論 文
37~3~1

適應要素分割을 위한 誤差推定에 關한 硏究

A Method of Error Estimate for Adaptive Finite Element Mesh Generation

崔 鴻 洵*·崔 炅**·鄭 炫 敎§·韓 松 曄§§
(Hong-Soon Choi · Choi Kyung · Hyun-Kyo Jung · Song-Yop Hahn)

요 약

本 論文에서는 靜磁場問題에 適應有限要素分割法을 적응하는 데 必要한 새로운 誤差推定方法을 제시하였다. 要素에서 발생하는 計算誤差를 推定하기 위해 要素間의 境界條件인 磁界成分의 連續性이 위배되는 조건에 따라 誤差를 算出해 낸다. 要素細分은 磁束密度값의 誤差에 따라 3등급으로 分割하며, 全體誤差의 분포가 원하는 정도가 될 때까지 細分을 進行한다.

본 알고리즘을 要素分割이 어려운 二次元 모델에 적용해 본 결과 豫測대로 特異點 부근에서 細分이 많이 진행되었으며 要素를 均等分割한 경우보다 더욱 빠른 속도로 誤差가 줄어들었다. 要素數가 점차 증가함에 따라 推定된 誤差는 實際誤差에 점차 수렴하고 있음을 확인하였고, 따라서 본 硏究에서 제시된 誤差推定方法은 適應要素分割에 필요한 誤差의 指標로서 사용가능하다고 결론을 얻었다.

Abstract- This paper reports a new and simple posteriori error estimate method for adaptive finite element mesh genration especially for the magnetic field problems. To estimate local errors, we consider the interelement boundary conditions. Elements which violate much the conditions are considered to have great errors. Magnetic flux density errors are considered as a basis for refinement. This estimator is tested on two dimensional proplems with singular points. The estimated errors are always under estimated but in same order as exact errors, and this algorithm is much simpler and more convenient than other methods. The adaptive mesh gives much better rate of convergence in global errors than the uniform mesh.

1. 序 論

最近들어 電氣工學分野에서 電磁場問題를 解析하는 데 있어서 有限要素法이 널리 사용되고 있다. 그런데 해석모델의 形狀이 複雜하거나 特異點이 領域內에 존재하여 磁束 또는 電界의 集中現象이 있는 경우에는 그 附近의 要素를 細分하여 計算誤差를 줄이는 작업이 필요하다. 이 때 入力 데이터의 再作成이 要望되는데 手動으로 하는 경우 매우 많은 시간이 所要되며, 偏重度가 심한 경우에는 分割의 正確度를 기대할 수 없게 된다. 이러한 점을 해결하기 위한 방법으로 自動要素分割[1] (Automatic mesh generation)과 適應要素分割[2], [3] (Adaptive mesh generation) 方法들이 제시되었다. 前者는 使用者가 해석모델을 표현하기 위한 최소의 정보를 入力하고 이것을 기준으로 自動的으로 要素를 구성하는 方法을 말하고, 後者는 最近에 와서 硏究되기 시작한

*正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 碩士
**正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 博士課程
§正 會 員 : 江原大 工大 電氣工學科 助敎授
§§正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 敎授·工博
接受日字 : 1987年 6月 19日
1次修正 : 1987年 12月 15日
2次修正 : 1988年 2月 2日

方法으로서, 비교적 要素數가 적은 모델에서 初期計算을 하고 發生誤差를 推定하여 要素를 계속 細分해 나가는 方法이다. 前者의 경우에는 要素設定에 어느 정도 經驗이 必要하므로 後者의 方法이 비교적 簡便하다고 볼 수 있다.

그러나 適應要素分割方法을 適用하는데 있어서는 誤差를 推定하는 方法이 매우 어렵다. 지금까지 알려진 대표적인 방법은 補完變分原理(Complementary variational principle)에 의한 誤差推定方法과 誤差函數를 구성하여 그로부터 誤差를 推定하는 方法이다.[2),4)] 그러나 이들 방법은 解析次數가 높아지고 誤差推定數式을 다시 풀어야 하는 번거러움이 있다. 이에따라 本 論文에서는 靜磁場問題解析을 위한 다음과 같은 適應要素分割 알고리즘을 提示하고자 한다. 즉, 磁場解析問題에서는 要素境界上에서 磁束密度($\vec{B}$)의 法線方向成分과 磁界세기($\vec{H}$)의 接線方向成分은 각각 連續이어야 하는 데, 一般的으로 많이 사용되는 C° 連續 有限要素法에서는 위의 조건이 同時에 滿足되지 않는다. 따라서 위의 조건이 잘 滿足되지 않는 要素일수록 誤差가 많다고 假定할 수 있고 이렇게 구한 誤差는 要素를 細分하기 위한 基準이 될 수 있다.

本 硏究에서는 解析的인 解를 알 수 있는 線形靜磁場問題를 택하여 本 알고리즘에 의한 推定誤差와 實際誤差를 비교하여 본 알고리즘의 誤差推定에 대한 妥當性을 檢討하였다.

2. 알고리즘

2.1 Error Norm과 誤差推定

電氣機器의 特性을 算定하는 데 있어서 基本物理量중의 하나로서 磁束密度를 들 수 있으며, 이것은 電磁力, 인덕탄스 등의 諸般 파라미터를 算定하는 데 직접 이용된다. 그러므로 要素細分을 위한 誤差計算의 指標로서 磁束密度를 使用한다.

Error Norm을 다음과 같이 定義한다.

$$\|e\| = \left\{ \sum_{i=1}^{N} e_i \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$$e_i = \int_{\Omega i} \triangle B^2 d\Omega, \quad i = 1, \cdots, N \tag{2}$$

$$\triangle B = |\vec{B}_{cal}| - |\vec{B}_{exac}| \tag{3}$$

여기서

N : 全體 要素數

$\vec{B}_{cal}$: 有限要素法에 의해 구한 磁束密度

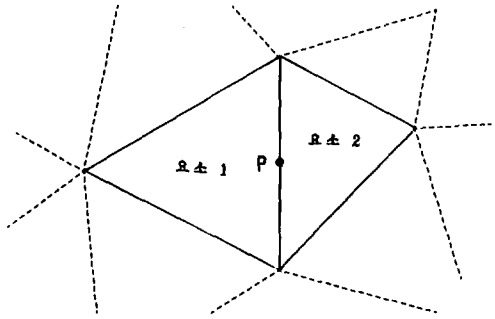

그림 1. 隣接 三角要素 境界
Fig. 1. The interface of adjoining elements

$\vec{B}_{exac}$: 磁束密度의 嚴密解이다.

式(2)의 e_i는 각 要素마다 따로 계산하여 要素分割時 細分度의 基準이 되도록 한다. 式(3)의 $\vec{B}_{exac}$는 實際問題 解析에서는 알 수 없으므로 본 알고리즘에서는 推定된 값 $\vec{B}_{est}$로 代置한다. $\vec{B}_{est}$는 다음과 같이 推定한다.

磁場의 性質에서 두 要素間의 境界面上에서 磁束密度의 法線成分과 磁界세기의 接線成分이 連續이어야 한다.

$$B_{n1} = B_{n2} \tag{4}$$

$$H_{t1} = H_{t2} \tag{5}$$

여기서 n및 t는 각각 法線成分과 接線成分을 의미한다.

磁氣벡터포텐셜(Magnetic Vector Potential) $\vec{A}$가 C° 連續條件만을 만족하는 이산계 자장문제에 있어서 式(4)는 언제나 만족되지만 式(5)는 그렇지 않다. 그러므로 要素境界面에서 H_t의 差異는 磁界의 計算誤差 程度를 代辯한다고 볼 수 있다. 이 H_t의 連續性을 만족하는 連續値는 兩側 H_t의 사이에 있으므로 그림 1에서, 要素 1에서 본 P점의 磁界세기의 接線方向成分을 H_{t1}, 要素 2에서 본 成分을 H_{t2}라 하면 P점에서의 H_t의 推定값 $H_{t\,est}$는 다음과 같이 推定한다.

$$H_{t\,est} = (1-\theta)H_{t1} + \theta H_{t2} \qquad 0 \le \theta \le 1 \tag{6}$$

補正係數 θ는 適切한 補間法에 의해 여러가지로 계산할 수 있으나 本 硏究에서는 $\theta = \frac{1}{2}$등 여러 경우를 試圖해 본 결과, 두 隣接한 要素의 크기와 透磁率을 考慮한 係數 K_1 및 K_2를 定義하고 이것으로부터 θ를 정하는 方法이 全體 誤差의 수렴속도가

가장 빠르며 要素의 分割度가 비교적 고르다는 것을 알았다.

즉,

$$\theta = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \tag{7}$$

여기서

$$K_1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\mu_1}, \quad K_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\mu_2} \tag{8}$$

이며, S_1, S_2, μ_1, μ_2는 각각 要素 1 및 要素 2 의 面積및 透磁率이다.

이 推定값에서 부터 磁束密度의 接線方向成分 의 推定値를

$$B_{t1\ est} = \mu_1 H_{t\ est}$$
$$B_{t_2\ est} = \mu_2 H_{t\ est} \tag{9}$$

에 의하여 구할 수 있고, 推定 磁束密度값을

$$|\vec{B}_{est}|_1 = \{B_{n_1}^2 + B_{t_1\ est}^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$|\vec{B}_{est}|_2 = \{B_{n_2}^2 + B_{t_2\ est}^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

에 의해 구할 수 있게 된다.

이와같이 推定된 磁束密度와 有限要素法에서 계산된 磁束密度 $\vec{B}_{cal}$의 差異로부터 要素內의 誤差를 算出해 낸다.

즉,

$$\triangle B = |\vec{B}_{cal}| - |\vec{B}_{est}| \tag{11}$$

이고 三角要素의 각 邊에서 구한 磁束密度의 誤差를 $\triangle B_1$, $\triangle B_2$, $\triangle B_3$라 하여 式(2)를 Gaussian Quadrature로 積分하면

$$e_t = \int_{\Omega t} \triangle B^2 d\Omega = \frac{1}{3}(\triangle B_1^2 + \triangle B_2^2 + \triangle B_3^2) \cdot a \tag{12}$$

이고, 여기서 a는 三角要素의 面積이다.

2.2 要素 細分

要素의 細分方法은 要素의 誤差程度에 따라 한변이나 두변 또는 세변을 각각 둘로 나누어서 새로운 요소를 만드는 二分法(Bisection Method)을 사용하였다.[5] 分割 基準은 각 要素誤差 e_t의 平均値(e_m)와 一般 標準偏差(σ)를 구하여

i) $e_t \geq e_m + 2\sigma$일 때 4 개로 분할

ii) $e_m + 2\sigma > e_t \geq e_m + \sigma$일 때 3 개로 분할

iii) $e_m + \sigma > e_t > e_m$일 때 2 개로 분할 하였다.

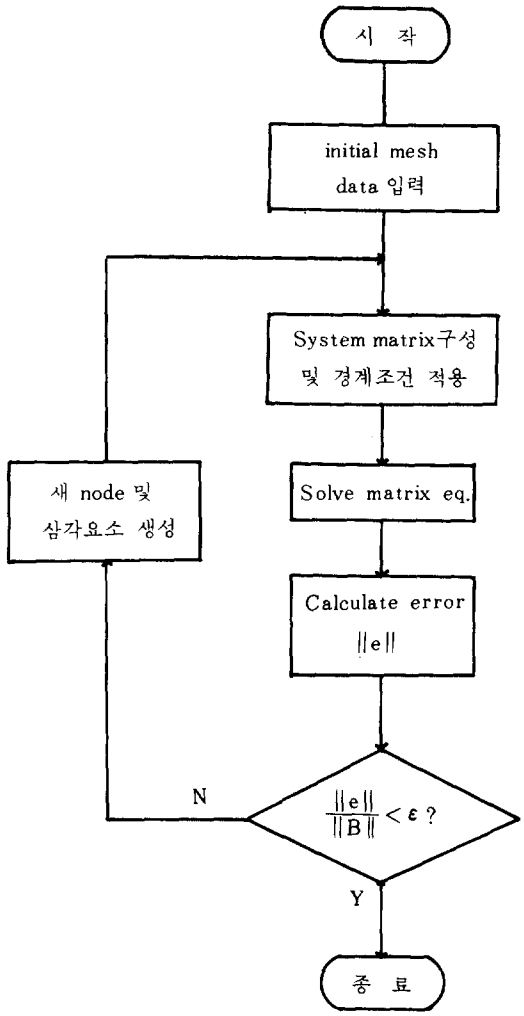

그림 2. 프로그램 흐름도
Fig. 2. Flow chart of main program

2.3 프로그램 흐름도

全體 프로그램의 흐름도는 그림 2 와 같다. 먼저 선정된 모델에서의 初期 要素分割 데이터를 入力시키고 變分法 알고리즘에 의한 系行列(System Matrix)을 構成한 후 Neumann 또는 Dirichlet 境界條件을 適用시킨다. 線形 聯立方程式을 푸는 방법으로서는 CG法(Conjugate Gradient Method)을 사용하였으며 計算結果로 부터 計算指標 $\|e\|/\|B\|$ 의 값이 만족할 정도의 범위 內의 값이 될 때까지 요소를 細分하게 된다. 여기서 $\|B\|$는 다음과 같이 定義한다.

$$\|B\| = \left\{ \int_{\Omega} B^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{e=1}^{M} \int_{\Omega e} |B^e|^2 d\Omega^e \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

B^e : 要素 e內의 磁束密度

M : 要素數

Ω : 解析 領域

3. 事例 硏究

本 알고리즘을 解析的인 解가 존재하는 二次元 靜磁場問題에 적용하였으며 適用모델은 그림3과 같다.

要素分割이 매우 어려운 경우를 다루기 위해 原點에서 $\partial A/\partial r$이 特異性(Singularity)[6]을 갖도록 하였고 벡터포텐셜의 理論解는 다음과 같다.

$$A(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}} \sin(\theta/2) \quad (14)$$

r, θ : 원통좌표계

그리고 Dirichlet 경계의 벡터포텐셜 값은 式(14)로 부터 구하여 주었다.

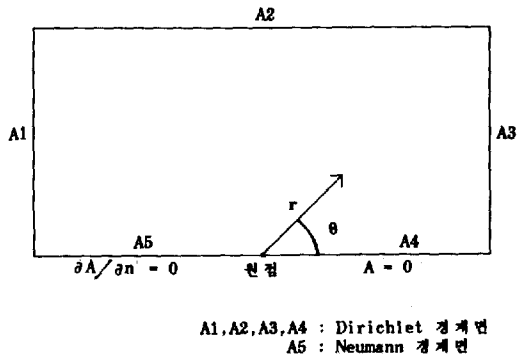

그림 3. 해석 모델

Fig. 3. Analyzing model for computational comparison

適應要素分割技法을 適用하여 發生된 要素網의 첫번째, 중간과정 그리고 마지막 과정을 그림 4 의 a), (b), (c)에 나타내었으며 그림 4 의 (d), (e), (f)는 要素가 각각 (a), (b), (c)인 경우 계산된 磁束分布를 나타낸다. (b)와 (c)에서 보면 예상대로 特異點 부근에서 細分이 많이 進行되어감을 볼 수 있다. 補間函數(Interpolation Function)는 2 차를 사용하였고 初期 要素分割은 그림 4 의 (a)에 나타나 있듯이 3 개로 시작하였다.

그림 5 는 適應要素分割한 경우 및 均等要素分割한 경우에서의 推定誤差및 實際誤差曲線을 나타낸 것으로서 誤差 $\|e\|$가 節點數의 증가에 따라 減少

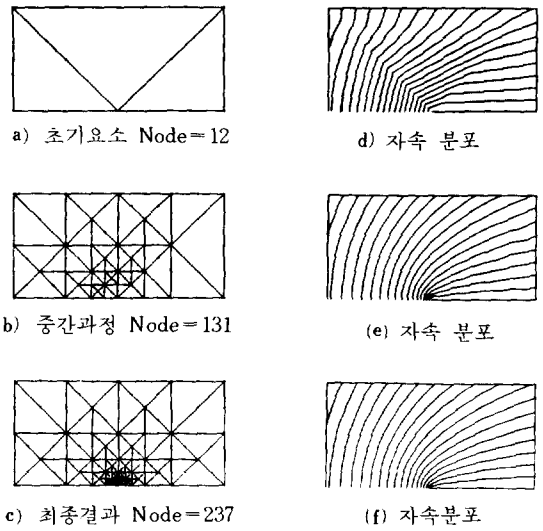

그림 4. 적응요소 분할 적용과정 및 계산자속선

Fig. 4. Adaptive mesh generation procedure and calculated flux lines

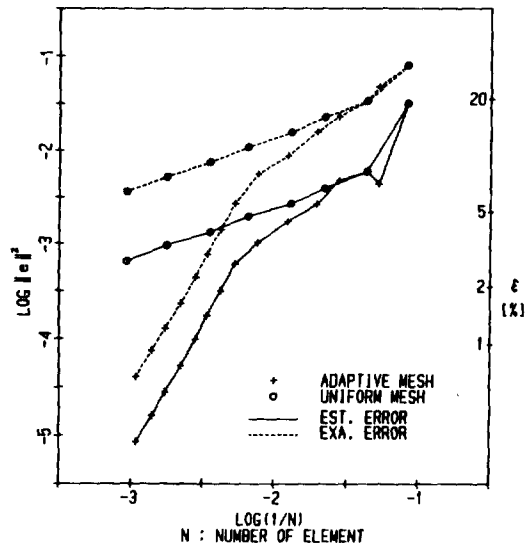

그림 5. 전체 오차의 수렴비 특성

Fig. 5. The rate of convergence of global error

하는 과정을 보여준다. 여기서 實際誤差는 $\sum(|\vec{B}_{cal}| - |\vec{B}_{exac}|)^2$값이고 推定誤差는 $\sum(|\vec{B}_{cal}| - |\vec{B}_{est}|)^2$값이다. 그림에 나타나 있듯이 均等要素分割 경우보다 適應要素分割의 誤差減少率이 顯著하게 크게 나타남을 알 수 있다. 그림 6 에 均等要素分割의 例를 나타내었다. 그리고 實際誤差와 推定誤差는 그 크기가 同一次數의 값을 유지하고 있어 推定

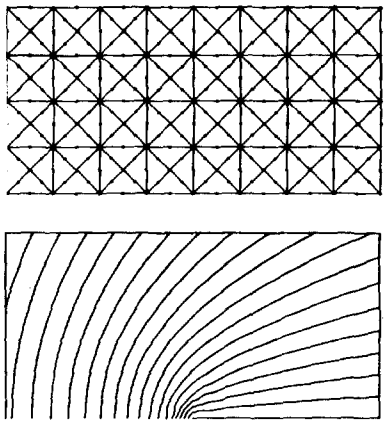

그림 6. 균등요소망 및 계산자속선
Fig. 6. Uniform mesh and its calculated flux lines

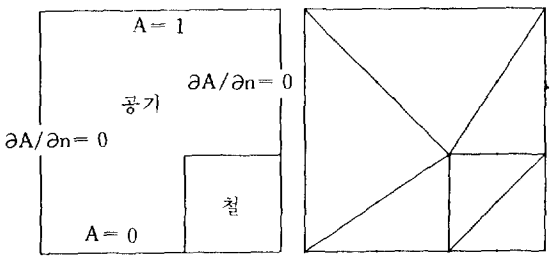

그림 7. 사각형 철이 있는 모델 및 초기요소 분할
Fig. 7. Iron model and initial mesh

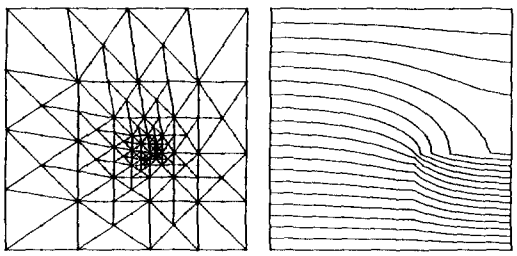

그림 8. 그림 7의 적응요소 분할 결과
Fig. 8. Result of adaptive mesh generation of **fig. 7.**

誤差로부터 實際誤差를 충분히 豫測할 수 있다는 것을 알 수 있다.

다음으로 본 알고리즘을 鐵이 있는 모델에 적용하여 보았다. 그림 7은 해석모델및 初期要素網(Initial Mesh)을 나타내는데 平等磁界속에 四角形 鐵(μ_s=1000)이 있는 경우이다. 對稱性을 고려하여 1/4영역만 취하였다. 그림 8에 本 硏究의 알고리즘에 의하여 얻어진 適應要素分割圖및 이 때의 磁束密度分布를 나타내었다. 豫測되는 바와 같이 鐵의 모서리 부분에 磁束이 集中되었고 그 부분의 要素가 細分되었음을 알 수 있다.

5. 結 論

本 硏究에서는 靜磁場問題에서 適應要素 分割을 적용하기 위한 誤差推定 알고리즘을 提示하였다. 本 알고리즘을 二次元 磁場問題에 적용한 결과 適應要素分割方法이 要素를 均等하게 分割한 경우보다 같은 節點數에서 解의 正確度에 있어 훨씬 有利함을 알 수 있었다. 또한 推定誤差는 實際誤差와 同一次數의 값을 가지고 있기 때문에 이 推定誤差로 부터 計算된 磁場의 正確度를 豫測할 수 있어 計算終了 指標로 삼을 수 있다. 本 알고리즘에서는 誤差推定을 從前의 方法보다 매우 간단하게 할 수 있으므로 適應要素分割 過程에서 要素分割에 소요된 계산시간은 全體 계산시간에 비하여 무시할 정도였다. 그러므로 本 硏究結果는 電磁場問題의 工學的 解析에 매우 有用한 알고리즘이라고 思料된다.

참 고 문 헌

1) J.C. Cavendish, "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the Finite Element Method", IJNME, Vol.8, pp. 679~696, 1974

2) Z.J. Cendes and D.N.Shenton, "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic field", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-21, No.2 , pp. 1811~1816, September 1985.

3) A.R. Pinchuk and P.P. Silvester, "Error estimation for automatic adaptive finite element mesh generation.", IEEE Transaction on Magnetics, Vol. MAG-21, No. 6, pp. 2551~2554, November 1985.

4) D.W. Kelly, J.P. DE S.R. Gago, O.C. Zienkiewicz and I. Babuska, "A Posteriori error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method : Part I -Error Analysis.", IJNME, Vol.19, pp. 1593~1619, 1983.

5) M.C. Rivara, "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques.", IJNME, Vol.20, No. 4, pp. 745~756, April 1984.

6) J.T. Oden and G.F. Carey, Finite Elements-Volume Ⅱ, A Second Course, Prentice-Hall pp. 227-247, 1983.