{G}{F}\eta$$

이 되는데 이러한 방법은 모델화 되지 않은 운동에 의한 영향을 줄이기 위한 것이다. (2.4)를 다음과 같이 변형하여

$$\delta^n y_r = (\delta^n - A)y_r + Bu_r + \eta_r \quad (2.5)$$

로 하고 이를 regression 벡터로 나타내면

$$\delta^n y_r = \phi^T(k-1)\theta_* + \eta_r \quad (2.6)$$

$$\phi^T(k-1) \triangleq [-y_r(k), -\delta y_r(k), \dots, -\delta^{n-1}y_r(k), u_r(k), \dots, \delta^m u_r(k)]$$

$$\theta_*^T \triangleq [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_m]$$

로 되는데 이는 Middleton<sup>10)</sup>이 사용한  $E(\delta)$ 를  $\delta^n$ 으로 놓은 것과 같다.

그러면 (2.4)와 (2.5)을 이용해  $\eta_r$ 가  $u_r$ 와  $y_r$ 로부터 결정되는 어떤 함수에 의해 한정됨을 보일 수 있다.<sup>10)</sup>

보조정리 2.1 가정 1.~3.을 만족하는 플랜트에 있어서 모든 k에 대하여 다음을 만족하는 상수  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $\epsilon$ ,  $\epsilon_0$  그리고 상수벡터  $v$ 가 존재한다.<sup>1)</sup>

$$|\eta_r| \leq \rho(k) \quad (2.7)$$

$$\rho(k) \triangleq \epsilon \text{SUP} [ |v^T X(k)| \delta^{k-t} ] + \epsilon_0 \quad (2.8)$$

$$0 \leq t \leq k$$

$$X^T(k) \triangleq [ \delta^{n+k-1} z'_r, \dots, z'_r, \delta^{n-1} u_r, \dots, u_r ]$$

$$z'_r \triangleq \frac{1}{F} z$$

$$z \triangleq y - y^*$$

여기서  $y^*$ 는 플랜트의 원하는 출력이며

$g = \partial G$ 이다.

가정 4. (2.8)을 만족하는  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon$ ,  $v$  및  $\sigma$ 와 (2.4)에서 사용된 필터  $G/F$ 를 안다. ( $G$ 와  $F$ 는 안정한 다항식)

가정 5. 다음 조건을 만족하는 convex의 집합  $D$ 가 존재한다.

1)  $\theta_* \in D$

2) 모든  $\theta(k) \in D$ 에 대해

$$\| \varphi(AG, B) \| < c < \infty \quad (2.9)$$

이다. 여기서  $\varphi(X, Y)$ 는  $X, Y$ 에 대한

Sylvester Matrix를 나타내고  $\bar{A}, \bar{B}$ 은  $A$ 와  $B$ 의 추정치이다.

플랜트가 이와같은 가정을 만족시킬 때 다음장에서 플랜트의 모델에 대한 전달함수를 나타내주는

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_r(k+1), \dots, \delta^{n-1}y_r(k+1), -u_r(k+1), \dots, \\ -y_r(k+1), \dots, -\delta^{n-1}y_r(k+1), u_r(k+1), \dots, \\ \vdots \\ \vdots \\ y_r(k+j), \dots, \delta^{n-1}y_r(k+j), -u_r(k+j), \dots, \\ -y_r(k+j), \dots, -\delta^{n-1}y_r(k+j), u_r(k+j), \dots, \end{pmatrix}}_{A_1} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} -\delta^m u_r(k+1) \\ \delta^m u_r(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ -\delta^m u_r(k+j) \\ \delta^m u_r(k+j) \end{pmatrix}}_{\theta_*} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} \rho(k+1) - \delta^n y_r(k+1) \\ \rho(k+1) + \delta^n y_r(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho(k+j) - \delta^n y_r(k+j) \\ \rho(k+j) + \delta^n y_r(k+j) \end{pmatrix}}_{B_1} \quad (3.4)$$

이 되는데 이 식은 다음과 같은 형태이다.

$$A_1(k+1, k+j) \theta_* \leq B_1(k+1, k+j) \quad (3.5)$$

$A_1$ :  $(2j) \times (n+m+1)$ 의 상수행렬

$B_1$ :  $(2j) \times 1$ 의 상수벡터

$\theta_*$ 의 각 요소에 대한 상한과 하한을 구하기 위해 다음과 같은 목적함수를 생각하고

$$\min \theta_{i*}, \quad i=1, \dots, n+m+1$$

$$\max \theta_{i*}, \quad i=1, \dots, n+m+1$$

매개 변수들의 상하한을 구하는 방법에 대하여 알아보겠다.

### 3. 선형계획법에 의한 모델 매개 변수의 상하한 결정방법

앞장에서 제시한 모델(nominal model) 매개 변수의 상하한을 선형계획법을 사용하여 구하는 방법에 대하여 알아보자.

(2.4)와 (2.7)로부터 모든 k에 대하여

$$|Ay_r - Bu_r| \leq \rho(k) \quad (3.1)$$

가 얻어지는데  $y_r$ 와  $u_r$  그리고  $\rho(k)$ 를 알고 있으므로 (3.1)로부터  $A$ 와  $B$ 의 계수가 어떤 제한된 영역안에 있음을 알 수 있다.

(3.1)에서 절대값을 풀어 주면 다음과 같고

$$\begin{aligned} Ay_r - Bu_r &\leq \rho(k) \\ -Ay_r + Bu_r &\leq \rho(k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

윗식에 (2.7)과 (2.8)을 대입하여 정리하면 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} a_0 y_r + \dots + a_{n-1} \delta^{n-1} y_r - b_0 u_r - \dots - b_m \delta^m u_r &\leq \rho(k) - \delta^n y_r \\ -a_0 y_r - \dots - a_{n-1} y_r + b_0 u_r + \dots + b_m \delta^m u_r &\leq \rho(k) + \delta^n y_r \end{aligned} \quad (3.3)$$

또 이 식은 시간 구간  $(k+1, k+j)$ 에서는

(3.5)를 제약조건식으로 하여 선형계획법으로 풀면  $\theta_{i*}$ 가 존재하는 상한과 하한을 구할 수 있으며  $\theta_{i*}$ 의 상한은 k에 따라 증가하지는 않으며  $\theta_{i*}$ 의 하한은 k에 따라 감소하지는 않는다. 그런데 (3.5)를 보면 알고리즘이 진행함에 따라 j가 무한히 증가하며 따라서 (3.5)를 풀기가 어려워진다.

이 점을 해결하기 위하여 j의 크기를 N으로 제한하고 시간이 N만큼 경과할 때마다 여태까지 알려진  $\theta_{i*}$ 의 상하한과 최근에 들어온 N개의 (3.4) 형태

의 관계식으로 부터 새로운  $\theta_{i*}$ 의 상하한을 구하는 다음의 방법을 생각하자.

1.  $\theta_{i, min}, \theta_{i, max} (i=1, \dots, n+m+1)$ 의 초기값  $\theta_{i, min}(0), \theta_{i, max}(0)$ 를 가정 5를 만족시키도록 정한다. 이로부터  $A_2 \theta_* \leq B_2 ((i-1)N)$  (3.6)

$$A_2 \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ & 1 & 0 \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 \triangleq \begin{bmatrix} \theta_{i, max}((i-1)N) \\ -\theta_{i, min}((i-1)N) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{w, max}((i-1)N) \\ -\theta_{w, min}((i-1)N) \end{bmatrix}, w=n+m+1$$

인 형태의 제약조건을 얻는다.

여기서  $\theta_{i, min}(k)$ 와  $\theta_{i, max}(k)$ 는 각각 시간  $k$ 에서 구한  $\theta_i$ 의 최소값과 최대값이다.

2. 시간  $k \neq iN (i: \text{자연수})$ 이면  $\theta_{i*}$ 의 상하한을 바꾸지 않고,  $k=iN$ 이면  $\theta_{i*}$ 의 상하한을 바꾸는데 시간  $((i-1)N+1, iN)$ 에 들어온 입출력 데이터로부터 (3.5)의  $A_1$ 행렬 및  $B_1$ 벡터를 갱신하고  $k=(i-1)N$ 에서 구한  $\theta_{i*}$ 의 상하한 값을 가지고 (3.6)의  $A_2$  및  $B_2$ 를 갱신한 후 시간  $k$ 에서의  $\theta_{i*}$ 의 상하한을 선형계획법을 사용하여 구한다. 즉,

- 1) 하한을 결정하는 경우는  $\min \theta_{i*}$
- 2) 상한을 결정하는 경우는  $\max \theta_{i*}$

를 목적함수로 하고 다음과 같은 제약조건

$$\begin{bmatrix} A_1((i-1)N+1, iN) \\ A_2 \end{bmatrix} \theta_* \leq \begin{bmatrix} B_1((i-1)N+1, iN) \\ B_2((i-1)N) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

으로부터 구한다.

여기서  $N$ 은 매개변수의 수보다는 커야하며 크면 클수록  $\theta_{i*}$ 의 좋은 상하한 값을 주겠지만 선형계획법을 푸는데 시간이 많이 걸리는 점을 유의하여 선정하여야겠다.

### 4. 적응제어 알고리즘

#### 4.1 매개 변수의 추정 방법 및 그 성질

(2.6)에 나타난 플랜트  $\delta^a y_r(k) = \phi^T(k-1) \theta_* + \eta_r$ 에서  $\theta_*$ 의 상하한을 아는 경우  $\theta_*$ 를 추정하기 위하여 다음과 같은 relative dead zone을 사용한 투영법 형태의 알고리즘을 생각해 보자.<sup>10)</sup>

$$\bar{\theta}(k) = \theta(k-1) + \frac{\phi(k-1) f(\beta_\theta(k), e(k))}{\gamma + \phi^T(k-1) \phi(k-1)} \quad \gamma > 0, \beta > 1 \quad (4.1)$$

여기서

$$\theta_i(k) = \begin{cases} \bar{\theta}_i(k), & \theta_{i, min} < \bar{\theta}_i(k) < \theta_{i, max} \\ \theta_{i, max}, & \bar{\theta}_i(k) \geq \theta_{i, max} \\ \theta_{i, min}, & \bar{\theta}_i(k) \leq \theta_{i, min} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$f(g, e) \triangleq \begin{cases} e-g, & e > g \\ 0, & |e| \leq g \\ e+g, & e < -g \end{cases} \quad (4.3)$$

이다.

그리고  $\delta^a \hat{y}_r(k), \theta_e(k)$ 와  $e(k)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\delta^a \hat{y}_r(k) \triangleq \phi^T(k-1) \theta(k-1) \quad (4.4)$$

$$\theta_e(k) \triangleq \theta(k) - \theta_* \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} e(k) &\triangleq \delta^a \hat{y}_r(k) - \delta^a y_r(k) \\ &= \phi^T(k-1) [\theta(k-1) - \theta_*] + \eta_r \\ &= \phi^T(k-1) \theta_e(k-1) + \eta_r \end{aligned} \quad (4.6)$$

보조정리 4.1:(4.1)~(4.6)에 제시한 알고리즘은 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$1) \tilde{f}(k) \triangleq f^2(\beta_\theta(k), e(k)) / (\gamma + \phi^T(k-1) \phi(k-1))$$

이라면  $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}(k) < \infty$  이다. (4.7)

$$2) \|\delta \theta(k)\| \in \ell_2 \quad (4.8)$$

증명)

$$1) (4.3) \text{으로부터} \quad f(\beta_\theta(k), e(k)) = \alpha(k) \phi^T(k-1) \theta_e(k-1), \quad 0 \leq \alpha(k) \leq 1 \quad (4.9)$$

으로 쓸 수 있다.

(4.1)의 양변에서  $\theta_*$ 를 빼고 (4.5)와 (4.9)를 사용하면

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_e(k) &= \theta_e(k-1) - \frac{\alpha(k) \phi(k-1) \phi^T(k-1) \theta_e(k-1)}{\gamma + \phi^T(k-1) \phi(k-1)} \\ &= \left[ 1 - \frac{\alpha(k) \phi(k-1) \phi^T(k-1)}{\gamma + \phi^T(k-1) \phi(k-1)} \right] \theta_e(k-1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\bar{\theta}_e(k) \triangleq \bar{\theta}(k) - \theta_*$$

가 된다.

또한 Lyapunov 함수를

$$V(k) = \theta_e^T(k) \theta_e(k) \quad (4.11)$$

라 정의하면

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-1) &= \theta_e^T(k) \theta_e(k) \\ &\quad - \theta_e^T(k-1) \theta_e(k-1) \\ &\leq \bar{\theta}_e^T(k) \bar{\theta}_e(k) - \\ &\quad - \theta_e^T(k-1) \theta_e^T(k-1) \quad (4.12) \end{aligned}$$

이 되고 여기서 (4.10)을 사용하여 약간 변형하면

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-1) &\leq -\frac{\alpha^2(k) [\theta_e^T(k-1) \phi(k-1)]^2}{\gamma + \phi^T(k-1) \phi(k-1)} \\ &\leq 0 \quad (4.13) \end{aligned}$$

이 된다. 그런데 (4.13)에서

$$V(\infty) < V(-1) - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}(k)$$

이고  $V(\infty) \geq 0$ 이며  $V(0)$ 는 유한하므로  $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}(k)$ 는 유한하다.

2) (4.5), (4.10)과 (4.13)을 사용하여 다음 관계식을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} &\Delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|\delta \theta_e(k)\|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\theta_e(k) - \theta_e(k-1)]^T [\theta_e(k) - \theta_e(k-1)] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} [\bar{\theta}_e(k) - \theta_e(k-1)]^T [\bar{\theta}_e(k) - \theta_e(k-1)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^2(k) (\phi^T(k-1) \theta_e(k-1))^2}{\gamma + \phi^T(k-1) \phi(k-1)} \\ &\quad \frac{\phi^T(k-1) \phi(k-1)}{\gamma + \phi^T(k-1) \phi(k-1)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^2(k) (\phi^T(k-1) \theta_e(k-1))^2}{\gamma + \phi^T(k-1) \phi(k-1)} \\ &\leq V(-1) - V(\infty). \end{aligned}$$

$V(-1)$ 과  $V(\infty)$ 는 각각 유한하므로

$$\|\delta \theta_e(k)\| \in \ell_2$$

이 성립한다.

그런데  $\delta \theta(k) = \delta \theta_e(k)$ 이므로  $\|\delta \theta(k)\| \in \ell_2$ 이다.

### 4.2 제어기의 구성

4.1절에 제시한 방법으로 플랜트의 모델 H가 알려지면 원하는 특성을 갖는 제어기의 구성은 여러 가지 방법이 있다. 여기서는 Middleton 등<sup>10)</sup>이 사용한 구조를 사용하는데 이는 극배치(Pole-Placement) 방법이다.

전체 시스템의 특성방정식이 안정한 다항식  $A^*$ 가 되도록 (2.4)로 나타나는 시스템에 그림 4.1와 같은 구조를 취하면 플랜트의 입력  $u$ 는

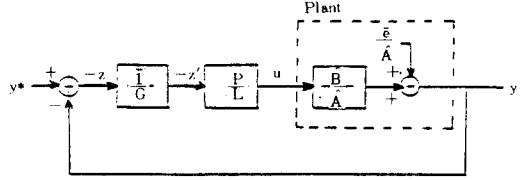


그림 4.1 적응제어 시스템의 구조

Fig.4.1 Structure of adaptive control system

$$Lu = -Pz', \quad z' = \frac{1}{G}z = \frac{1}{G}(y - y^*) \quad (4.16)$$

로 주어지고 전체 시스템은

$$\begin{aligned} y &= \frac{P\hat{B}}{P\hat{B} + L\hat{G}\hat{A}}y^* + \frac{L\hat{G}\hat{A}}{P\hat{B} + L\hat{G}\hat{A}}\left(\frac{1}{\hat{A}}\right)\bar{e} \quad (4.17) \\ \bar{e} &\triangleq \frac{F}{G}e \end{aligned}$$

이 된다. 원하는 특성다항식이  $A^*$ 이므로

$$\begin{aligned} P\hat{B} + L\hat{G}\hat{A} &= A^* \quad (4.18) \\ \partial A^* &= 2\partial A + \partial G, \quad \partial P = \partial A + \partial G - 1, \quad \partial L = \partial A \end{aligned}$$

이 되도록 매 k시간마다 (4.1)의 식으로부터 구한  $\hat{A}$ 와  $\hat{B}$ 의 계수를 사용하여 P와 L의 계수들을 결정한다.

여기서 P와 L이 유일하게 존재하기 위하여 가정 5가 필요하다. 또한 시변 시스템의 안정도에 대한 다음의 보조정리를 사용하였다.

보조정리 4.2: 다음의 제차(homogenous) 선형 시변 시스템을 생각하자.

$$\delta X(k) = A(k)X(k)$$

이 시스템이 모든 k에 대해

- 1)  $A(k)$ 가 유한하고
- 2)  $\delta A(k) \in \ell_2$
- 3)  $A(k)$ 의 고유값이 안정한 영역 안에 있다

는 조건을 만족하면 이 시스템은 지수함수적으로 정하다.<sup>12)</sup> 그러면 전체 적응 제어 시스템의 안정성에 대하여 다음 결과를 얻는다.

정리 4.1: 플랜트 (2.1)이 가정 1~5를 만족하며 이 플랜트를 (4.1)~(4.17)을 따라 제어한다면, (2.8)의  $\epsilon$ 이 충분히 작고  $y^*$ 와 모든 초기치가 유한할 때  $u$ 와  $y$ 는 유한하다. (이 정리는 Middleton 등<sup>10)</sup>이 제시한 정리와 거의 같으며 다른 점은 보조정리 4.1을 얻는데 최소 자승법 대신 투영법을 사용한 것이다.)

증명은 보조정리 4.1을 사용하면 보조정리 4.2의 전제조건들을 만족시킬 수 있다는 것 이외에는 Middleton 등<sup>10)</sup>이 사용한 증명과 같은 식으로 하면 된다. 그

증명 과정은 길며 Middleton등<sup>10)</sup>을 보면 자명하므로 여기서는 생략한다.

### 4.3 이득의 보정

앞의 4.2절에서 극배치 제어구조를 제시하고 그 안정성을 보였다. 이러한 극배치 방법은 대역폭 등과 같은 전체 시스템의 상대적인 주파수 특성은 변화시킬 수 있으나 시스템의 D. C. 이득이 1이 되기 위해서는 제어기에 적분기를 삽입하는 방법도 있으나 여기서는 페루우프 시스템 밖에서 D. C. 이득을 조정하는 방법을 생각하여 보았다.

우선 전체 제어시스템의 이득을 추정하고 그 이득의 역수  $g(k)$ 를 원하는 출력  $y^*$ 에 곱해주면 전체 이득이 1이 될 수 있다. (그림 4.2)

이득의 역수  $g(k)$ 를 다음과 같이 추정하자.

$$g(k) = \frac{\sum_{j=0}^k \lambda_i^{k-j} |y^*(j-d)|}{\sum_{j=0}^k \lambda_i^{k-j} |y(j)|} \triangleq \frac{g_n(k)}{g_a(k)} \quad (4.19)$$

$\lambda_i \in (0, 1), g_a \neq 0$

위식에서  $y^*(j-d)$ 를 사용한 것은 플랜트의 지연 시간  $d$ 를 고려한 것이며  $\lambda_i$ 는 망각인자이다.

앞식에서는 시스템 과도기이거나 입력이 크게 변하는 경우에  $g$ 가 크게 진동할 수 있으므로  $g$ 를 보다 안정하게 움직이게 하기 위해 다음의 방법을 사용한다.

$$\hat{g}(k) = \lambda_e \hat{g}(k-1) + (1-\lambda_e) \cdot \frac{g_n(k)}{g_a(k)}, \quad (4.20)$$

$\lambda_e \in (0, 1)$

4.2절의 결과와 (4.19), (4.20)으로 부터  $\hat{g}(k)$ 는 유한하며 그림 4.2에서  $\hat{g}(k)$ 는 페루우프 시스템의 밖에 있기 때문에 전체 시스템의 안정성은  $\hat{g}(k)$ 에 의해 영향을 받지 않는다.

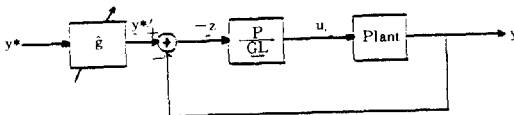


그림 4.2 이득이 보정된 제어 구조  
Fig.4.2 Gain-compensated control structure

## 5. 컴퓨터 시뮬레이션

본 논문에서 제시한 방법의 성능을 평가하기 위하

여 다음과 같은 플랜트

$$y(k) = \frac{3.68}{\delta + 6.32} \left( 1 + \frac{12.22}{\delta + 10} \right) u(k) + n(k) \quad (5.1)$$

를 본 논문에서 제시한 방법과 Middleton의 방법에 따라 적응제어 한 결과를 비교하였다.

이 경우의 (2.6)에서의  $\theta^* = [6.32, 3.68]^T$ 이 되겠다. 여기서 사용한 조건은 다음과 같이 하였다.

$$A^*(\delta) = (\delta + 10)^2,$$

$$\frac{G(\delta)}{F(\delta)} = \frac{4.48\delta + 44.81}{\delta^2 + 19.00\delta + 90.29}$$

$n(k)$  :  $-0.005 \sim +0.005$ 에 균등 분포하는 잡음,

$y^*(k)$  : 크기가 5인 0.5Hz의 구형파,

$$\beta = 1.1, \theta(0) = [0, 0]^T,$$

이며  $k=0$ 일 때 P와 L의 초기 값은

$$P(\delta) = \delta + 1, L(\delta) = \delta + 1$$

로 하였다. 여기서  $A^*$ 는  $\Delta = 0.1$ 로 하였을 때 3step의 시간지연을 갖는 경우에 해당되고  $G(\delta)/F(\delta)$ 는  $900/(s+30)^2$ 에 해당되는 저주파 통과 필터이다.

그림 5.1에는  $\|\theta_e(k)\|$ 의 추이를 보였는데 본 논문의 방법이 보다 빨리 수렴하고 있음을 보여준다.

그림 5.2와 5.3에는 플랜트 출력을 보였는데 본

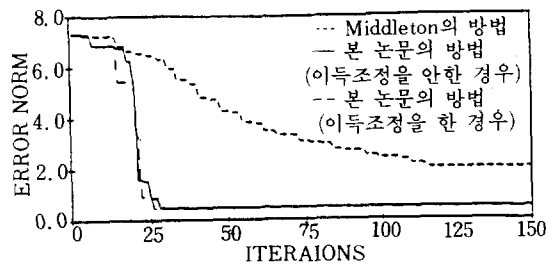


그림 5.1  $\|\hat{\theta}_e(k)\|$ 의 비교

Fig.5.1 Comparison of  $\|\hat{\theta}_e(k)\|$

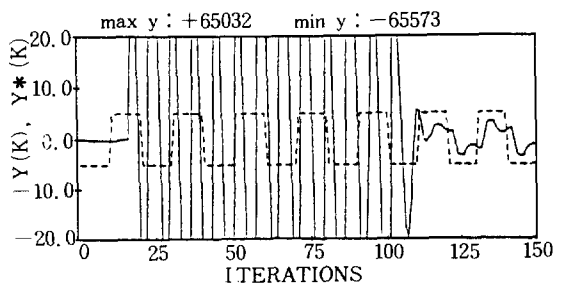


그림 5.2 Middleton 방법에 의한 플랜트 출력

Fig.5.2 Plant output by Middleton's method

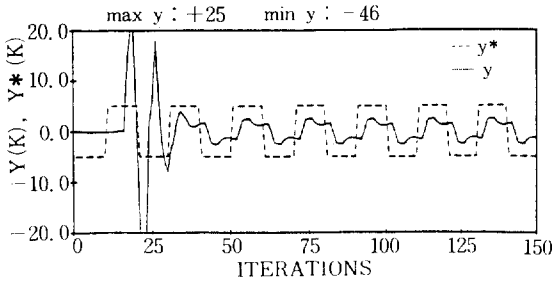


그림 5.3 본 논문의 방법에 의한 플랜트 출력 (이득  $g(k)$ 를 고려하지 않은 경우)

Fig.5.3 Plant output by the proposed method (gain  $g(k)$  is not adjusted)

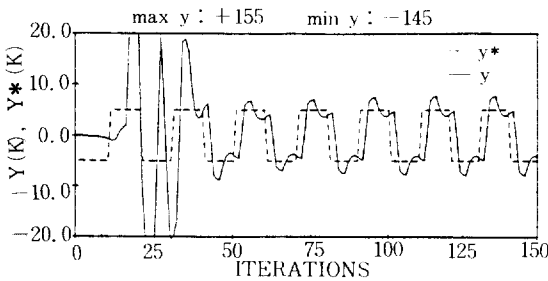


그림 5.4 본 논문의 방법에 의한 플랜트 출력 (이득  $g(k)$ 를 고려한 경우)

Fig.5.4 Plant output by the proposed method (gain  $g(k)$  is adjusted)

논문의 방법은 과도현상이 나타나는 진동이 작고 짧을뿐 아니라 수렴후에도  $y^*$ 를 보다 잘 따라가고 있다. 수렴후에 나타나는 오우버 슈트(overshoot)는 모델화되지 않은 운동에 의한 것으로 불가피한 것이다. 그림 5.4에서는 D. C. 이득  $\hat{g}(k)$ 를 조정함으로써 플랜트 출력의 크기가 원하는 출력  $y^*(k)$ 의 크기를 쫓아가는 것을 나타낸다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 Middleton<sup>10)</sup>이 다룬 플랜트가 모델화되지 않은 운동을 포함하는 경우에 대한 적응 제어 문제에 대하여 다루었다. 플랜트의 모델화되지 않은 운동으로 발생하는 출력의 크기를 안다는 가정으로부터 모델전달함수의 매개 변수들의 상하한을 선형계획법으로 구할 수가 있었는데 그 상하한의 차이는 시간이 경과함에 따라 작아진다.

Middleton<sup>10)</sup>은 매개 변수 상하한에 관한 정보를 사용하지 않고 매개변수를 최소자승법의 변형을

사용하여 구했는데 본 연구에서는 매개 변수의 상하한에 관한 정보를 사용하고 투영법을 사용하여 매개 변수를 추정하였다. 시뮬레이션 결과 같은 조건에서 본 연구에서 제시한 방법이 Middleton<sup>10)</sup>이 제시한 방법보다 매개 변수를 찾아가는데나 출력오차를 줄이는데 있어서 성능이 우수한 것을 볼 수 있었다. 이와 비슷한 문제를 Kreisselmeier<sup>11)</sup>이 모델 전달함수의 매개 변수의 상하한을 안다는 가정 하에서 하였으나 본 연구에서 제시한 방법을 사용하면 초기에는 상하한에 대한 정보가 부족하여 충분히 크게 주더라도 시간이 지남에 따라 그 범위가 좁아지므로 실제적으로는 초기에 상하한에 대한 정보가 없어도 되겠다.

본 연구에서는 매개 변수를 추정하는데 있어서 매개 변수의 상하한에 대한 정보를 투영법에 이용하였는데 일반적으로 투영법보다는 최소자승법이 매개 변수의 수렴속도에 있어서 빠르다. 따라서 상하한에 대한 정보를 최소자승법에 이용하면 더 좋은 방법이 되리라 예상되며 이 방향으로의 연구가 앞으로 기대된다.

※이 연구는 한국전자통신 연구소의 지원에 의하여 이루어졌습니다.

## 참 고 문 헌

- 1) K. J. Astrom, "Theory and applications of adaptive control - A survey," Automatica, Vol. 19, No. 5, 1983, pp. 471-487.
- 2) G. C. Goodwin, and K. S. Sin, Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice Hall 1984.
- 3) K. S. Narendra, Y. H. Lin, and L. S. Valavani, "Stable adaptive controller design, Part II, Proof of stability," IEEE AC-25, No. 3, pp. 440-449.
- 4) H. Elliot, R. Cristi and M. Das, "Global stability of adaptive pole placement algorithms," IEEE AC-30, No. 4, 1985, pp. 348-357.
- 5) C. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, and G. Stein, "Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodelled dynamics," IEEE AC-30, No. 9, 1985, pp. 881-889.
- 6) B. B. Peterson and K. S. Narendra, "Bounded error adaptive control," IEEE AC-27, 1982, pp. 1161-1168.
- 7) G. Kreisselmeier and K. S. Narendra, "Stable model reference adaptive control in the presence

- of bounded disturbances," IEEE AC - 27, 1982, pp. 1169~1175.
- 8) P. A. Ioannou and P.V. Kokotovic, "Instability and analysis improvement of adaptive of control," *Automatica*, 20 No. 5, 1984, pp. 583~594.
- 9) G. Kreisselmeier and B. D. O. Anderson, "Robust model reference adaptive control," IEEE AC - 31, No. 2, 1986, pp. 127~133.
- 10) R. H. Middleton, G. C. Goodwin, D. J. Hill and D. Q. Mayne, "Robust adaptive control (Convergence, Stability and Performance.)," Technical Report EE8544, Dept. of Electrical and Computer Eng., Univ. of Newcastle, 1985, Proceedings of 25th CDC Athens, Greece, Dec., 1986.
- 11) R. H. Middleton, G. C. Goodwin, "Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators," IEEE AC - 31, No. 11, 1986, pp. 1015~1021.
- 12) C. A. Desoer, "Slowly varying discrete system  $X_{t+1} = A_t X_t$ ," *Electronics Letters*, 6, 11, May. 1970.
-