64 大韓機械學會論文集 第12卷 第1號, pp. 64~71, 1988.

<論 文>

다공질 금속의 비탄성거동을 위한 특수 구성방정식의 형성(Ⅱ)

——탄성·소성 변형경화 재료——

金 琪 泰*·徐 廷**

(1987년 9월 1일 접수)

Formulation of Special Constitutive Equations for Inelastic Responses of Porous Metals(Ⅱ)

——Elastic, Plastic Strain Hardening Material——

K.T. Kim and J. Suh

Key Words: Porous Metal(다공질 금속), Strain Hardening(변형 경화), Porosity(기공성), Triaxial Compression(3축 압축), Inelastic Response(비탄성 거동)

Abstract

A special set of constitutive equations is formulated to predict elastic-plastic strain hardening responses of porous metals. Including the effect of the material's strain hardening in the yield function, the constitutive equations are capable of showing no dip phenomena in uniaxial strain compression and predicting work-hardening response for plastically precyled porous metal.

The proposed constitutive equations are compared with experimental data for porous tungsten.

1. 서 론

효과적인 완충재로서 다공질금속이 공학적으로 광범위하게 적용됨과 더불어 다공질고체의 역학적 거동을 알아내기 위해 많은 노력을 기울였다. 압축과정에서 금속분말과 다공질 성형체의 치밀화 기구에 관한 연구는 오늘날 분말야금학 분야에서도 매우 중요한 과제이다[1~3].

다공질 고체의 체적변화에 따른 현상을 조사 연구하기에는 현상학적인 방법으로부터 微小力學的인 방법에 이르기까지 여러 이론적 접근방법을 이용하였다. 정수압 압축 상태에서 다공질 고체의 체적변화 거동을 이론적으로 예측하기 위해 中空球形 모델[4~9]이 가장 유력하고 쉬운 방법으로 많이 쓰여왔다.

일반적인 3차원 하중 하에서의 다공질 고체의 거동은 체적(volumetric)요소와 편차(deviatoric) 요소 간의 강한 결합 때문에 매우 복잡하다. Carroll과 Carman[10]의 최근 논문에서는 기공(void)의 팽창 성장 및 그로 인한 파괴와 분말금속 및 다공질 금속의 압축을 이론적으로 해석하기 위해 미소역학적인 모델로서 中空球(hollow sphere)의 비 정수압 하의 탄성-소성 거동을 유한요소법을 사용하여 조사하였다.

다공질 고체의 구성이론의 성형을 위한 또 다른 접

* 正會員, 浦項工科大學 機械工學科
** 浦項工科大學 大學院

근 방법은 다공질 고체를 거시안적으로 균질하다고 취급하는 현상학적인 탄성-소성이론에 의한 방법이다. 이 방법에서는 다공질 고체의 특성을 나타내는 다공성 매개변수(또는 기공성, porosity) ϕ가 소성항복 조건식에 포함된다. 이러한 여러 항복함수(loading function 또는 yield function)가 미소역학적 또는 현상학적으로 제안되었다. Green[11]과 Gurson[12]은 Torre[4]가 구한 중공구의 순수압력 하에서의 완전소성 거동에 대한 엄밀해와 각각 달리 구한 편차압력에 의한 완전소성 거동의 근사해를 결합함으로써 다공질 고체를 위한 소성 항복 함수를 구하였다. 한편 Kuhn과 Doney[2], Shima와 Oyane[13] 등은 현상학적으로 소성 항복 함수를 제안하였다. 이런 관점으로부터 Johnson 등[14]과 Martynova와 Shtern[15]은 순수압력 하의 거동을 나타내는 식과 편차압력 하의 거동을 나타내는 식등 각각 두 개의 다른 소성 항복함수를 제안하였다. 비록 많은 항복함수들이 제안되었으나 모두 기공의 붕괴에 의한 변형경화만을 고려하고 모재(matrix material)의 변형경화는 무시하였다. 또한 비정수압 하에서의 비탄성거동에 관한 체계적인 조사도 아직 없었다.

본 논문에서는 기공의 붕괴에 의한 변형경화 뿐 아니라 모재의 변형경화도 고려하여 더 일반적인 다공질 금속의 특수 구성 방정식 등을 제안하였다.

탄성거동을 위하여는 기공의 영향을 고려한 상당 탄성계수를 일반화된 Hooke의 법칙에 적용하여 사용한다. 탄성-소성변형을 위하여는 비 다공질고체의 새로운 소성이론으로 응력공간이 아닌 변형율 공간을 주공간으로 하여 Naghdi와 그의 공동연구자[16~22]들에 의해 개발된 구성이론을 다공질고체에 적합하게 수정하여 사용하였다.

여러 가공 경화변수의 값에 대하여 정수압, 1축 변형율 압축, 3축 응력 압축하의 다공질 고체의 거동을 이론적으로 조사하였다. 본 논문에서 구한 구성방정식을 사용하면 다공질 우라늄[23], 다공질 알루미늄[24] 등의 실험에서 관찰되듯이 1축 변형율 압축 하의 응력경로에서 비강하(no dip) 현상을 이론적으로 보일 수 있다. 또 탄성 한계를 넘어서 압축된 다공질 금속에서 하중이 제거된 후 다시 압축될 때 일어나는 탄성-소성 가공경화 현상도 이론적으로 예측할 수 있다. 또한 소성영역에서의 프와송 비(ν)에 대한 기공성(ϕ)의 영향도 조사하였다.

끝으로 다공질 텅스텐의 실험치와 본 논문의 구성방정식으로부터 구한 이론치를 비교 검토하였다.

2. 기본 방정식

우선 본 논문에서 사용할 Casey와 Naghdi[20~22]에 의해 제안된 탄성-소성 구성이론의 기본 방정식을 정리하면, 응력텐서* s_{KL}은 변형율텐서 e_{KL}과 소성 변형율을 나타내는 대칭 2차원 텐서 $e^p{}_{KL}$의 함수로 가정된다. 그러므로,

$$s_{KL}=\hat{s}_{KL}(e_{MN},\ e^p{}_{MN}) \tag{1}$$

고정된 $e_{KL}{}^p$에 대하여, (1)식은

$$e_{KL}=\hat{e}_{KL}(s_{MN},\ e_{MN}{}^p) \tag{2}$$

으로 변환될 수 있다. 더 나아가서, 양의 값을 갖지 않는 항복 함수(yield function 또는 loading function) g의 존재를 가정하면, 각각의 $e_{KL}{}^p$에 대하여

$$g(e_{KL},\ e_{KL}{}^p)=0 \tag{3}$$

는 6차원 변형율 공간에서의 개방영역 $\mathscr{E}$(탄성영역)와 그 경계면 $\partial\mathscr{E}$(즉, 항복곡면)로 정의된다. 그리하여 $g<0$인 상태는 탄성, $g=0$는 탄성-소성 상태를 나타낸다. 함수 $\hat{g}$는 다음과 같이 정의되며,

$$\hat{g}=\frac{\partial g}{\partial e_{KL}}\ \dot{e}_{KL} \tag{4}$$

소성상태로 부터의 제하(unloading, $\hat{g}<0$), 중립부하(neutral loading, $\hat{g}=0$) 그리고 부하(loading, $\hat{g}>0$)의 조건으로 변형율 공간에서 정의된다. 식(2)와 (3)을 이용하면, 응력공간에서도 g에 상응하는 소성 항복조건 함수를 얻는다. 즉

$$f(s_{KL},\ e_{KL}{}^p)=g(e_{KL},\ e_{KL}{}^p) \tag{5}$$

(5) 식은 응력공간에서 탄성영역 $S:f<0$와 그 경계면(항복곡면) $\partial S:f=0$로 정의된다. 또, 함수 $\hat{f}$는

$$\hat{f}=\frac{\partial f}{\partial s_{KL}}\ \dot{s}_{KL}, \tag{6}$$

로 정의되며, $\hat{f}$의 부호로부터 경화성(hardening), 연화성(softening), 완전소성거동(perfectly plastic behavior) 등을 결정할 수 있다[20]. 이미 언급한 바와 같이 부하(loading)는 변형율 공간에서 $g=0$, $\hat{g}>0$의 조건으로 정의된다. 그러므로, 재료의 변형경화 현상은 $\Phi=\hat{f}/\hat{g}$의 부호로 나타낼 수 있다. 즉, 경화성일 때는 양의 값을, 완전소성일 때는 零, 연화성일 때는 음의 값을 갖는다.

본 논문에서는 (1) 식의 특수한 경우로서 다음과 같은 응력 함수를 가정한다. 즉,

$$s_{KL}=C_{KLMN}(e_{MN}-e_{MN}{}^p) \tag{7}$$

여기서 C_{KLMN}는 4차원 상탄성계수이다. 또한, 두 번

* 미소변형 시에는 Piola-Kirchhoff 응력텐서와 Cauchy 응력텐서와의 구별은 필요하지 않다.

형율 텐서의 차이 $e_{MN}-e_{MN}^{p}$는 탄성 변형율 텐서를 표시한다. 그리고 소성 스트레인 속도 텐서 $\dot{e}_{KL}^{p}$에 관한 구성방정식은 다음과 같다.

$$\dot{e}_{KL}^{p}=\frac{\hat{g}}{\Gamma+\Lambda}\frac{\partial f}{\partial s_{KL}},\quad \kappa=D_{KL}\dot{e}_{KL}^{p} \tag{8}$$

여기서

$$\Gamma=-\frac{\partial f}{\partial s_{KL}}\left(\frac{\partial f}{\partial e_{KL}^{p}}+\frac{\partial f}{\partial \kappa}D_{KL}\right),$$

$$\Lambda=\frac{\partial f}{\partial s_{KL}}\frac{\partial g}{\partial e_{KL}},\quad \Gamma+\Lambda>0 \tag{9}$$

식(8)과 (9)는 부하 시(즉, $g=0$, $\hat{g}>0$)의 변형의 폐회로에서 일의 양이 음이 아니라는 가정과, 중립부하로부터 부하로의 연속성을 가정함으로 구해진다[20]. 여기서 D_{KL}은 변형율 텐서 e_{MN}과 소성변형율 텐서 e_{MN}^{p}의 함수이다. 또, 스칼라함수 Φ는 다음과 쓸수도 있다[22].

$$\Phi=\frac{\Gamma}{\Gamma+\Lambda} \tag{10}$$

3. 특수 구성방정식

2차원 텐서들은 구 성분과 편차 성분으로 다음과 같이 분해하여 사용하면 편리하다.

$$\tau_{KL}=s_{KL}-\bar{s}\delta_{KL},\quad \gamma_{KL}=e_{KL}-\bar{e}\delta_{KL},\quad \gamma_{KL}^{p}=e_{KL}^{p}-\bar{e}^{p}\delta_{KL},$$

$$\bar{s}=\frac{1}{3}s_{KK},\quad \bar{e}=\frac{1}{3}e_{KK},\quad \bar{e}^{p}=\frac{1}{3}e_{KK}^{p} \tag{11}$$

응력함수 (7)식은 이제 일반화된 Hooke의 법칙으로 특정하여 사용한다.

$$\tau_{KL}=2\mu(\gamma_{KL}-\gamma_{KL}^{p});\quad \bar{s}=3k(\bar{e}-\bar{e}^{p}) \tag{12}$$

여기서 μ와 k는 각각 다공질 고체의 상당탄성전단계수와 상당탄성체적계수이다.

소성변형 중의 모재의 체적변화는 무시됨으로, 기공성 $\phi(=V_p/V)$는 다음과 같이 주어진다[25].

$$\phi=1-(1-\phi_0)\exp(v) \tag{13}$$

여기서 V와 V_p는 다공질 고체의 전체체적 및 기공의 체적을 나타내며, $v(=-e_{KK})$는 압축 체적 변형율이며 ϕ_0는 ϕ의 초기값이다.

이제 다음과 같은 특수한 소성항복의 조건식을 고려한다.

$$f=\frac{1}{2}\tau_{KL}\tau_{KL}+\alpha\phi\bar{s}^{2}-\kappa$$

$$g=2\mu^{2}(\gamma_{KL}-\gamma_{KL}^{p})(\gamma_{KL}-\gamma_{KL}^{p})+\alpha\phi\{3k(\bar{e}-\bar{e}^{p})\}-\kappa \tag{14}$$

여기서 ϕ는 e_{KL}의 함수이며, α는 양의 상수이다. 식 $(14)_2$는 (12)를 이용하여 $(14)_1$로부터 구해진다. 특수한 경우로 $\kappa(\phi)=\frac{1}{3}(1-\phi)^{n}Y_1^{2}$인 경우에는 식(14)은 최근에 Kim[26]에 의해 사용된 소성 항복함수로 유도될 수 있다. 또한 $\phi=0$, $\kappa=0$일 때 $(14)_1$은 통상적인 Von-Mises 항복조건식으로 유도된다. 식(14)에서 항복곡면의 크기는 가공경화 변수 κ에 의존함을 알 수 있다.

이제 식$(8)_2$의 가공경화율을 나타내는 계수 D_{KL}을 다음과 같이 정의한다**.

$$D_{KL}=\beta_1\tau_{KL}+\beta_2\bar{s}\delta_{KL} \tag{15}$$

여기서 β_1과 β_2는 재료상수이다. 이로부터 $(8)_2$식을 다시 쓰면

$$\kappa=\beta_1\tau_{KL}\dot{\tau}_{KL}^{p}+\beta_2\bar{s}\dot{e}_{KK}^{p} \tag{16}$$

따라서, 식(12)와 (14)를 사용하면 다음 식들을 얻는다.

$$\frac{\partial f}{\partial s_{KL}}=\tau_{KL}+\left[\frac{2}{3}\alpha\phi\bar{s}+\frac{\alpha(1-\phi)\bar{s}^{2}}{3k}\right]\delta_{KL} \tag{17}$$

$$\frac{\partial g}{\partial e_{KL}}=2\mu\tau_{KL}+[2\alpha k\phi\bar{s}+\alpha(1-\phi)\bar{s}^{2}]\delta_{KL} \tag{18}$$

$$\Gamma=\beta_1\tau_{KL}\tau_{KL}+\alpha\bar{s}^{2}\{\beta_2-\alpha(1-\phi)\bar{s})\}\cdot\{2\phi+(1-\phi)\bar{s}/k\} \tag{19}$$

그리고

$$\Lambda=2\mu\tau_{KL}\tau_{KL}+4\alpha^{2}\phi^{2}k\bar{s}^{2}+4\alpha^{2}\phi(1-\phi)\bar{s}^{3}+\alpha^{2}(1-\phi)^{2}\bar{s}^{4}/k \tag{20}$$

4. 3축 하중 조건하의 구성방정식

4.1 정수압 압축(Hydrostatic Compression)

우선 정수압 하에서 압축되는 다공질 금속을 고려한다. 이 문제에서의 좀 더 편리한 기호로 $p=-\bar{s}$, $v=-3\bar{e}$, 및 $v^{p}=-3\bar{e}^{p}$을 사용한다. 여기서 p, v, v^{p}는 압력, 압축 체적변형율, 및 압축 소성체적변형율이다. 이 특수한 하중 상태에서 $(14)_1$식은 다음과 같이 간단한 형태로 유도된다.

$$f=\alpha\phi p^{2}-\kappa \tag{21}$$

(8)과 (12)식을 이용하면

$$\dot{v}^{p}=\frac{\alpha[2k\phi-(1-\phi)p]}{\beta_2+2\alpha k\phi}\dot{v},\quad \kappa=\beta_2 p\dot{v}^{p} \tag{22}$$

그리고

$$p=k(v-v^{p}) \tag{23}$$

Fig. 1은 여러 β_2의 값에 대해 (22)와 (23)으로부터 계산하여 구한 정수압력과 체적변형율의 관계를 나타낸다. 여기서, $\beta_2=5$ GPa인 경우(즉, 양의 값)는 변형경화 거동을 보이고 $\beta_2=-5$ GPa인 경우(음의 값)는 변형연화 현상을 보인다. $\beta_2=0$(모재가 완전소성인

** 항복함수(14) 식에서 ϕ가 일정하면 (15) 식을 이용하여 (14) 식이 Casey와 Naghdi[21]가 제안한 비 다공질 고체의 항복함수로 유도된다.

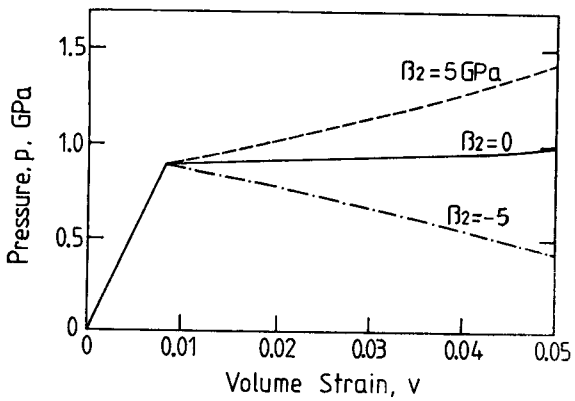

Fig. 1 Pressure vs. volume strain responses under hydrostatic compression, with various values of β_2

경우)일 때의 곡선은 경미한 변형경화현상을 보이는데 이 이유는 압축 시의 기공의 붕괴로 인하여, 거시안적으로 볼 때, 다공질 고체의 변형경화를 유도하기 때문이다. 여기서 사용된 상수값으로는 $\alpha=1.2$, $\phi_0=0.212$, $\kappa_0=0.198\,\mathrm{GPa}^2$, $\mu=95\,\mathrm{GPa}$, $k=110\,\mathrm{GPa}$ 이며, 이 값들은 최근에 Kim[26]에 의해 얻어진 다공질 텅스텐의 재료상수이다. 가공경화 계수의 초기치 κ_0는 $\kappa_0=\frac{1}{3}(1-\phi_1)^n Y_s^2$에서 구해졌으며, 여기서 ϕ_1는 초기항복시의 기공성, Y_s는 모재의 초기 항복응력, n는 양의 상수를 나타낸다.

4.2 1축 변형율 압축(Uniaxial Strain Compression)

다공질 금속의 1축 변형율 압축(변형율이 제어된 실험으로 $e_{11}\neq 0$, $e_{22}=e_{33}=0$)을 고려한다. 응력 및 변형율이 축 대칭이므로, $s_{22}=s_{33}$와 $e^p{}_{22}=e^p{}_{33}$라고 하면

$$\tau_{KL}=\frac{1}{3}(s_{11}-s_{22})b_{KL},\quad \gamma_{KL}=\frac{1}{3}e_{11}b_{KL},$$

$$\gamma_{KL}{}^p=\frac{1}{3}(e^p{}_{11}-e^p{}_{22})b_{KL},\quad \bar{s}=\frac{1}{3}(s_{11}+2s_{22}),$$

$$\bar{e}=\frac{1}{3}e_{11},\quad \bar{e}^p=\frac{1}{3}(e^p{}_{11}+2e^p{}_{22}) \tag{24}$$

그리고

$$\phi=1-(1-\phi_0)\exp(-e_{11}) \tag{25}$$

여기서

$$b_{KL}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \tag{26}$$

식(24)를 이용하면 소성항복의 조건식 $(14)_1$은

$$f=\frac{1}{3}\tau^2+\alpha\phi p^2-\kappa \tag{27}$$

로 쓸 수 있으며, (8)과 (12)식은 다음과 같이 유도된다.

$$s_{11}=\frac{4}{3}\mu(e_{11}-e^p{}_{11}+e^p{}_{22})+k(e_{11}-e^p{}_{11}-2e_{22}{}^p)$$

$$s_{22}=-\frac{2}{3}\mu(e_{11}-e^p{}_{11}+e^p{}_{22})+k(e_{11}-e^p{}_{11}-2e_{22}{}^p) \tag{28}$$

$$\dot{e}_{11}{}^p=\frac{[4\mu\tilde{\tau}+6\alpha\phi k\tilde{p}+3\alpha(1-\phi)\tilde{p}^2][2\tilde{\tau}+2\alpha\phi\tilde{p}+\alpha(1-\phi)\tilde{p}^2/k]}{6(\beta_1+2\mu)\tilde{\tau}^2+9\alpha(\beta_2+2\alpha\phi k)\{2\phi k+(1-\phi)\tilde{p}\}\tilde{p}^2/k}\dot{e}_{11}$$

$$\dot{e}_{22}{}^p=\frac{[4\mu\tilde{\tau}+6\alpha\phi k\tilde{p}+3\alpha(1-\phi)\tilde{p}^2][-\tilde{\tau}+2\alpha\phi\tilde{p}+\alpha(1-\phi)\tilde{p}^2/k]}{6(\beta_1+2\mu)\tilde{\tau}^2+9\alpha(\beta_2+2\alpha\phi k)\{2\phi k+(1-\phi)\tilde{p}\}\tilde{p}^2/k}\dot{e}_{11} \tag{29}$$

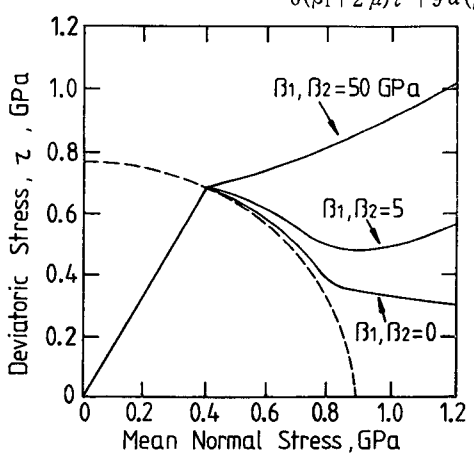

Fig. 2 Deviatoric stress vs. mean normal stress responses under uniaxial strain compression, with various values of β_1 and β_2. The dashed curve denotes initial yield surfaces.

그리고

$$\kappa=\frac{2}{3}\beta_1\tilde{\tau}(\dot{e}^p{}_{11}-\dot{e}^p{}_{22})+\beta_2\tilde{p}(\dot{e}^p{}_{11}+2\dot{e}^p{}_{22}) \tag{30}$$

또한

$$\tilde{p}=-p=(s_{11}+2s_{22})/3\,;\quad \tilde{\tau}=-\tau=s_{11}-s_{22} \tag{31}$$

로 유도되고, 여기서 p와 τ는 순수압축응력과 편차압축응력을 나타낸다.

Fig. 2는 여러 β_1과 β_2의 값에 대해 1축 변형율 압축상태 하의 편차압축응력-순수압축응력의 관계를 보이고 있다. 곡선들은 (28)~(30)식을 사용하여 계산되어 졌으며, 점선은 초기 항복상태를 표시한다. 작은 값의 가공경화변수에 대해서는 초기 항복 후 곧 바로 강하(dip)현상이 응력경로 상에 나타나지만, 큰 값에서는 강화현상이 나타나지 않는다. 본 논문에서는 강하현상이 일어나는 가공경화 변수의 임계치를 찾으려 시도하지는 않았다.

4.3 3축 응력 압축(Triaxial Stress Compression)

이제 3축 응력 압축상태의 문제(즉, $s_{11}\geq\tilde{p}_c$ and $s_{22}=s_{33}=\tilde{p}_c$)을 고려한다. 여기서 $p_c(=-\tilde{p}_c\geq 0)$는 재료의 전표면에 가해진 정수압(constant confining pressure)을 나타낸다. 한편 축 대칭성으로부터 $e_{22}=e_{33}$, $e^p{}_{22}=e^p{}_{33}$라고 가정하면

$$\tau_{KL}=\frac{1}{3}(s_{11}-\tilde{p}_c)b_{KL},\quad \gamma_{KL}=\frac{1}{3}(e_{11}-e_{22})b_{KL},$$
$$\gamma_{KL}{}^p=\frac{1}{3}(e^p{}_{11}-e_{22}{}^p)b_{KL},\quad \bar{s}=\frac{1}{3}(s_{11}+2\tilde{p}_c),$$
$$\bar{e}=\frac{1}{3}(e_{11}+2e_{22}),\quad \bar{e}^p=\frac{1}{3}(e^p{}_{11}+2e_{22}{}^p), \tag{32}$$

그리고

$$\phi=1-(1-\phi_0)\exp(-3\bar{e}) \tag{33}$$

식(32)를 이용하면 소성항복의 조건식 $(14)_1$은

$$f=\frac{1}{9}[3(s_{11}-\tilde{p}_c)^2+\alpha\phi(s_{11}+2\tilde{p}_c)^2]-\kappa \tag{34}$$

가 되고, $s_{22}=s_{33}=\tilde{p}_c$와 (12)식을 이용하면

$$e_{22}=e_{22}{}^p+\xi(e_{11}-e^p{}_{11})+\frac{3\tilde{p}_c}{2\mu+6k} \tag{35}$$

가 되며, 여기서 $\xi=(2\mu-3k)/(2\mu+6k)$이다. 그러므로 (8)과 (12)식으로부터

$$s_{11}=\frac{1}{\mu+3k}\{9\mu k(e_{11}-e^p{}_{11})-(2\mu-3k)\tilde{p}_c\} \tag{36}$$

$$\dot{e}_{11}{}^p=\frac{\zeta_1[4\mu(1-\xi)(s_{11}-\tilde{p}_c)+\alpha(1+2\xi)(s_{11}+2\tilde{p}_c)\{2\phi k+(1-\phi)(s_{11}+2\tilde{p}_c)/3\}]\dot{e}_{11}}{3(\Gamma+\Lambda)+2(\zeta_2-\xi\zeta_1)\{2\mu(s_{11}-\tilde{p}_c)-2\alpha\phi k(s_{11}+2\tilde{p}_c)-\alpha(1-\phi)(s_{11}+2\tilde{p}_c)^2/3\}}$$
$$\dot{e}_{22}{}^p=\frac{[-(s_{11}-\tilde{p}_c)+\frac{\alpha}{3}(s_{11}+2\tilde{p}_c)\{2\phi+(1-\phi)(s_{11}+2\tilde{p}_c)/3k\}]\dot{e}_{11}{}^p}{(2s_{11}-\tilde{p}_c)+\frac{\alpha}{3}(s_{11}+2\tilde{p}_c)\{2\phi+(1-\phi)(s_{11}+2\tilde{p}_c)/3k\}} \tag{37}$$

그리고

$$\kappa=\frac{2}{3}\beta_1(s_{11}-\tilde{p}_c)(\dot{e}_{11}{}^p-\dot{e}_{22}{}^p)$$
$$+\frac{1}{3}\beta_2(s_{11}+2\tilde{p}_c)(\dot{e}_{11}{}^p+2\dot{e}_{22}{}^p) \tag{38}$$

여기서

$$\zeta_1=\frac{2}{3}(s_{11}-\tilde{p}_c)+\frac{1}{9}\alpha(s_{11}+2\tilde{p}_c)\cdot$$
$$\left\{2\phi+\frac{1}{3k}(1-\phi)(s_{11}+2\tilde{p}_c)\right\}, \tag{39}$$

$$\zeta_2=-\frac{1}{3}(s_{11}-\tilde{p}_c)+\frac{1}{9}\alpha(s_{11}+2\tilde{p}_c)\cdot$$
$$\left\{2\phi+\frac{1}{3k}(1-\phi)(s_{11}+2\tilde{p}_c)\right\} \tag{39}$$

그리고

$$\Gamma+\Lambda=\frac{2}{3}(\beta_1+2\mu)(s_{11}-\tilde{p}_c)^2+\frac{\alpha}{27k}(\beta_2+2a\phi k)\cdot$$
$$(s_{11}+2\tilde{p}_c)^2\{6\phi k+(1-\phi)(s_{11}+2\tilde{p}_c)\} \tag{40}$$

압력 p_c(confining pressure)가 제거된 경우, (32)~(40)식들은 1축 응력의 압축상태를 위한 방정식으로 유도된다.

1축 응력 압축 시의 탄성-소성 변형중의 프와송비($\nu=-d\epsilon_2/d\epsilon_1$)에 대한 기공성 ϕ의 영향도 조사하였다. 이것은 $\beta_1=\beta_2=5$ GPa 일 때 (37)과 (38)로부터 계산하였는데, Kuhn과 Downey[2]가 제안한 식에 적용하면 $\nu=\frac{1}{2}(1-\phi)^{1.194}$ 관계를 얻게 된다. 이 식은 ν와 ϕ의 거의 직선적인 관계를 나타내며, 극한 경우로서 $\phi\to 0$일 때는 통상적인 소성변형에서 보듯이 $\nu\to\frac{1}{2}$된다.

Fig. 3은 $\beta_1=\beta_2=5$ GPa 일 때 정수압, 1축 변형율 압축, 1축 응력 압축 하에서 순수응력(mean normal stress)과 체적변형율의 관계를 나타낸다. 여기서 순수압력의 압축조건에 비해, 편차응력(혹은 전단응력)이 존재하면 체적압축을 더 향상시킨다는 것을 이론적으로도 예측할 수 있다.

Fig. 4는 다공질 금속의 초기 항복곡선(실선)과 후속적인 항복곡선(점선)을 나타낸다. 예를들어, 후속항복곡선을 찾기 위한 계산자료 △(아래 점선 상)는 다음의 가중경로로부터 구해졌다. (i) 초기 항복면을 넘어서 $p_c=1.0$ GPa까지 정수압 압축한 뒤, (ii) 임의의 압력(즉 $p_c=0,\ 0.2,\cdots,0.8$ GPa)까지 정수압하중을 제거한 뒤, 그리고 (iii) 압력 p_c를 일정하게 유지하면서 축 방향으로 압축을 가한다. 계산에는 $\beta_1=3$ GPa

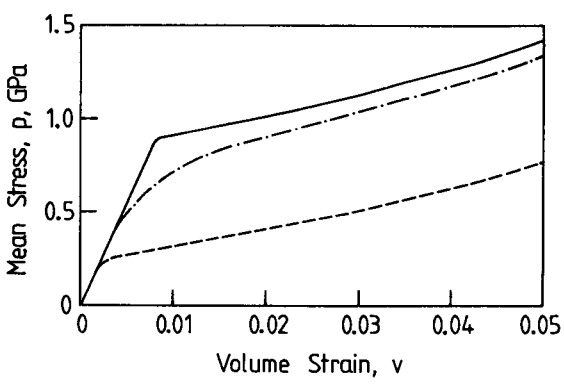

Fig. 3 Mean normal stress vs. volume strain responses under hydrostatic(solid), uniaxial strain compression(dash-dot), and uniaxial stress compression(dash)

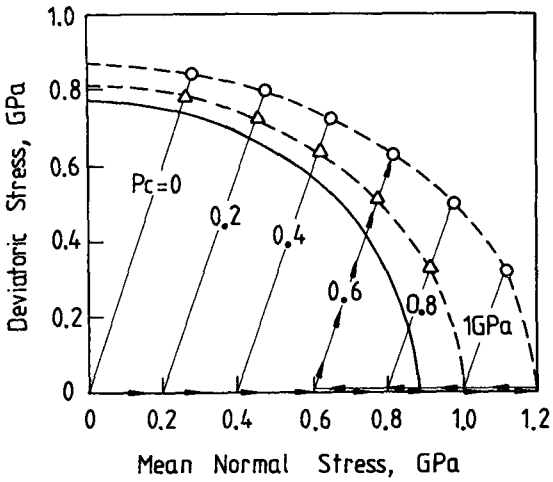

Fig. 4 Inital and subsequent yield surfaces. The solid curve denotes initial yield surface. Subsequent yield surfaces are calculated from (37) and (38), with the use of (22) and (23). Upper dashed curve is precycled to $p_c=1.2$ GPa and lower dashed curve is to $p_c=1.0$ GPa

와 $\beta_2=0.7$ GPa 를 사용하였다. 계산자료 ○(위의 점선상)는 정수압 $p_c=1.2$ GPa 까지의 가중경로를 거친 다공질 금속의 경우를 나타낸 것이다. 다공성 만을 가공변수로써 사용한 소성항복 조건식과는 달리 (14)식으로 부터 후속되는 항복면은 기공성 만으로는 결정될 수 없으며, 후속하는 항복곡선은 가중경로에 따른 가공경화와 기공성의 변화를 모두 고려하여 결정된다.

5. 실험치와의 비교 검토

Shipman[27] 등이 실험으로 구한 다공질 텅스텐의 실험치와 본 논문에서 제안한 구성 방정식에 의한 이론해를 비교 검토하였다. Fig. 5에서는 이론적인 정수압 압축하의 압축 거동과 실험치를 비교하였다. 여기서 이론 곡선은 $\beta_2=0.7$ GPa 일 때 (22)와 (23)을 이용하여 구했다. Fig. 6에서는 1축 변형을 압축에서의 응력경로의 이론치와 실험치를 비교하였다. 이론곡선은 $\beta_1=3$ GPa 와 이미 구한 $\beta_2=0.7$ GPa 를 사용하여 (28)와 (29)로부터 계산되었다. 여기서 점선으로 된 곡선은 초기 항복곡선이다. Fig. 7에서는 Fig. 6에서 사용된 β_1 과 β_2 의 값으로 1축 변형을 압축 시의 축 응력과 축 변형율과의 관계를 이론치와 실험치로

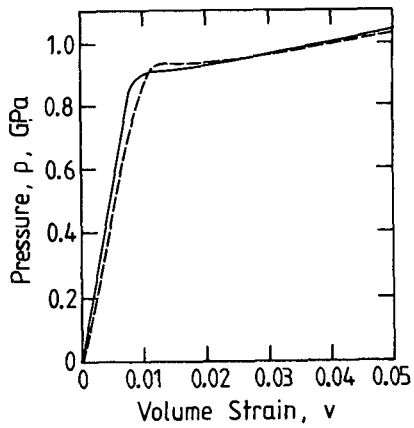

Fig. 5 Comparison of a theoretical hydrostatic compression response(solid) with the experimental data(dash)

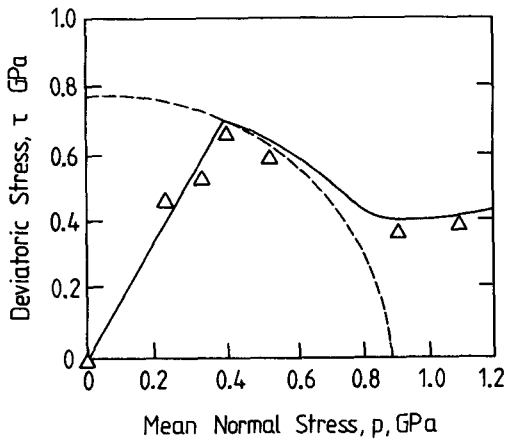

Fig. 6 Comparison of a theoretical uniaxial strain compression response(solid) with the experimental data(△) on deviatoric stress vs. mean normal stress relation for porous tungsten. The dashed curve denotes initial yield surface

비교하였다. Kim[26]에 의해 얻어진 결과에 비해 높은 변형율 영역에서도 더 잘 일치함을 볼 수 있다. 1축 응력 압축에서의 축 응력과 축 변형율과의 이론적인 관계를 Fig. 7에 보였다.

마지막으로 Fig. 8에는 다공질 금속의 가공경화 거동을 보여준다. 두개의 곡선은 $p_c=0.8$ GPa 로 한정되어 있는 동안, 1축방향으로 압축된 다공질 텅스텐의 전단응력과 축 변형율과의 관계를 보여주고 있다. 위의 곡선은 정수압 압축으로 항복점을 넘어 $p_c=1.0$ GPa

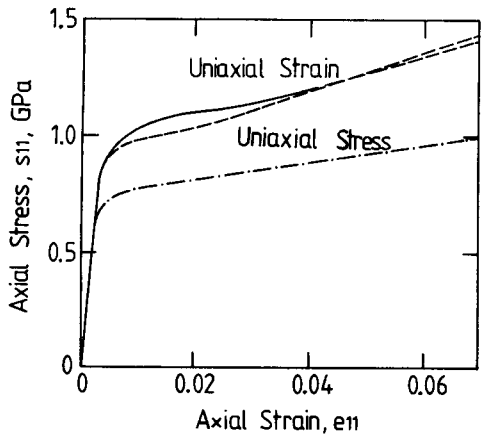

Fig. 7 Comparison of theoretical uniaxial strain compression response (solid) with experimental data (dash) on axial stress vs. axial strain relation for porous tungsten. The dash-dotted curve denotes a theoretical prediction of uniaxial stress compression response

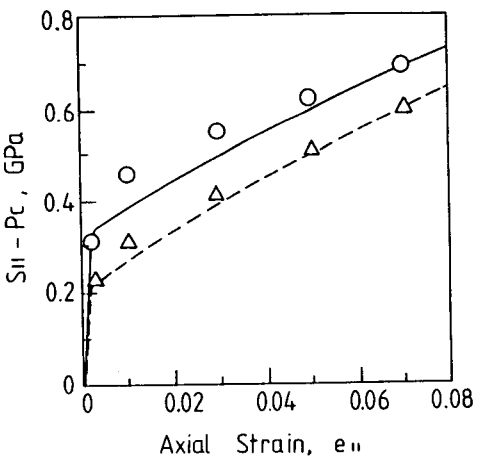

Fig. 8 Deviatoric stress vs. axial strain responses with $p_c=0.8$ GPa for two porous tungsten specimens which have different previous loading histories. Both curves are calculated from (37) and (38), with the use of (22) and (23). The upper curve (solid) was precycled to $p_c=1.0$ GPa and the lower curve (dashed) was not yielded hydrostatically. The circles denotes experimental data for the upper and the triangles for the lower curve

까지 우선 압축하고 다시 0.8 GPa까지 하중을 제거시킨 뒤, 축 방향으로 압축하여 얻어졌다. 아래 곡선은 정수압 압축상태 하의 탄성영역인 $p_c=0.8$ GPa까지 압축한 후, 축 방향 압축을 하여 얻어졌다. 두 곡선은 (22)와 (23)을 이용하여 (37)과 (38)로부터 계산되었다. 여기서 1축 변형율 및 정수압 압축에서 각각 구한 $\beta_1=3$ GPa와 $\beta_2=0.7$ GPa을 사용했다. 또, ○는 위의 곡선의 실험치이고, △는 아래 곡선의 실험치이다. 아래 곡선의 실험치와 이론치는 매우 잘 일치하며 위 곡선의 실험치와 이론해도 비교적 잘 일치한다. $p_c=1.0$ GPa까지의 압축으로 인해 일단 항복면이 팽창되었기 때문에, 하중을 제거할 경우 후속으로 소성항복 시키기 위한 전단응력은 이 때문에 증가됨을 알 수 있다.

6. 결 론

다공질 금속의 탄성-소성 거동시의 모재의 변형경화 및 기공의 변형으로 인한 변형경화를 고려하여 본 논문에서 제안한 특수 구성방정식을 사용하여 여러 하중 조건에서도 이론치와 실험치가 잘 일치함을 알 수 있었다. 가공경화 변수 β_1와 β_2의 계수가 클 때는 1축 변형율 압축에서 p와 τ의 관계로 나타나는 응력경로에서 강하현상이 나타나지 않으며, 또 전단력에 의한 압축향상도 예측할 수가 있다. 소성항복점을 넘어서까지 압축함으로 항복면이 팽창되어서, 이렇게 미리 압축된 시편을 또 다시 항복시키는 데 요구되는 전단응력은 더 증가되어야 한다는 사실도 본 논문에서 제안된 구성방정식으로 예측할 수가 있다.

후 기

본 연구의 수행은 산업과학기술연구소(RIST)의 연구과제에서 지원된 것으로 이에 감사드리는 바입니다.

참 고 문 헌

(1) Bocksteigel, G. and Hewing, J., 1965, "Kritsche Betrachtung des Schrifttums uber den Verdichtugsvorgang beim Kaltpressen von Pulvern in Starren Pressformen", Arch. Eisenhuttenu., Vol. 36, p. 751.

(2) Kuhn, H.A. and Downey, C.L., 1971, "Deformation Characteristics and Plastic Theory of Sintered Powder Materials", Int. J. Powder Metall., Vol. 7, p. 15.

(3) Kuhn, H.A., 1976, "Effects of Porosity in Material Processing", The Effect of Voids on Material Deformation, AMD-16, Cowin, S.C. and Carroll,

M.M., eds., ASME, New York, p. 171.

(4) Torre, C., 1948, "Theorie und Verhalten zusammengepreateer Pulver", Berg -u. Huttenmann. Monatsh., Vol. 93, p. 62.

(5) Mackenzie, J.K., 1950, "The Elastic Constants of a Solid Containing Spherical Holes", Proc. Phys. Soc., Vol. B63, p. 2.

(6) Carroll, M.M. and Holt, A.C., 1972, "Static and Dynamic Pore-Collapse Relations for Ductile Porous Solids", J. Appl. Phys., Vol. 44, p. 1626.

(7) Carroll, M.M. and Holt, A.C., 1973, "Steady Waves in Ductile Porous Solids", J. Appl. Phys., Vol. 44, p. 4388.

(8) Carroll, M.M. and Kim, K.T., 1984, "Pressure-Density Equations for Porous Metals and Metal Powders", Powder Metall., Vol. 27, p. 153.

(9) Kim, K.T. and Carroll, M.M., 1987, "Compaction Equations for Strain Hardening Porous Materials", Int. J. Plasticity, Vol. 3, p. 63.

(10) Carroll, M.M. and Carman, R.A., 1985, "Discussion of Influence of Yield Surface Curvature on Flow Localization in Dilant Plasticity by Mear, M.E. and Hutchinson, J.W.", Mechanics of Materials, Vol. 4, p. 409.

(11) Green, R.J., 1972, "A Plasticity Theory for Porous Solids", Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, p. 215.

(12) Gurson, A.L., 1977, "Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth-Part 1. Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media", ASME, J. Eng. Mat. Tech., Vol. 99, p. 2.

(13) Shima, S. and Oyane, M., 1976, "Plasticity Theory for Porous Metals", Int. J. Mech. Sci., Vol. 18, p. 285.

(14) Johnson, J.N., Shipman, F.H., Green, S.J. and Jones, A.H., 1975, "The Influence of Deviatoric Stress in the Compaction of Porous Metals at High Pressure", Proc. Fourth Int. Conf. on High Pressure, the Physio-Chemical Soc. of Japan, Kyoto, p. 130.

(15) Martynova, I.F. and Shtern, M.B., 1978, "An Equation for the Plasticity of a Porous Solid Allowing for True Strains of the Matrix Material", Porosh. Metall., Vol. 1, p. 23.

(16) Green A.E. andt Naghdi, P.M.,1985, "A General Theory of an Elastic-Plastic Continuum", Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 18, p. 251.

(17) Green, A.E. and Naghdi, P.M., 1966, "Thermodynamic Development of Elastic-Plastic Continua", Proc. IUTAM symp. on Irrever. Aspects of Cont. Mech. and Transfer of Phys. Charac. in Moving Fluids, Parkus, H. and Sedov, L.I., eds., Springer-Verlag.

(18) Naghdi, P.M. and Trapp, J.A., 1975, "The Significance of Formulating Plasticity Theory with Reference to Loading Surfaces in Strain Space", Int. J. Eng. Sci., Vol. 13, p. 785.

(19) Naghdi, P.M. and Trapp, J.A., 1975, "Restriction on Constitutive Equations of Finitely Deformed Elastic-Plastic Materials", Q.J. Mech. Appl. Math., Vol. 28, p. 25.

(20) Casey, J. and Naghdi, P.M., 1981, "On the Characterization of Strain Hardening in Plasticity", J. Appl. Mech., Vol. 48, p. 285.

(21) Casey, J. and Naghdi, P.M., 1984, "Further Constitutive Results in Finite Plasticity", Q. Mech. Appl. Math., Vol. 37, p. 231.

(22) Casey, J. and Naghdi, P.M., 1984, "Strain Hardening Response of Elastic-Plastic Materials", presented at a Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications, Tucson, AZ, Jan. 10~14, 1983, In Mechanics of Engineering Materials, Desai, C.S. and Gallagher, R.H., eds., Chap. 4, Wiley, New York.

(23) Shipman, F.H., Abou-Sayed, A.S. and Jones, A.H., 1974, "The Mechanical Response of a Porous Uranium Alloy", Proc. AEC/AMMRC Conf. Phys. Metall., Vail, Colorado, Feb. 12~14.

(24) Shock, R.N., Abey, A.E. and Duba, A., 1976, "Quasi-Static Deformation of Porous Beryllium and Aluminum", J. Appl. Phys., Vol. 47, p. 53.

(25) Carroll, M.M., 1980, "Mechanical Response of Fluid-Saturated Porous Materials", Proc. 15th Int. Congress of Theo. Appl. Mech., Rimrott, F.P.J. and Tabarrok, B., eds., North-Holland, New York.

(26) 김기태 1987, "다공질 금속의 비탄성거동을 위한 특수 구성방정식의 형성(Ⅰ)—탄성·완전소성 재료—", 대한기계학회논문집, 제 11 권 제 6 호, pp. 975~981.

(27) Shipman, F.H., Abou-Sayed, A.S. and Jones, A.H., 1975, "Physical and Mechanical Characterization of a Porous Tungsten", Report No. p. 75~59, Terra-Tek Inc.,Salt Lake City, Utah.