

스펙트럼 추정을 위한 근사 과결정 방식

Approximate Overdetermined Method for Spectral Estimation

李 哲 熙* · 鄭 讚 壽** · 梁 興 錫***

(Chul-Heui Lee · Chan-Soo Chung · Heung-Suk Yang)

요 약

데이터의 수가 적거나 협대역 신호의 경우에 고해상도의 스펙트럼 추정이 가능한 근사과결정방식 (Approximate Overdetermined Method) 을 제시하였다. 그리고 이로부터 새로운 순환 AR계수추정 알고리즘을 고속알고리즘 (Fast Algorithm) 의 형태로 유도하였다.

또한 ARMA 스펙트럼 추정을 위하여, 제안된 알고리즘을 이용하여 변형 Yule-Walker 방정식에 의해 먼저 AR계수를 구한 뒤, MA부는 MA계수대신 분자 스펙트럼 (Numerator Spectrum ; NS) 계수를 추정하여 이로부터 스펙트럼을 구하도록 하였다.

Abstract-The approximate overdetermined method is proposed for high resolution spectral estimation in case of short data record length or narrow band signal. And a new recursive AR parameter estimation is derived in the form of fast algorithm. For ARMA spectral estimation, two stage procedure is used in estimating ARMA parameters. First AR parameters are estimated by using the modified Yule-Walker equations, and then MA parameters are implicitly estimated by estimating numerator spectral(NS) coefficients.

1. 서 론

신호의 파워스펙트럼 추정에 있어 데이터 수가 제한되며, 또한 적은 경우가 많다. 이러한 경우 FFT에 근거한 비계수적 추정방식들이 갖는 단점을 개선하여 고해상도의 스펙트럼 추정치를 얻고자 근래에는 신호의 시계열 모형화에 의한 계수적 추정방식들이 많이 연구되었다.^{1)~6)}

고해상도의 획득은 협대역 신호의 경우에도 특히 요구되는 것으로서 적합한 모델의 선정과 정확도가 높은 계수추정방식의 사용으로 해결해야 한다.

적합한 모델의 선정에 있어서는 일반적으로 신호 및 잡음의 특성을 고려할 때 ARMA모델의 경우가 AR모델보다 높은 해상도를 보이거나 계수추정과정 이 복잡하다. ARMA계수의 온 라인 추정을 위하여 ARMA모델을 2 채널 AR모델로 변환한 뒤 확장 최소자승법 (Extended Least Squares Method; ELS) 또는 확장 기구변수법 (Extended Instrumental Variable Method; EIV) 등을 사용하여 추정하는 방식들이 제안되었으나 bootstrapping 과정의 도입 및 행렬연산으로 인해 상당한 계산량의 증가가 생긴다. 따라서 계산량에 있어 보다 효과적인 방식으로 순차적으로 AR계수를 먼저 추정한 뒤 MA부의 분자 스펙트럼 (Numerator Spectrum ; NS) 계수를 추정하는 2 단계 추정기법들이 연구되었다.^{2)~4)}

계수 추정의 정확도를 높이기 위한 한 방법으로 과결정 방식 (Overdetermined Method) 이 연구되었는데 이는 계수적 추정방식에서의 계수추정이 결국

*正會員: 서울대 大學院 電氣工學科 博士課程

**正會員: 崇實大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博

***正會員: 서울대 工大 電氣工學科 教授 · 工博

接受日字: 1987年 11月 14日

1次修正: 1987年 2月 16日

2次修正: 1981年 4月 1日

상관(Correlation) 함수 정보에 근거하는 것이므로 보다 많은 상관함수 정보를 이용하면 추정의 정확도를 높일 수 있으리라 생각하여 Yule-Walker 방정식의 수를 모델 차수보다도 크게하여 계수를 추정하는 방식이다. 이 경우도 계산량이 상당히 증가하며 순환 알고리즘의 구현이 까다로와 과결정순환기구 변수법(Overdetermined Recursive Instrumental Variable Method; ORIV) 등이 제안되어 있는 정도이다.^{5)~6)}

본 논문에서는 고해상도 파워스펙트럼 추정을 위해 전치 윈도우형(Prewindowed type) 데이터집합의 경우에 대해 과결정방식을 적용하되 실시간 응용이 가능하도록 계산량에 있어서 효과적인 순환 알고리즘을 구현하였다. 이를 위하여 데이터 행렬을 변형시켜 상관함수 행렬이 유사(near) Toeplitz 구조가 되어 서차의 변위차수(Displacement rank)를 갖도록 하여 고속순환 AR계수추정 알고리즘을 유도하였다. 또한 ARMA 스펙트럼 추정을 위하여 변형 Yule-Walker(Modified Yule-Walker) 방정식을 이용하여 제안된 AR계수 추정 알고리즘으로 AR계수를 추정한 뒤 그 예측오차를 이용하여 MA부의 NS계수를 추정하여 이로부터 파워 스펙트럼을 추정하는 순환 알고리즘을 제시하였다.

2. 근사 과결정방식 AR계수 추정

신호를 다음과 같이 AR(p) 모델로 모형화한다고 하자.

$$y(t) = - \sum_{i=1}^p a_i y(t-i) + w(t) \quad (1)$$

여기서 $w(i)$ 는 $\sim N(0, 1)$ 인 백색 잡음이다. 식(1)의 양변에 $y(t-k)$ 를 곱하여 기대값을 취하면 아래의 Yule-Walker 방정식이 얻어진다.

$$r(k) + \sum_{i=1}^p a_i r(k-i) = 0 \quad k > 0 \quad (2)$$

여기서 $\{r(i)\}$ 는 $\{y(i)\}$ 의 상관함수이며 식(2)를 $l(\geq p)$ 개 취하여 행렬꼴로 표현하면

$$\begin{bmatrix} r(1) \\ \vdots \\ r(l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r(0) & \cdots & r(-p+1) \\ \vdots & & \vdots \\ r(l-1) & \cdots & r(l-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (3. a)$$

$$\underline{r}_o + R_o \underline{a} = \underline{0} \quad (3. b)$$

따라서 식(3. b)로부터 AR계수 \underline{a} 를 계산할 수 있

다. 그러나 대부분의 경우 상관함수 $\{r(i)\}$ 의 참값은 미지이므로 데이터로부터 추정치를 계산하게 된다. 전치 윈도우형 데이터집합($y(i) = 0, i \leq 0$)일 때는 데이터의 수가 N이면 식(3. b)의 벡터 \underline{r}_o 와 행렬 R_o 은 다음과 같이 주어진다.

$$\underline{r}_o(N) = Y^T(N) \underline{s}(N) \quad (4)$$

$$R_o(N) = Y^T(N) X(N) \quad (5)$$

여기서

$$\underline{s}(N) = [y(1) \cdots y(N)]^T \quad (N \times 1)$$

$$X(N) = [\underline{x}(1) \cdots \underline{x}(N)]^T \quad (N \times p)$$

$$\underline{x}(i) = [y(i-1) \cdots y(i-p)]^T \quad (p \times 1)$$

$$Y(N) = [\underline{y}(1) \cdots \underline{y}(N)]^T \quad (N \times l)$$

$$\underline{y}(i) = [y(i-1) \cdots y(i-l)]^T \quad (l \times 1)$$

그리고 보통 많이 사용되는 $l=p$, 즉 방정식의 수와 모델의 차수가 같은 최소방식(Minimal Method)의 경우 AR계수 추정자(AR parameter estimator)는 아래의 식(6)으로 주어지며, 상관함수 행렬 $R(N)$ 이 유사 Toeplitz 구조이고 변위차수가 3 이므로 고속 순환 알고리즘으로 구현할 수 있다.^{7)~8)}

$$\hat{\underline{a}}(N) = -R_o^{-1}(N) \underline{r}_o(N) \quad (6)$$

그런데 현대적 신호 등과 같이 고해상도가 특히 요구되는 경우에는 성능이 만족스럽지 못할 수 있으므로, 보다 많은 상관함수 정보를 사용하여 계수 추정의 정확도를 높여주는 과결정방식을 사용할 필요가 있다. 과결정방식에서는 $l=M(>p)$, 즉 모델 차수보다도 많은 수의 방정식을 이용하여 AR 계수를 추정하게 되며, 보통 $M=2p \sim 3p$ 정도인 경우가 많다.^{5)~6)} 이 때 상관함수 행렬 $R_o(N)$ 은 정방행렬이 아니므로 AR계수 추정자는 최소자승법에 의거하여 식(7)처럼 된다.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{a}}(N) &= -[R_o^T(N) R_o(N)]^{-1} R_o^T(N) \underline{r}_o(N) \quad R_o \\ &= -[Z^T(N) X(N)]^{-1} Z^T(N) \underline{s}(N) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $Z(N) \triangleq Y(N) Y^T(N) X(N)$

식(7)의 과결정방식 AR계수 추정자는 순환 알고리즘의 구현이 까다로우며 행렬 $Z^T(N) X(N)$ 의 변위차수가 커서($\approx 3^2$) 이동불변특성(shift invariance property)을 이용하여 고속 알고리즘을 구현하기는 힘들다. 이런 문제를 해결하기 위하여 행렬 $Z(N)$ 을 아래와 같이 정의된 행렬 $\hat{Z}(N)$ 으로 근사화하여 대체해 보자.

$$\hat{Z}(N) \triangleq [\underline{z}(1) \cdots \underline{z}(N)]^T$$

여기서

$$\begin{aligned} \underline{z}(i) &\triangleq [z(i-1) \cdots \cdots z(i-p)]^T \quad (px1) \\ z(i) &\triangleq [0 \cdots 0 \quad 1] Y(i+1) Y^T(i+1) \underline{s}(i) \quad (8) \\ \underline{s}(i) &\triangleq [0 \quad y(1) \cdots \cdots y(i)]^T \quad ((i+1) \times 1) \end{aligned}$$

행렬 $\bar{Z}(N)$ 의 요소(element)인 $z(i)$ 는, 행렬 $Z(N)$ 의 k , 1 번째 요소를 $Z_{k,1}(N)$ 으로 표시한다면 식(8)로부터 $z(i) = Z_{i,1,1}(i+1)$ 이 되므로, 시간 $i+1$ 순간에 있어서 $Z_{i,1,1}(i+1)$ 의 best estimate이다. 그런데 $\bar{Z}(N)$ 에서는 순환 알고리즘의 구현이 용이하도록 $z(i)$ 가 시간 $t > i+1$ 에는 update되지 않는다는 점이 $Z(N)$ 과 다르며, 이러한 근사화는 시간 $t > i+1$ 일 때 원래의 과결정 방식에서처럼 $Z_{i,1,1}(i+1) (=z(i))$ 으로 시작되는 대각방향의 요소들에 시간 $i+1$ 에서 t 까지의 매 순환스텝마다 새로운 데이터들에 의한 정확한 보정이 수행될 경우(즉 $Z(N)$ 을 사용한 순환 계산의 경우) 위에서 지적한 바와 같이 순환 알고리즘의 구현이 까다로우며, 과도한 계산량의 증가가 생기는 것을 해결하기 위한 것이다. 이 경우 $z(i)$ 는 해당 스텝에서 계산된 이후엔 그 값이 바뀌지 않으므로 $y(i)$ 와 함께 계수추정자에 사용되는 또 하나의 데이터처럼 취급될 수 있다. $\bar{Z}(N)$ 을 사용할 경우 AR계수 추정자는 식(9)로 된다.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{a}}(N) &= -[\bar{Z}^T(N) X(N)]^{-1} \bar{Z}^T(N) \underline{s}(N) \\ &= -R^{-1}(N) \underline{r}(N) \quad (9) \end{aligned}$$

이때 식(9)로 주어지는 계수추정자는 데이터행렬 $X(N)$ 에 대해 기구변수 행렬을 $\bar{Z}(N)$ 으로 하여 기구변수법을 적용하여 얻어지는 것과 동일하다. 따라서 식(9)는 기존의 순환 기구변수법처럼 쉽게 순환 알고리즘으로 구현할 수 있으며, 또 행렬 $R(N)$ 의 변위차수가 3이므로 고속순환 알고리즘의 구현도 용이하다. 그런데 순환 알고리즘으로 구현하기 위해서는 우선 식(8)의 $\{z(i)\}$ 의 순환계산이 필요하다. 식(8)에서 $z(i)$ 는 열벡터 $[0 \cdots 01] Y(i+1)$ 과 행벡터 $Y^T(i+1) \underline{s}(i)$ 의 곱이므로 벡터 $\underline{h}(i)$ 를 식(10)으로 정의하면 $z(i)$ 는 식(10)과 식(11)으로써 계산된다.

$$\begin{aligned} \underline{h}(i) &= Y^T(i+1) \underline{s}(i) \\ &= \underline{h}(i-1) + y(i) \underline{y}(i+1) \quad (10) \end{aligned}$$

$$z(i) = \underline{h}^T(i) \underline{y}(i+1) \quad (11)$$

따라서 식(9)의 근사 과결정(Approximate Overdetermined) AR 계수 추정자를 순환 알고리즘으로 구현하면 다음과 같다.

$$\hat{\underline{a}}(t) = \hat{\underline{a}}(t-1) - K(t) [y(t) + \underline{x}^T(t) \hat{\underline{a}}(t-1)] \quad (12)$$

$$K(t) = P(t-1) \underline{z}(t) / [1 + \underline{x}^T(t) P(t-1) \underline{z}(t)] \quad (13)$$

$$P(t) \triangleq R^{-1}(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1) \underline{z}(t) \underline{z}^T(t) P(t-1)}{1 + \underline{x}^T(t) P(t-1) \underline{z}(t)} \quad (14)$$

3. 고속순환 근사 과결정 AR계수 추정

앞절에 제시된 순환 근사 과결정 AR계수 추정 알고리즘은 매 스텝마다 $0(p^2)$ 의 계산량이 필요하므로 실시간 응용에 보다 적합하게 계산량이 $0(p)$ 인 고속 알고리즘으로 구현할 필요성이 있다. 고속 알고리즘은 상관함수 행렬 $R(t)$ 가 Toeplitz 또는 유사 Toeplitz 구조일 때 이동불변특성을 이용한 Levinson 알고리즘의 확장형태로 차수 순환식 관계로부터 시간순환식 관계를 이끌어낸 것이다.⁷⁻⁹⁾

신호를 식(1)로 모형화할 경우 전향 선형예측자(Forward Linear Predictor; FLP)와 후향 선형예측자(Backward Linear Predictor; BLP)는 아래와 같다.

$$\text{FLP} : \hat{y}(t) = - \sum_{i=1}^p \hat{a}_i y(t-i) \quad (15)$$

$$\text{BLP} : \hat{y}(t-p) = - \sum_{i=1}^p \hat{d}_i y(t+1-i) \quad (16)$$

또한 사전(a priori) 전향 및 우향 예측오차 $e_f(t)$ 와 $e_b(t)$ 는 식(17)과 식(18)로 된다.

$$e_f(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) + \underline{x}^T(t) \hat{\underline{a}}(t-1) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} e_b(t) &= y(t-p) - \hat{y}(t-p) \\ &= y(t-p) + \underline{x}^T(t+1) \hat{\underline{d}}(t-1) \quad (18) \end{aligned}$$

식(13)의 벡터 $K(t)$ 를 다시 쓰면 식(19)로 되며 이 $K(t)$ 를 고속 Kalman 이득이라고 하는데 고속 알고리즘은 이 고속 Kalman 이득을 적은 계산량으로 효과적으로 순환 계산하고자 하는 것이다.

$$K(t) = R(t) \underline{z}(t) \quad (19)$$

따라서,

$$R(t) K(t) = \underline{z}(t) \quad (20)$$

모델 차수를 p 에서 $p+1$ 로 늘릴 때의 상관함수 행렬을 $\bar{R}(t)$, 고속 Kalman 이득을 $\bar{K}(t)$ 라고 하면

$$\bar{R}(t) \bar{K}(t) = \bar{z}(t) \quad (21)$$

여기서

$$\bar{R}(t) \triangleq \sum_{i=1}^t \bar{z}(i) \bar{x}^T(i) \quad (22)$$

$$\bar{z}(i) \triangleq [z(i) \quad z^T(i)]^T = [z^T(i+1) \quad z(i-p)]^T$$

$$\bar{x}(i) \triangleq [y(i) \quad x^T(i)]^T = [x^T(i+1) \quad y(i-p)]^T$$

식(22)의 $\bar{R}(t)$ 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{R}(t) = \begin{bmatrix} r_f^o(t) & \vdots & r_f^T(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{r}_f(t) & \vdots & R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t+1) & \bar{x}_b(t) \\ \dots & \dots \\ \bar{r}_b^T(t) & \vdots & r_b^o(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서,

$$r_f^o(t) = \sum_{i=1}^t z(i) y(i) \quad r_b^o(t) = \sum_{i=1}^t z(i-p) y(i-p)$$

$$\bar{r}_f(t) = \sum_{i=1}^t y(i) z(i) \quad \bar{x}_b(t) = \sum_{i=1}^t y(i-p) z(i+1)$$

$$\bar{r}_f(t) = \sum_{i=1}^t z(i) x(i) = \bar{r}_f(t-1) + z(t) x(t) \quad (24)$$

$$\bar{r}_b(t) = \sum_{i=1}^t z(i-p) x(i+1)$$

그런데 $\bar{R}(t)$ 와 $K(t)$ 및 $K(t+1)$ 의 관계는 아래와 같다.

$$\bar{R}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \bar{z}(t) - \begin{bmatrix} e_z(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\bar{R}(t) \begin{bmatrix} K(t+1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t+1) \\ \beta(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서

$$\alpha(t) \triangleq \bar{r}_f^T(t) K(t) \quad (27)$$

$$e_z(t) \triangleq z(t) - \alpha(t)$$

$$\beta(t) \triangleq \bar{r}_b^T(t) K(t+1) \quad (28)$$

또한 $\bar{R}(t)$ 와 $\hat{a}(t)$ 및 $\hat{d}(t)$ 의 관계는 아래와 같다.

$$\bar{R}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\bar{R}(t) \begin{bmatrix} \hat{d}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_b(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

여기서 $E_f(t) = r_f^o(t) + \bar{r}_f^T(t) \hat{a}(t)$
 $E_b(t) = r_b^o(t) + \bar{r}_b^T(t) \hat{d}(t)$

따라서 식(21), 식(25)와 식(29)로부터

$$\bar{K}(t) = \begin{bmatrix} e_z(t) E_f^{-1}(t) \\ K(t) - \hat{a}(t) e_z(t) E_f^{-1}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} k_p(t) \\ k_s(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (p \times 1) \\ (1 \times 1) \end{bmatrix}$$

또한 식(21), 식(30)과 식(31)로부터

$$\bar{R}(t) \left[\bar{K}(t) - \begin{bmatrix} \hat{d}(t) \\ 1 \end{bmatrix} k_s(t) \right] = \bar{z}(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ E_b(t) k_s(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

따라서 식(26)과 식(32)로부터

$$K(t+1) = k_v(t) - \hat{d}(t) k_s(t) \quad (33)$$

그런데 식(33)으로 고속 Kalman 이득을 time-update 하려면 관련된 변수들도 time-update 해야 한다. $\bar{R}(t)$ 를 다시 쓰면

$$\bar{R}(t) = \bar{R}(t-1) + \bar{z}(t) \bar{x}^T(t) \quad (34)$$

식(25), 식(29)와 식(34)로부터

$$\bar{R}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}(t-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ K(t) \end{bmatrix} e_f(t) = \begin{bmatrix} E_f(t-1) + e_z(t) e_f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

따라서 식(29)와 식(35)로부터

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(t-1) - K(t) e_f(t) \quad (36)$$

$$E_f(t) = E_f(t-1) + e_z(t) e_f(t) \quad (37)$$

또한 식(21), 식(30)과 식(34)로부터

$$\bar{R}(t) \begin{bmatrix} \hat{d}(t-1) \\ 1 \end{bmatrix} - \bar{K}(t) e_b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ E_b(t-1) \end{bmatrix} \quad (38)$$

따라서 식(30)과 식(38)로부터

$$\hat{d}(t) = \frac{\hat{d}(t-1) - k_v(t) e_b(t)}{1 - k_s(t) e_b(t)} \quad (39)$$

이상의 결과를 정리하면 고속 순환 근사 과결정 (Fast Approximate OverDetermined; FAOD) AR 계수 추정 알고리즘은 표 1과 같다. 초기조건은 일반적인 최소방식의 고속 알고리즘들과 동일하다.⁷⁻⁸⁾ 표 2에 고속 최소방식(Fast Minimal Method; FMM)과 과결정 순환기구변수법(ORIV) 및 제한된 방식(FAOD)의 매 순환스텝 당 승산 수를 비교하였다. FAOD는 ORIV에 비해 계산량이 현저히 적으며 FMM보다 그리 많지 않으므로 실시간 응용에 보다 적합함을 알 수 있다.

AR 계수가 추정되면 신호의 파워스펙트럼은 추정된 AR 계수를 이용하여 다음과 같이 계산된다. 스

$$\hat{S}_y(\omega) = \frac{1}{\hat{A}(z) \hat{A}^*(z^{-1})} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (40)$$

표 1. 고속 순환 근사 과결정 AR계수 추정 알고리즘

Table.1. Fast approximate overdetermined AR parameters estimation algorithm (FAOD)

계산할 변수	사 용 식
$z(t)$	(10), (11)
$e_r(t)$	(17)
$\hat{a}(t)$	(36)
$r_r(t)$	(24)
$e_z(t)$	(27), (28)
$E_r(t)$	(37)
$\bar{K}(t)$	(31)
$e_b(t)$	(18)
$\hat{d}(t)$	(39)
$K(t+1)$	(33)

표 2. 매순환시스템 당 승산 수의 비교

Table.2. Comparison of the number of Multiplications and Devisions Per Recursion (MADPR)

고속 순환 근사 과결정 방식	$9p+2M+3$
과결정 순환 기구 변수법	$6p^2+2pM+12p+3M+6$
고속 최소 방식	$8p+3$

여기서 $\hat{A}(z) = 1 + \hat{a}_1 z + \dots + \hat{a}_p z^p$

4. ARMA 스펙트럼 추정

일반적으로 신호 및 잡음의 특성을 고려할 때 ARMA모델의 경우가 보다 높은 해상도를 보이므로 ARMA모델을 이용하여 스펙트럼 추정을 하는 것이 좋은 경우가 많으나 bootstrapping 과정을 사용하는 알고리즘의 경우 계산량이 상당히 증가하여 실시간 응용에 부적합한 경우가 많다. 이러한 난점을 피하기 위하여 변형 Yule-Walker방정식을 사용하여 먼저 AR계수를 추정한 뒤 MA부는 분자스펙트럼(NS)계수를 추정하는 방식들이 연구되었으며, 특히 최근에는 NS계수의 순환 추정 알고리즘도 제안되었다.²⁻⁴⁾ 따라서 본 절에서는 순차적으로 변형 Yule-Walker 방정식을 이용하여 표 1의 알고리즘으로 AR계수를 추정한 뒤 그 때의 예측오차를 이용하여 MA계수 대신 NS계수를 추정하여 신호의 파

워 스펙트럼을 추정하는 방식을 제안하였다.

신호를 ARMA(p, q) 모델로 모형화하면 식(41)과 같다.

$$y(t) = -\sum_{i=1}^p a_i y(t-i) + \sum_{j=0}^q b_j w(t-j) \quad (41)$$

식(41)의 양변에 $y(t-k)$ 를 곱하여 기대값을 취하면 다음의 변형 Yule-Walker 방정식이 얻어진다.

$$r(k) + \sum_{i=1}^p a_i r(k-i) = 0, \quad k > q \quad (42)$$

따라서 전치 원도우형 데이터집합의 경우에는 2절의 데이터벡터 및 행렬들이 아래와 같이 바뀌며 그 뒤를 모든 과정은 3절까지 동일하며 표 1의 알고리즘으로 우선 AR 계수를 추정하게 된다.

$$\underline{s}(N) = [y(q+1) \dots y(N)]^T \quad ((N-q) \times 1)$$

$$Y(N) = [\underline{y}(1) \dots \underline{y}(N-q)]^T \quad ((N-q) \times 1)$$

$$X(N) = [\underline{x}(q+1) \dots \underline{x}(N)]^T \quad ((N-q) \times p)$$

$$\underline{x}(i) = [\tilde{y}(i-1) \dots \tilde{y}(i-p)]^T \quad (p \times 1)$$

$$y(i) = \begin{cases} 0 & i \leq q \\ y(i) & i > q \end{cases}$$

$$\underline{\tilde{y}}(i) = [0 \ y(q+1) \dots y(i)]^T \quad ((i-q+1) \times 1)$$

그리고 AR계수를 추정했을 때 사후(a posteriori) 예측오차 $\epsilon_r(t)$ 는 식(43)으로 주어진다.

$$\epsilon_r(t) = y(t) + \underline{x}^T(t) \hat{a}(t) \quad (43)$$

여기서 NS계수 $\{c_i\}$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$C(z) \triangleq B(z)B(z^{-1}) = c_0 + c_1(z+z^{-1}) + \dots + c_q(2^q + z^{-q}) \quad (44)$$

여기서, $B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_q z^q \dots$

그런데 식(41)로 모형화된 신호의 파워스펙트럼은 식(45)와 같으므로 식(44)와 식(45)로부터 MA계수 대신 NS계수를 추정하여 파워 스펙트럼을 추정해도 됨을 알 수 있다.

$$S_y(\omega) = \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \Bigg|_{z=e^{j\omega}} = \frac{C(z)}{A(z)A(z^{-1})} \Bigg|_{z=e^{j\omega}} \quad (45)$$

그리고 식(41), 식(43)과 식(44)에서 보면 $C(e^{j\omega})$ 는 $\{\epsilon_r(i)\}$ 의 파워스펙트럼에 해당된다. 따라서 NS계수 $\{c_i\}$ 를 Moses등⁴⁾이 제안한 방식처럼 다음과 같이 시평균의 개념으로 추정할 수 있다.

$$\hat{c}_i(t) = \frac{\gamma_i}{t-q-i} \sum_{k=q+1}^{t-i} \lambda^{t-i-k} \epsilon_r(i+k) \epsilon_r(k),$$

$$i=0, \dots, q \quad (46)$$

여기서 γ_i 는 감쇄윈도우인수(tapered window factor)이고 λ 는 지수 하중인수(exponential weighting factor)로서 적절히 선택해야 한다.^{2), 4)} 식(46)을 순환식으로 변형하면 식(47)과 같다.

$$\hat{c}_i(t) = \frac{1}{1-q^{-i}} \{ \lambda(t-1-q-i) \hat{c}_i(t-1) + \gamma_i \epsilon_f(t) \epsilon_f(t-i) \}, \quad i=0, \dots, q \quad (47)$$

계산상의 편의를 위해 $\tilde{c}_i(t)$ 를 아래와 같이 정의하면 식(48)과 식(49)로써 NS계수 $\{c_i\}$ 의 추정치를 계산할 수 있다.

$$\tilde{c}_i(t) \triangleq (t-q-i) \hat{c}_i(t), \quad i=0, \dots, q \quad (48)$$

$$\tilde{c}_i(t) = \lambda \tilde{c}_i(t-1) + \gamma_i \epsilon_f(t) \epsilon_f(t-i), \quad i=0, \dots, q \quad (49)$$

그러면 추정된 AR계수와 NS계수를 이용하여 식(45)로써 신호의 파워스펙트럼을 추정하면 된다.

5. 시뮬레이션 및 검토

제안된 방식의 효율성을 검토하기 위해 아래의 두 가지 경우에 대해 컴퓨터 시뮬레이션을 시행하였다.

예 1

신호가 아래와 같이 ARMA(4, 2) 모델로 주어진다.

$$y(t) = 2.7607y(t-1) - 3.8106y(t-2) + 2.6536y(t-3) - 0.9238y(t-4) + v(t)$$

$$v(t) = w(t) - 0.5w(t-1) + 0.2w(t-2)$$

여기서 $\{w(t)\}$ 는 $\sim N(0, 1)$ 인 백색잡음이다. 그림 1은 신호의 원래 스펙트럼이며 그림 2, 그림 3과 그림 4에 200데이터인 경우에 각각 과결정 순화 기구변수법(ORIV), 제안된 방식(FAOD) 및 고속최소방식(FMM)에 의한 추정 스펙트럼을 보였다. 결과에서 볼 수 있듯이 FAOD는 ORIV와 비교할 때 근사화에 의한 performance의 차이가 그리 크지 않으며 고해상도의 추정스펙트럼을 보여주고 있다.

예 2

힘대역 신호의 예로서 두 개의 주파수($f_1=0.2, f_2=0.21$)를 갖는 정현파신호에 유색 잡음이 첨가된 경우이다.

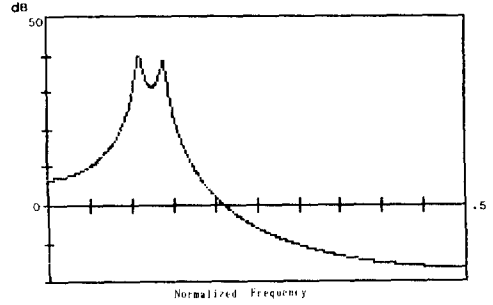


그림 1. 신호의 참 스펙트럼
Fig. 1. True spectrum of the signal

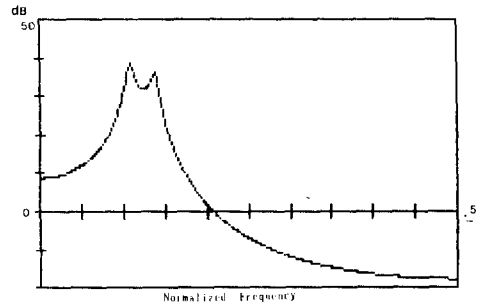


그림 2. ORIV에 의한 ARMA(4, 2) 스펙트럼 추정
Fig. 2. ARMA(4, 2) spectral estimation by ORIV

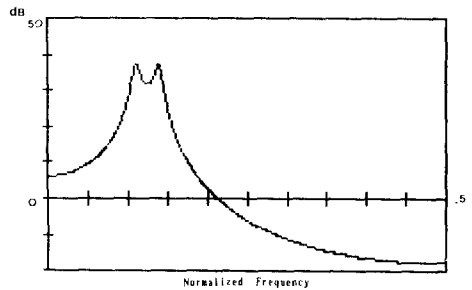


그림 3. FAOD에 의한 ARMA(4, 2) 스펙트럼 추정
Fig. 3. ARMA(4, 2) spectral estimation by FAOD

$$y(t) = \sqrt{6.3} \sin(2\pi f_1 t) + \sqrt{20} \sin(2\pi f_2 t) + v(t)$$

$$v(t) = w(t) - 0.102w(t-1) + 0.173w(t-2)$$

두 정현파의 SNR은 각각 5 및 10dB이며 $\{w(t)\}$ 는 $\sim N(0, 1)$ 인 백색잡음이다. 그림 5와 그림 6에 256데이터인 경우에 FAOD와 FMM에 의한 추정 스펙트럼을 각각 보였다. 그림 5는 ARMA(8, 8)

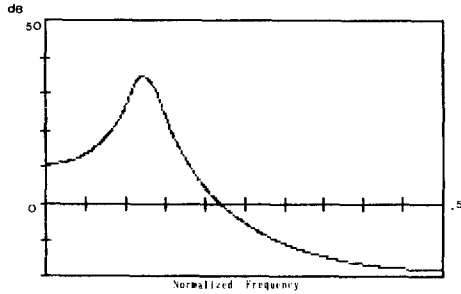


그림 4. FMM에 의한 ARMA(4, 2) 스펙트럼 추정

Fig. 4. ARMA(4, 2) spectral estimation by FMM

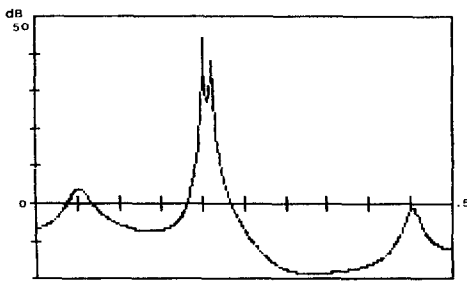


그림 5. FAOD에 의한 ARMA(8, 8) 스펙트럼 추정 (M=24)

Fig. 5. ARMA(8, 8) spectral estimation by FAOD (M=24)

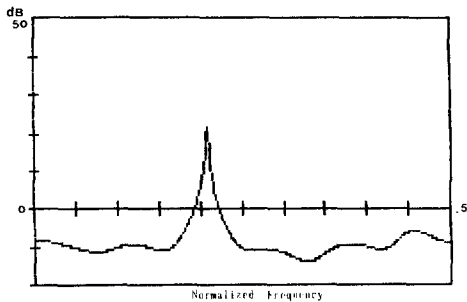


그림 6. FMM에 의한 ARMA(12, 12) 스펙트럼 추정

Fig. 6. ARMA(12, 12) spectral estimation by FMM

로 추정된 경우이며 두개의 인접한 정현파를 잘 찾아내고 있다. 반면 FMM을 적용하여 같은 차수로 추정된 경우 잘 찾아내지 못하였으며 차수를 높여 그림 6 과 같이 ARMA(12, 12)로 추정할 경우에도

만족스럽지 못한 결과를 나타내고 있다.

이상의 시뮬레이션 결과에서 고속근사과결정방식은 데이터 수가 적거나 협대역 신호인 경우에도 고해상도의 스펙트럼 추정이 가능함을 알 수 있다.

6. 결 론

파워스펙트럼 추정에 있어서 고해상도 및 실시간 추정은 중요한 문제로서, 계수적 추정 방식에서는 과결정 방식의 사용등에 의한 계수 추정의 정확도 향상과 고속알고리즘의 구현 등에 의한 계산량의 감소 등으로 해결할 수 있다.

그러나 과결정 방식은 계산량이 많이 증가하고 순환알고리즘의 구현이 어려우므로 본 논문에서는 근사과결정 방식을 제안하고 고속순환 알고리즘으로 구현함으로써 실시간 추정이 가능하도록 하였다.

또한 실시간 ARMA스펙트럼 추정을 위하여 변형 Yule-Walker방정식을 이용하여 고속순환 과결정 방식으로 AR계수를 추정한 뒤 그 예측오차를 사용하여 MA 계수 대신 NS 계수를 추정하여 효과적으로 파워스펙트럼을 추정하도록 하였다.

이 방식의 수리적 특성의 정량적인 해석은 앞으로 계속 연구되어야 할 과제이나 시뮬레이션 결과에서도 볼 수 있듯이 데이터 수가 적거나 협대역 신호의 경우에도 고해상도의 스펙트럼 추정이 가능하므로 인접한 주파수를 갖는 정현파들과 같은 협대역 신호의 스펙트럼 추정에 이용될 수 있다.

참 고 문 헌

- 1) S.M.Kay and S.L.Marple, Jr., "Spectrum analysis-A modern perspective", Proc. IEEE, Vol.69, pp.1380-1419, 1981.
- 2) S.Bruzzzone nad M.Kaveh, "On some suboptimum ARMA spetral estimator", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-3, pp. 1188-1196, 1985.
- 3) B.Friendlander, "Efficient algorithm for ARMA spectral estimation", Proc.IEE, Pt.F, Vol.130, pp.195-201, 1983.
- 4) R.L.Moses, J.A.Cadzw and A.A.Beex, "A recursive procedure for ARMA modeling", IEEE Tr. Acoust., Speech, Singnal Processing, Vol.ASSP-33, pp.1188-1196, 1985.
- 5) J.A.Cadzw, "Spectral estimation : An overdetermined rational model epuation approach", Proc. IEEE, Vol.70, pp.907-939, 1982.
- 6) B.Friedlanders, "The overdetermined recursive inst-

- perimental variable method", IEEE Tr. Automat. Contr., Vol.Ac-29, pp.353-356, 1984.
- 7) L.Ljung, M.Morf and D.D.Falconer, "Fast calculation of gain matrices for recursive estimation schemes", Int. J. Contr., Vol.27, pp.1-19, 1978.
- 8) A.J.Robins and P.E.Wellstead, "Recursive system identification using fast algorithms", Int. J. Contr., Vol.33, pp.455-480, 1981.
- 9) J.M.Cioffi and T.Kailath, "Fast recursive-least squares transversal filters for adaptive filtering", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-32, pp.304-337, 1984.
-