

多層要素網法을 이용한 電磁場 數值解析에 關한 研究

論 文
37~5~3

A Study on the Numerical Analysis of Electromagnetic Field using Multi-Grid Method.

高 彰 燮* · 崔 炅** · 李 基 植† · 韓 松 曄‡
(Chang-Sub Koh · Choi Kyung · Ki-Sik Lee · Song-Yop Hahn)

요 약

電磁場 問題를 有限要素法으로 푸는 경우 計算時間의 短縮을 위하여 多層要素網 理論을 導入하였으며 그 알고리즘에 대하여 研究하였다.

要素網 數는 殘差矯正때 발생하는 誤差를 고려하여 3 개를 취하였고 最下位 要素網을 基準으로 하여 各 要素 邊의 中點에 節點을 發生시켜 上位 要素網을 構成하였다.

몇가지 모델에 適用해본 결과 既存의 反復解法에 비하여 計算機 記憶容量은 다소 增加하였지만 計算時間이 대폭으로 短축되었다. 電磁場 問題인 경우 多層要素網法에 사용되는 反復解法으로는 加速因子가 1.3~1.4 근처의 S.O.R. (Successive Over Relaxation)法이 效果的이었고, W 사이클 보다는 V 사이클이 다소 有利하였다.

Abstract- A Multi-grid method is introduced to Finite Element Analysis of electromagnetic field problems in order to reduce the computational time. The purpose of this work is to study how to intermix discretization and solving process, thereby making the process more effective and to find the optimal factors of Multi-grid method. Several numerical experiments with linear models of uniform and nonuniform grids confirm that the proposed algorithm can reduce the computational time very effectively as compared with conventional iterative methods. The best results are obtained with V cycle and S.O.R. with the acceleration factor of 1.3 ~ 1.4 for smoothing.

1. 序 論

有限要素法을 이용하여 실제의 모델을 解析하고자 하는 경우, 일반적으로 解析領域이 넓고 境界形狀이 복잡하므로 信賴性 있는 解를 구하고자 하면

必然的으로 要素數와 節點數가 增加하게 된다. 이때 系行列(System Matrix)의 大形化로 線形 聯立方程式을 푸는데 필요한 컴퓨터 記憶容量의 增加와 컴퓨터 計算時間의 누진적 增加에 따른 經濟性 問題와 얻어진 解의 正確性 與否 등의 問題가 대두된다.

이러한 問題點들은 行列方程式을 푸는 方法과 밀접한 관계가 있는데 行列方程式이 大形化되는 경우, 直接法은 計算時間이 엄청나게 增加하며 또한 計算 誤差가 累進的으로 늘어나고 더우기 필요한 컴퓨터 記憶容量이 크게 增加하므로 부적당하다.¹⁾ 反復法

*正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 碩士課程

**正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 博士課程

†正 會 員 : 檀國大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博

‡正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 教授 · 工博

接受日字 : 1987年 8月 10日

1次修正 : 1987年 12月 15日

2次修正 : 1988年 2月 2日

인 경우는 系行列의 係數 中 0 이 아닌 것만을 記憶시키도 되므로 주어진 界를 解析하는데 필요한 컴퓨터의 記憶容量을 效果的으로 줄일 수 있으나, 線形 聯立方程式에 대한 適當한 初期解를 주는 것이 어렵고 필요한 反復回數가 많아져 計算時間이 크게 增加한다.¹⁾ 따라서 有限要素法의 適用 過程에는 짧은 시간안에 信賴할 수 있는 解를 구할 수 있는 解法이 必要하다.

이와같은 目的으로 多層要素網法(Multi-Grid Method)이 開發되고 있는데, 現在 開發 初期段階에 있기 때문에 아직까지 標準化가 되지 못한 實情이다.

本 研究에서는 이 方法을 電磁場 問題에 適用하여 그 效果를 分析하고 電磁場 問題 解析에 適合한 可變因子들을 決定하는데 그 目的을 두었으며 다른 反復解法과 比較하여 봄으로써 그 有用性을 檢討하였다.

2. 多層要素網法의 理論

一般的인 反復解法을 사용하여 行列方程式을 푸는 경우, 解의 收斂過程을 살펴보면 임의의 初期解에서 始作하여 初期反復에서는 收斂幅이 매우 크나 反復이 進行됨에 따라 그 收斂幅이 점차 減少하는 것을 알 수 있다.^{1), 2)} 이 現象은 反復解法의 특징으로서 解의 誤差 中 高周波 成分은 잘 除去하나 低周波 成分은 잘 除去하기 못하기 때문이다. 이 低周波 成分을 쉽게 除去하려면 보다 성긴 要素網(Coarse grid)에서의 系行列를 이용하여 反復法 또는 直接法을 適用하여 解를 구하면 된다. 이와같이 여러개의 要素網을 利用하여 行列式의 解를 구하는 것을 多層要素網法이라 한다. 多層要素網法의 適用過程을 보면 다음과 같다.²⁾

주어진 領域을 順次的인 M개의 要素網으로 分割하고 이들을 節點數가 작은 순서대로 각각 G^1, G^2, \dots, G^M 라 한다. 또 각 要素網의 要素크기(Element size)를 h_1, h_2, \dots, h_M 이라 할 때, $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_M$ 이 되도록 하며 이때 下位 要素網의 모든 節點들은 上位 要素網의 節點들에 포함되도록 한다.

주어진 領域 Ω 內에서의 支配方程式과 境界 A에서의 境界條件이 演算子 l 과 m 에 의하여 각각

$$\text{영역 } \Omega \text{에서 } lu = f$$

$$\text{경계 A에서 } mu = g$$

f, g : 驅動項인 函數

u : 解析 變數

로 나타내 진다고 하면, 이들을 要素網 $G^k (1 \leq k \leq$

M)에서 離散化하여 線形 聯立方程式

$$L^k U^k = F^k$$

를 얻을 수 있다. 여기서 L^k 는 要素網 G^k 에서의 系行列, F^k 는 驅動項(Forcing Term)인 벡터(Vector)이며, U^k 는 界의 解를 나타내는 벡터이다.

最終目標은 最上位 要素網 G^M 에서의 聯立方程式

$$L^M U^M = F^M \tag{1}$$

을 푸는 것이며, 식 (1)은 적당히 假定된 初期解 U_0^M 에 대하여

$$L^M U_0^M = F^M + f^M \tag{2}$$

로 表現될 수 있다. 여기서 f^M 은 U_0^M 이 식 (1)의 正解가 아니기 때문에 發生하는 項으로서 殘差라고 부른다.

만일, 주어진 支配方程式과 境界條件이 線形이면 식(1)의 正解 U^M 은

$$U^M = U_0^M + V^M \tag{3}$$

으로 주어진다. 여기서 V^M 은 식(2)의 殘差를 驅動項으로 하는 殘差方程式

$$L^M V^M = -f^M \tag{4}$$

의 解이다. 따라서, 식(4)를 풀어서 V^M 을 구하면 식 (3)에 代入하여 正解 U^M 을 구할 수 있다.

그런데, 一般的으로 殘差方程式(4)를 푸는 일은 식(1)을 푸는 것과 같은 정도의 計算勞力을 要하므로 식(4)를 節點數가 적은 下位 要素網 G^{M-1} 에서

$$L^{M-1} V^{M-1} = -f^{M-1} \tag{5}$$

으로 變換하여 V^{M-1} 를 구한다.²⁾ 여기서, f^{M-1} 은 식 (4)의 f^M 을 要素網 G^{M-1} 에 맞추어 變形한 것이며 이 과정을 減縮變換(Restriction)이라 한다.²⁾ 그리고 식(5)에서 구한 V^{M-1} 으로부터 적절한 內插法(Interpolation)을 利用하여 V^M 을 구하게 되는데 이 과정을 擴張變換(Prolongation)이라 한다.²⁾

以上的 두 過程을 殘差矯正(Defect Correction)이라고 하며, 이와같이 두 개의 要素網으로 殘差方程式을 풀어 주어진 界의 解를 구하는 方法을 二層要素網法(Two-Grid Method)이라 한다.²⁾ 그런데 要素網 G^{M-1} 의 節點數가 많으면 식(5)를 푸는 것도 한 어려워지므로 식(5)를 풀기 위하여 要素網 G^{M-1} 과 G^{M-2} 에 대하여 二層要素網法을 適用할 수 있으며, 이와같은 과정을 反復하면 결국은 G^1, G^2, \dots, G^M 을 오가면서 주어진 界를 풀게 되는데 이러한 方

法을 多層要素網法(Multi-Grid Method)이라고 한다.³⁾ 한편, 初期解 U_0^m 을 잘 設定하기 위하여, 또한 減縮變換과 擴張變換하는 과정에서 發生하는 誤차를 줄이기 위하여 數回의 反復解를 구하는데, 이들을 각각 프리스밍(Pre-smoothing), 포스트스밍(Post Smoothing)이라고 한다.^{3), 4)}

이 때 필요한 要素網의 갯수 M은 減縮變換과 擴張變換하는 과정에서 發生하는 誤차를 考慮하여 3 또는 4 개가 적당하며³⁾, 스밍 과정에는 既存의 反復解法들을 사용한다.

要素網의 갯수가 3인 경우의 遂行過程은 그림 1과 같으며, 이러한 過程을 1MG사이클이라고 놓는다. 여기서, "P"는 프리스밍, "O"는 포스트스밍, "↘"는 減縮變換을 "↗"는 擴張變換을 나타내며 "X"는 直接法에 의한 行列方程式 풀이를 뜻한다. 그림 1의 a)와 같이 1회의 MG사이클에서 1회의 殘差矯正을 하는 경우를 V사이클이라고 하고, b)와 같이 2회의 殘差矯正을 하는 경우를 W사이클이라고 한다.

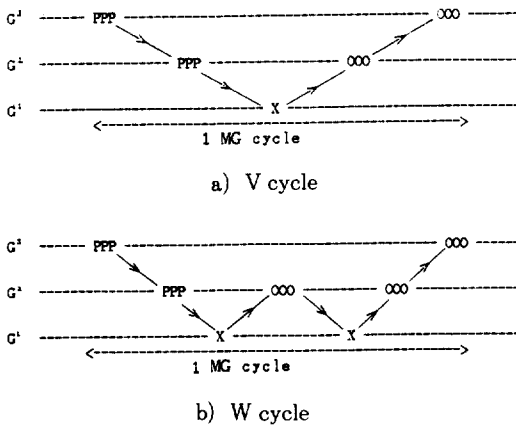


그림 1. 3층 요소망인 경우의 1MG 사이클의 수행과정

Fig. 1. One multi-grid cycle for three level grids.

3. 事例研究

本 알고리즘을 몇가지 모델에 適用하여 스밍 방법과 回數, 減縮變換, 그리고 擴張變換에 대한 最適의 因子들을 찾고 그 效果를 既存의 方法과 比較하여 보았다. 모든 경우에서 比較한 Error Norm 은

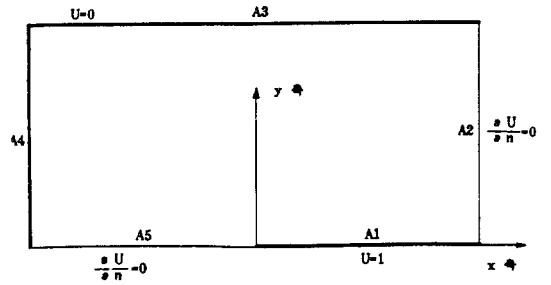


그림 2. 모델 1의 해석영역과 경계조건

Fig. 2. The analysis region and boundary condition for Model 1.

$$e = \sum_{i=1}^N R_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N L_{ij} U_j - F_i \right)^2 \quad (6)$$

으로 定義하였다. 여기서, R_i 는 殘差이며, L_{ij} 는 行列의 i 행 j 列의 係數, U_j 는 j 번 節點에서의 解, F_i 는 i 번째 驅動項이고, N 은 전체 節點數이다.

本 論文에서 프리스밍의 反復回數는 前回 反復時의 Error-Norm과 現常態의 Error Norm의 比率를 구하여 그 값이 0.5 이상일 때 까지로 하였으며, 포스트스밍에 대하여도 같은 方法을 사용하였다. 또한, 減縮變換은 上位 要素網의 殘差中 下位 要素網에 포함된 節點에 해당하는 것만을 택하여 구성하였고 擴張變換은 線形 內插法(Linear Interpolation)을 利用하여 구성하였다.

1) 모델 1

單純한 形狀의 二次元 靜磁場 問題를 選擇하여 多層要素網法을 適用하여 보았다. 적용 모델의 解析領域은 그림 2와 같으며, 支配方程式과 境界條件은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{영역 } \Omega \text{에서 } \nabla^2 U(x, y) &= 0 \\ \text{경계 } A_1 \text{에서 } U(x, y) &= 1 \\ \text{경계 } A_3, A_4 \text{에서 } U(x, y) &= 0 \\ \text{경계 } A_2, A_5 \text{에서 } \frac{\partial U}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

本 界를 풀기 위한 要素網은 그림 3과 같은 均一 要素網이며 G^1, G^2, G^3 는 要素數가 각각 16, 64, 256개이고, 節點數는 각각 15, 45, 153개였다.

모든 경우에서 初期解는 要素網 G^1 에서 直接法으로 구한 解를 補間하고 要素網 G^2 의 初期解로 사용하여 二層要素網法으로 풀고 얻어진 解를 補間하여 要素網 G^3 에서의 初期解로 사용하였다.

스밍을 위하여 既存의 反復法을 適用해본 결과

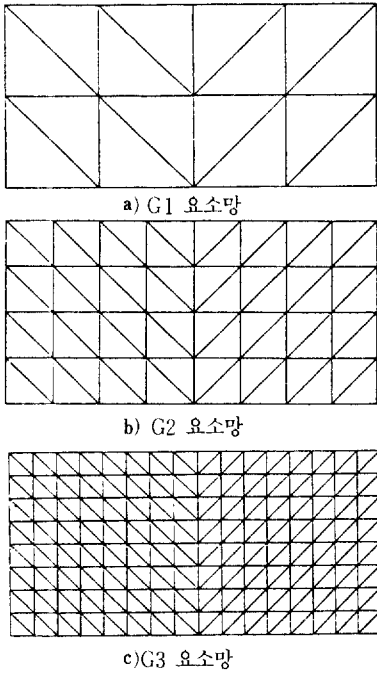


그림 3. 모델 1의 3 단계 요소망

Fig. 3. The three level grids for Model 1.

Gauss-Seidel法과 低加速 因子의 S. O. R (Successive over Relaxation)法이 가능하였다.

그림 4 와 그림 5 는 多層要素網法에 利用되는 反復解法으로 S. O. R.法을 쓸 때 最適의 加速因子를 찾기 위한 것으로 加速因子가 1.4 近傍일때가 最適임을 알 수 있다.

V사이클과 W사이클의 경우를 比較해 보면 本 모델의 경우 V사이클이 有利함을 알 수 있다. 그 이유는 G^2 의 節點數가 많지 않으므로 殘差 方程式이 빨리 수렴하므로 W사이클에서 殘差修正을 다시 할 필요가 없기 때문이다. 그림 6 은 多層要素網法과 既存의 反復法들 間의 計算時間을 比較한 것이다. 多層要素網法의 경우 V사이클 및 W사이클 모두가 既存의 方法보다 수렴속도가 빨랐는데, V사이클의 경우 既存方法보다 3 배 정도의 수렴속도를 나타내고 있다.

2) 모델 2

그림 7 과 같이 주어지는 單相 外鐵型 變壓器를 選擇하고 勵磁源으로서 直流 電流를 흘리는 경우, 磁束分布의 對稱性을 考慮하여 第一象限에 해당하는 領域을 擇하여 적용하였다.

境界條件으로는 y 축과 $x=20$ 및 $y=20$ (cm) 축에

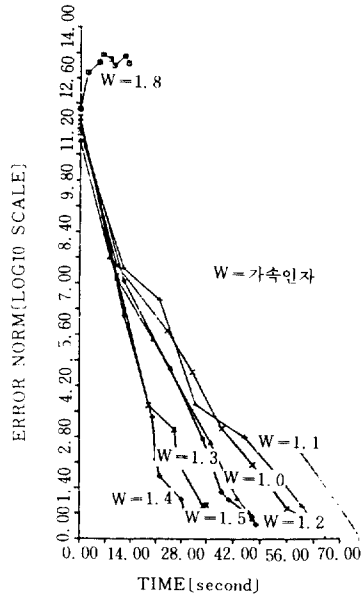


그림 4. 모델 1에서의 가속인자 변화에 따른 수렴결과 의 비교 (Vcycle)

Fig. 4. A Comparison of convergency with various acceleration factors for V cycle on Model 1 by Multi-grid Method.

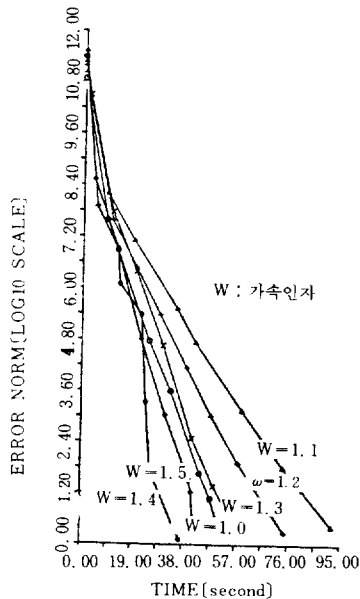


그림 5. 모델 1에서의 가속인자 변화에 따른 수렴결과 의 비교2. (W cycle)

Fig. 5. A comparison of convergency with various acceleration factors for W cycle on Model 1 by Multi-grid Method.

Dirichlet 境界條件을 주었으며 x축상에 Neumann 境界條件을 주었다. 그리고 電流密度는 0.225×10^8 (A/m^2) 이고, 鐵心の 比透磁率이 3,000인 경우의 靜磁場分布를 解析하였다.

주어진 모델을 解析하기 위한 要素網은 그림 8 에 나타내었고, G_1^1 , G_2^2 , G_3^3 는 각각 要素數 74, 296, 1184개, 節點數 45, 163, 621개로 구성된 非均一要素網이다.

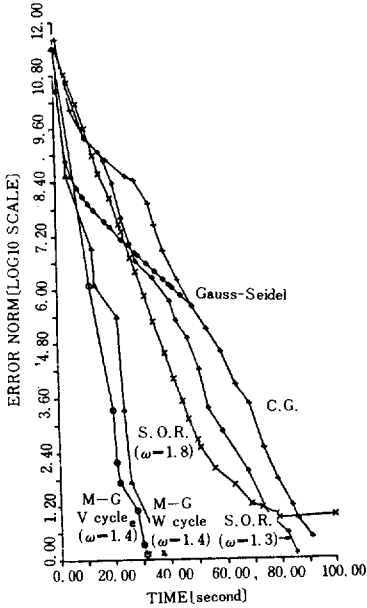


그림 6. 다중요소망법과 각 반복해법들 간의 계산시간 비교 1.

Fig. 6. A comparison of computing time between the Multi-grid Method and other iteration methods on the Model 1.

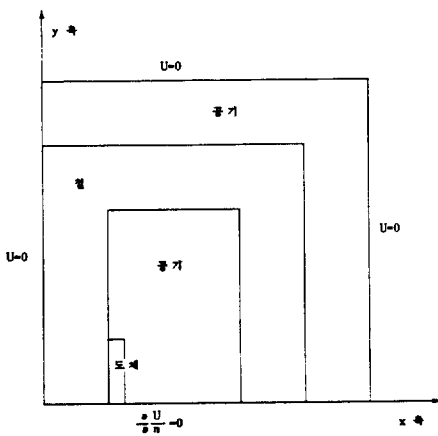
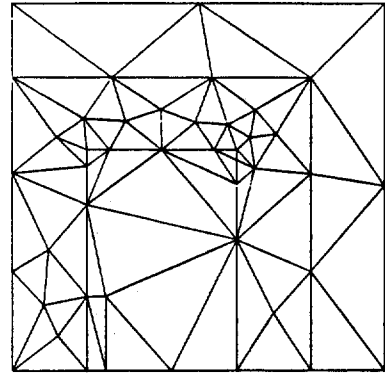
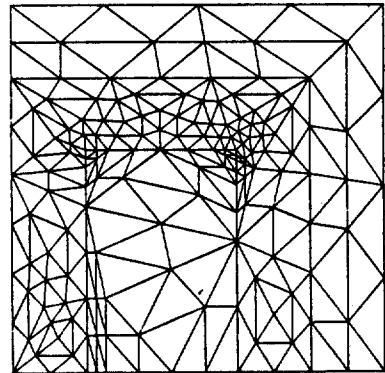


그림 7. 모델 2의 해석영역과 경계조건

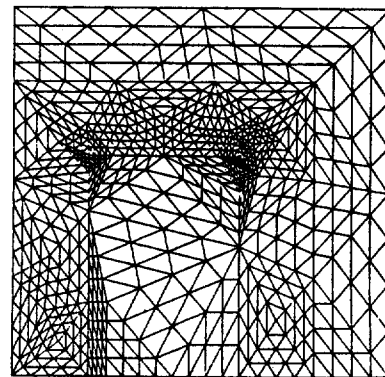
Fig. 7. The analysis region and Boundary condition of Model 2.



a) G1 요소망



b) G2 요소망



c) G3 요소망

그림 8. 모델 2의 3단계 요소망

Fig. 8. The three level grids for Model 2.

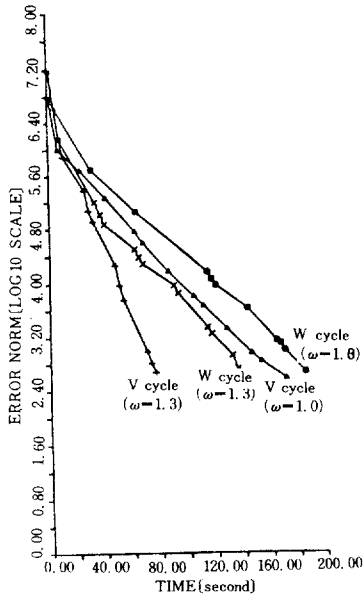


그림 9. 모델 2에서의 가속인자 변화에 따른 수렴결과와의 비교

Fig. 9. A comparison of convergency with various acceleration factors on Model 2 by Multi-grid Method

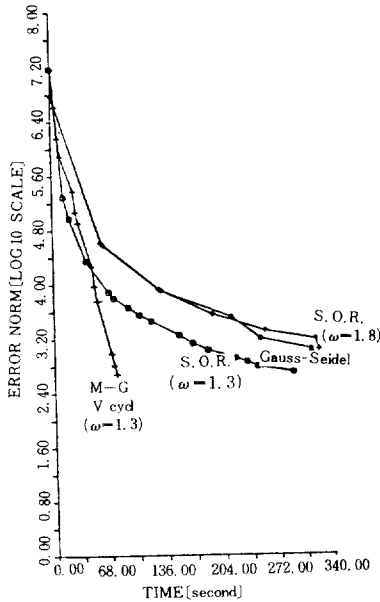


그림 10. 다중요소망법과 각 반복해법들 간의 계산시간 비교 2.

Fig. 10. A comparison of computing time between the Multi-grid Method and other iteration methods on the Model 2.

다중요소망법을 이용한 전자기장 수치해소에 관한 연구

표 1. 컴퓨터 기억용량 비교

Table 1. A comparison of required computer Memory

(단위 : Kbyte)

	반복법	다중요소망법
모델 1	6.2	8.5
모델 2	24.8	32

本 모델에서도 初期解는 모델 1과 同一한 方法을 擇하였고, 스무싱을 위한 反復法 역시 모델 1에서와 같이 Gauss-Seidel法과 S. O. R法이 좋음을 확인 하였다.

本 모델을 V 및 W 사이클에서 여러 加速因子에 대하여 수렴특성을 計算한 결과 두 경우 모두 加速因子가 1.3 부근에서 가장 좋은 결과를 보였다. 그림 9는 그중 加速因子가 1.0 및 1.3일때의 특성을 보여준다. V 사이클과 W 사이클을 比較해 보면 이 경우에도 V 사이클이 더 有利함을 알 수 있는데, 그 이유는 媒質 및 要素網이 非均一하기 때문에 擴張 變換하는 과정에서 誤差가 크게 發生하기 때문이다.

그림 10은 多層要素網法과 他 反復解法의 計算時間을 比較한 것으로 20% 정도의 計算時間으로도 滿足할 만한 解를 구할 수 있었다.

表 1에 本 論文에 適用된 모델들에 대하여 一般 反復法과 多層要素網法에서 系行列을 形成하기 위하여 필요한 컴퓨터 記憶용량을 나타내었다. 多層要素網法은 既存의 反復法에 比하여 記憶용량이 약 25% 밖에 더 필요로 하고 있지 않음을 알 수 있다.

4. 結 論

本 研究에서는 電磁場 問題의 有限要素法에 多層要素網法을 새로이 導入하여 既存의 線形 聯立方程式의 反復法을 適用한 경우보다 計算時間을 대폭 줄일 수 있음을 보였으며, 그 정도는 節點數가 증가할수록 더욱 크게 나타나고 있음을 확인하였다. 이 方法은 領域內에 異媒質들이 存在하는 경우에도 適用될 수 있음을 보였다. 컴퓨터 記憶용량도 既存의 反復法에 比하여 조금 밖에 증가하지 않기 때문에 이 分野 應用에 實效性이 있음을 알았다.

電氣工學問題에 多層要素網法을 쓰는 경우 最適의 因子들을 찾아 본 결과 스무싱을 위하여는 加速因子 1.3~1.4近傍의 S. O. R. 法이 가장 좋았고, W 사이클 보다는 1 MG 사이클 當 計算時間이 적은

V사이클이 더 有利한 것으로 나타났다.

그러나, 또다른 중요한 過程인 減縮變換과 擴張變換에 대하여는 本論文에서 사용한 方法이 最適인 것이 아니었음을 밝혀두며, 이에 관한 연구가 거의 없는 實情임을 考慮할 때 더욱 研究가 遂行되어야 할 것으로 보인다.^{5), 7)}

이러한 理論은 특히 適應要素分割法(Adaptive-Mesh Generation technique)과 混合하여 使用될 경우, 下位 要素網이 이미 形成되어 있기 때문에 매우 能率적인 解析技法이 될 것으로 보인다.

참 고 문 헌

- (1) A. Brandit, "Multi-level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems" *Math. Comp.*, V. 31, 1977, pp. 333~390.
- (2) Wolfgang Hackbusch, 'Multi-Grid Methods and Applications' Springer Series in Computational Math. 4.

- (3) O. Axelsson and V.A. Barker, 'Finite Element Solution of Boundary Value Problems' 1984, Academic Press.
- (4) Graham F. Carey and J. Tinsley Oden, 'Finite Elements, Computational Aspects, Vol. III'. 1984, Prentice Hall.
- (5) Arthur S. Shieh, "On the solution of Coupled Systems of PDE by a Multi-Grid Method" *IEEE, Trans. on CAD*, Vol. CAD-4, No. 4 October, 1985.
- (6) Randolph E. Bank and Donald J. Rose, "Analysis of a multi-level iterative method for Nonlinear Finite Element Equations", *Math. Comp.*, Vol. 39, No. 160, October, 1982, pp. 452-465
- (7) R.A. Nicolains "On Some Theoretical and Practical Aspects of Multi-Grid Methods" *Math. Comp.*, Vol. 33, No. 147, July 1979, pp. 933~952