

<論 文>

조화운동하는 기반상에서 작동하는 비선형 동흡진기의 동특성에 관한 연구

김 광 식* · 안 찬 우**

(1987년 9월 15일 접수)

A Study on the Dynamic Characteristics of Non-Linear Dynamic Vibration Absorber Excited by Harmonic Ground Motion

Kwang Sic Kim and Chan Woo Ahn

Key Words: Damping Ratio(감쇠비), Harmonic Balance Methods(조화평형법), Non-linear Dynamic Vibration Absorber(비선형동흡진기), Unstable Region(불안정영역)

Abstract

This study is a research on the dynamic characteristics of non-linear dynamic vibration absorber in which harmonic motion is applied to the foundation of the main system. The amplitude ratio of the system with non-linear dynamic vibration absorber was obtained by harmonic balance methods and the unstable region was determined by stability analysis.

As a result of study, the amplitude ratio decreases as mass ratio increases.

기 호 설 명

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| A_1 : 기반에 대한 주진동계의 상대진폭 | M_2 : 부진동계의 질량 |
| A_3 : 질량의 상대진폭 | t : 시간 |
| C_1 : 주진동계의 감쇠계수 | γ : 모델상수 |
| C_2 : 부진동계의 감쇠계수 | ζ_1 : 주진동계의 감쇠비 |
| C_{cr1} : 주진동계의 임계감쇠계수 | ζ_2 : 부진동계의 감쇠비 |
| C_{cr2} : 부진동계의 임계감쇠계수 | μ : 질량비 |
| f : 고유진동수비 | ω_1 : 주진동계의 고유진동수 |
| h : 비선형계수 | ω_2 : 부진동계의 고유진동수 |
| k_1 : 주진동계의 스프링상수 | ω_r : 진동수비 |
| k_2 : 부진동계의 스프링상수 | |
| M_1 : 주진동계의 질량 | |

1. 서 론

* 정회원, 한양대학교 공과대학 정밀기계공학과
** 정회원, 동아대학교 공과대학 기계공학과

진동방지법으로 이용되어지는 동흡진기에 대한 연구는 주진동계에 감쇠가 없는 경우에 Den Hartog⁽¹⁾는

최적고유진동수비와 최적감쇠비를 질량비만의 함수로서 구하였다. 주진동계에 감쇠가 있는 경우에는 Randall⁽²⁾, 五百井⁽³⁾ 등에 의해서 최근에 연구가 활발히 진행되고 있다.

비선형동흡진기에 대한 연구로서는 Hunt 와 Nissen⁽⁴⁾, Rangacharyulu⁽⁵⁾ 등은 주진동계에 감쇠가 없는 경우에 대해서 연구하였으며, Soom 과 Lee⁽⁶⁾ 등은 주진동계에 감쇠가 있는 경우에 대한 연구를 하였다. 그러나 자동차 및 항공기 등의 기계장치에서는 진동계의 기반이 흔들리는 경우에 해당되며 이와 같이 기반의 변위를 받는 주진동계에 부착된 비선형동흡진기에 대한 연구가 아직도 이루어지지 않고 있다.

본 연구에서는 기반의 주기변위를 받는 주진동계에 비선형스프링과 선형감쇠를 갖는 비선형동흡진기가 부착된 진동계의 운동방정식을 유도하여 조화바란스법으로 지면에 대한 주진동계의 상대진폭의 진폭비를 산출하고 안정성해석을 하였으며, 비선형성의 영향과 스프링의 경·연성에 따르는 특성을 규명하였다.

2. 이론해석

기반의 주기변위를 받는 주진동계에 비선형동흡진기가 부착된 진동계는 Fig. 1 과 같다. Fig. 1 의 진동계에서 $x_1=y_1-x_0$, $x_2=y_2-x_0$ 로 놓고 운동방정식을 구하면 식 (1) 과 같다.

$$\begin{aligned} M_1\ddot{x}_1+k_1x_1+C_1\dot{x}_1-k_2(x_2-x_1)-h(x_2-x_1)^3 \\ -C_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) &= X_0\Omega^2 M_1 \cos \Omega t \\ M_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)+h(x_2-x_1)^3 \\ +C_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) &= X_0\Omega^2 M_2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1) 을 무차원화시키기 위하여 $C_{cr1}=2\sqrt{M_1k_1}$, $C_{cr2}=2\sqrt{M_2k_2}$, $f=\omega_2/\omega_1$, $\zeta_1=C_1/C_{cr1}$, $\zeta_2=C_2/C_{cr2}$, $\mu=M_2/M_1$, $\tau=\omega_1 t$, $\omega_r=\Omega/\omega_1$, $\omega_1=\sqrt{k_1/M_1}$, $\omega_2=\sqrt{k_2/M_2}$, $\gamma=h/k_1$ 를 식 (1) 에 대입하여 정리하면 식

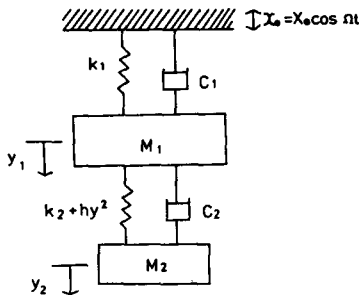


Fig. 1 System with non-linear dynamic vibration absorber

(2) 와 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1+x_1+2\zeta_1\dot{x}_1-\mu f^2(x_2-x_1)-\gamma(x_2-x_1)^3 \\ -2\zeta_2\mu f(\dot{x}_2-\dot{x}_1) &= X_0\omega^2 \cos \omega\tau \\ \mu\ddot{x}_2+\mu f^2(x_2-x_1)+\gamma(x_2-x_1)^3 \\ +2\zeta_2\mu f(\dot{x}_2-\dot{x}_1) &= \mu X_0\omega^2 \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2) 에서 “ ’ ” 는 τ 에 대한 미분을 나타내며 $x_3=x_2-x_1$ 로 놓고 식 (2) 에 대입해서 정리하면 식 (3) 과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1+x_1+2\zeta_1\dot{x}_1-\mu f^2x_3-\gamma x_3^3-2\zeta_2\mu f\dot{x}_3 &= X_0\omega^2 \cos \omega\tau \\ \mu\ddot{x}_3+\mu f^2x_3+\gamma x_3^3+2\zeta_2\mu f\dot{x}_3+\mu\dot{x}_3 &= \mu X_0\omega^2 \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3) 에서

$$\begin{aligned} (1+\mu)\ddot{x}_1+x_1+2\zeta_1\dot{x}_1+\mu\dot{x}_3 &= (1+\mu)X_0\omega^2 \cos \omega\tau \\ \mu\ddot{x}_3+\mu f^2x_3+\gamma x_3^3+2\zeta_2\mu f\dot{x}_3+\mu\dot{x}_3 &= \mu X_0\omega^2 \cos \omega\tau \end{aligned} \quad (4)$$

로 표시할 수 있다. 정상상태의 응답은 대칭형 비선형 복원력을 가지므로

$$\begin{aligned} x_1 &= |A_1| \cos(\omega\tau + \phi_1) \\ x_3 &= |A_3| \cos(\omega\tau + \phi_3) \end{aligned} \quad (5)$$

로 놓고 비선형계수가 미소하다고 가정하면

$$x_3^3 = |A_3|^3 \cos^3(\omega\tau + \phi_3) \doteq \frac{3}{4} |A_3|^3 \cos(\omega\tau + \phi_3) \quad (6)$$

이므로 식 (5), (6) 을 식 (4) 에 대입해서 조화바란스법⁽⁷⁾에 의해 다음 식 (7) 이 구해진다.

$$\begin{aligned} \{1-(1+\mu)\omega^2\} |A_1| \cos \phi_1 - 2\zeta_1\omega |A_1| \sin \phi_1 \\ -\mu\omega^2 |A_3| \cos \phi_3 = (1+\mu) X_0\omega^2 \\ \{-1+(1+\mu)\omega^2\} |A_1| \sin \phi_1 - 2\zeta_1\omega |A_1| \\ \cos \phi_1 + \mu\omega^2 |A_3| \sin \phi_3 = 0 \\ -\mu\omega^2 |A_1| \cos \phi_1 + \left(\mu f^2 - \mu\omega^2 + \frac{3}{4}\gamma |A_3|^2\right) \\ |A_3| \cos \phi_3 - 2\zeta_2\mu f\omega |A_3| \sin \phi_3 = \mu\omega^2 X_0 \\ \mu\omega^2 |A_1| \sin \phi_1 + \left(-\mu f^2 + \mu\omega^2 - \frac{3}{4}\gamma |A_3|^2\right) \\ |A_3| \sin \phi_3 - 2\zeta_2\mu f\omega |A_3| \cos \phi_3 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7) 에서 $|A_3|^2$ 과 $|A_1|^2/X_0^2$ 에 대한 식 (8), (9) 가 산출된다.

$$e_1 |A_3|^6 + e_2 |A_3|^4 + e_3 |A_3|^2 + e_4 = 0 \quad (8)$$

식 (8) 에서

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[\{1-(1+\mu)\omega^2\}^2 + 4\zeta_1^2\omega^2 \right] \left(\frac{3}{4}\gamma\right)^2 \\ e_2 &= 2\left[\{1-(1+\mu)\omega^2\}^2 (\mu f^2 - \mu\omega^2) - \{1-(1+\mu)\omega^2\} \right. \\ &\quad \left. (\mu^2\omega^4) + (4\zeta_1^2\omega^2) (\mu f^2 - \mu\omega^2) \right] \left(\frac{3}{4}\gamma\right) \\ e_3 &= \left[\{1-(1+\mu)\omega^2\}^2 (\mu f^2 - \mu\omega^2)^2 + 16\zeta_1^2\zeta_2^2\mu^2 f^2\omega^4 \right. \\ &\quad \left. + \mu^4\omega^8 - 2\{1-(1+\mu)\omega^2\} (\mu f^2 - \mu\omega^2) (\mu^2\omega^4) \right. \\ &\quad \left. + 8\zeta_1\zeta_2\mu^3\omega^6 + \{1-(1+\mu)\omega^2\}^2 (4\zeta_2^2 f^2\mu^2\omega^2) \right. \\ &\quad \left. + (4\zeta_1^2\omega^2) (\mu f^2 - \mu\omega^2)^2 \right] \\ e_4 &= -X_0^2 (1 + 4\zeta_1^2\omega^2) (\mu^2\omega^4) \end{aligned}$$

이고,

$$|A_1|/X_0 = |Y_1 - X_0|/X_0 = \{(a^2 + b^2)/(c^2 + d^2)\}^{1/2} \quad (9)$$

식 (9)에서

$$a = -\left\{ \mu f^2 - \mu \omega^2 + \left(\frac{3}{4}\gamma\right) |A_3|^2 \right\} \{1 - (1 + \mu)\omega^2\} + \mu^2 \omega^4$$

$$b = -2\zeta_2 \mu f \omega^3 (1 + \mu)$$

$$c = -4\mu^2 \omega^4 + \left\{ \mu f^2 - \mu \omega^2 + \left(\frac{3}{4}\gamma\right) |A_3|^2 \right\}$$

$$\{1 - (1 + \mu)\omega^2\} - 4\zeta_1 \zeta_2 \mu f \omega^2$$

$$d = \left\{ \mu f^2 - \mu \omega^2 + \left(\frac{3}{4}\gamma\right) |A_3|^2 \right\}$$

$$(2\zeta_1 \omega) + 2\zeta_2 \mu f \omega \{1 - (1 + \mu)\omega^2\}$$

이다. 식 (9)에서 $\gamma=0$ 로 놓으면 선형계의 결과⁽³⁾와 일치한다.

안정성 해석은 식 (8)을 $|A_3|$ 로 미분하여 0으로 놓으면 진폭곡선의 접선방정식이 다음과 같이 구해진다.

$$3e_1 |A_3|^4 + 2e_2 |A_3|^2 + e_3 = 0 \quad (10)$$

식 (10)에서 구해지는 2개의 진동수비에 대한 진폭곡선의 사이부분은 불안정영역이고 다른 부분은 안정영역이며 이와 같은 안정성은 일자유도계의 안정성결과와 일치한다⁽⁷⁾. 또한 식 (8)에서 불안정영역에서는 3개의 실근이 존재하며 안정영역에서는 1개의 실근이 존재한다.

3. 수치해석 및 고찰

Fig. 1과 같은 진동계에서 제 1공진점의 진폭비를 η_1 , 제 2공진점의 진폭비를 η_2 라 할 때 최적고유진동수비 및 최적감쇠비를 적용하면 주어진 질량비에 대해서 제 1공진점과 제 2공진점에서 진폭비의 높이가 같게 되고, 진폭비의 크기도 가장 작게 된다. 이와 같은 동흡진기의 최적조건인 최적고유진동수비와 최적감쇠비를 구하기 위하여 $F_1(f, \zeta_2) = \eta_1 - \eta_2$, $F_2(f, \zeta_2) = \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right)$ 인 두 함수를 고려해서 주어진 질량비와 주진동계의 감쇠비에 대한 F_1 , F_2 를 계산하고 F_1 과 F_2 가 모두 0으로 되는 f , ζ_2 를 결정한다⁽³⁾.

수치해석을 실행한 결과 최적고유진동수비와 최적감쇠비를 구할 수 있으며, 주진동계의 감쇠비가 $\zeta_1=0$, 0.1인 경우에 질량비에 대한 최적고유진동수비를 표시하면 Fig. 2와 같다. Fig. 2에서 알 수 있는 바와 같이 질량비가 증가함에 따라 최적고유진동수비는 서서히 감소하며 주진동계에 감쇠가 없는 $\zeta_1=0$ 인 경우와 주진동계의 감쇠비가 $\zeta_1=0.1$ 인 경우는 거의 일치한다.

Fig. 3은 $\zeta_1=0, 0.1$ 인 경우에 질량비에 대한 최적

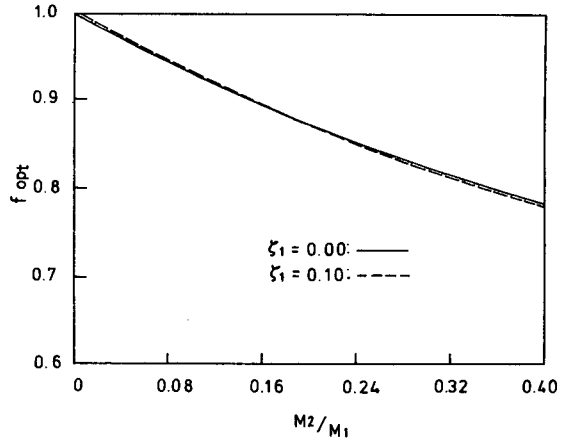


Fig. 2 Optimal natural frequency ratio versus mass ratio

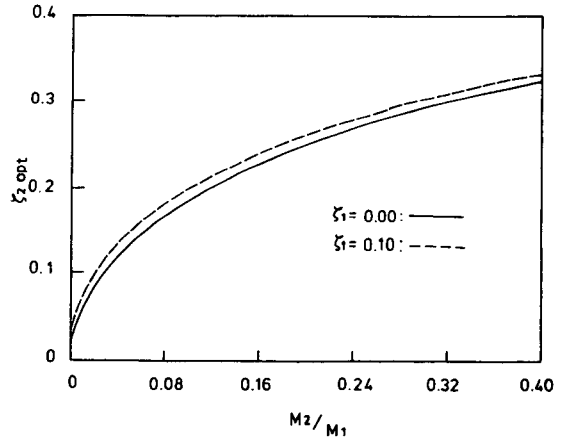


Fig. 3 Optimal damping ratio versus mass ratio

감쇠비를 나타낸 것이며, 질량비가 증가함에 따라 최적감쇠비는 서서히 증가한다. 또한 주진동계에 감쇠가 없는 $\zeta_1=0$ 인 경우에 비해서 $\zeta_1=0.1$ 인 경우에 최적감쇠비는 증가하였음을 알 수 있다.

Fig. 4는 조화운동을 하는 기반상에서 작동되는 진동계에서 주진동계의 감쇠비가 0.1, $\gamma=0$ 와 $\gamma=0.005$ 일 때 질량비가 0.1, 0.2, 0.3 및 0.4인 경우에 최적고유진동수비와 최적감쇠비를 적용하여 상대진폭을 나타낸 것이다. Fig. 4에서 알 수 있는 바와 같이 $\gamma=0$ 와 $\gamma=0.005$ 인 선형과 비선형동흡진기가 부착된 경우 질량비가 증가하면 상대진폭의 크기는 감소하고 있으며 비선형진동계에서 일어날 수 있는 점프현상과 불안정영역은 부진동계의 감쇠비가 크기 때문에 존재하지 않음을 알 수 있다.

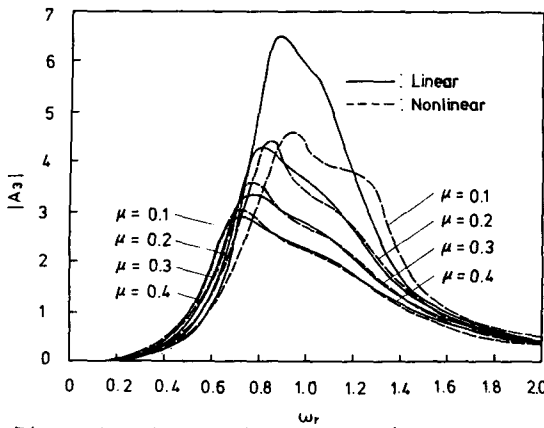


Fig. 4 Relative amplitude versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$)

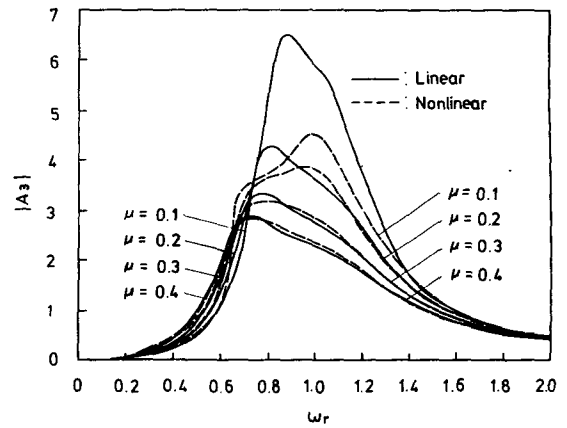


Fig. 6 Relative amplitude versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$)

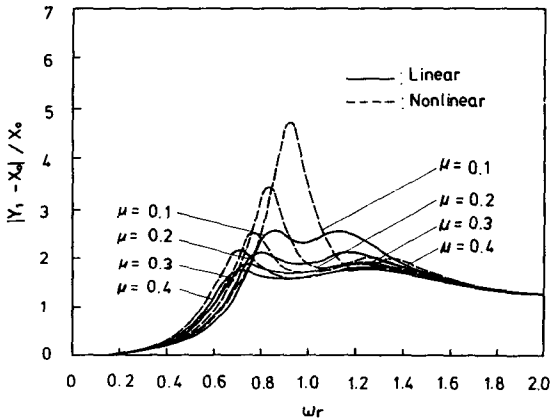


Fig. 5 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$)

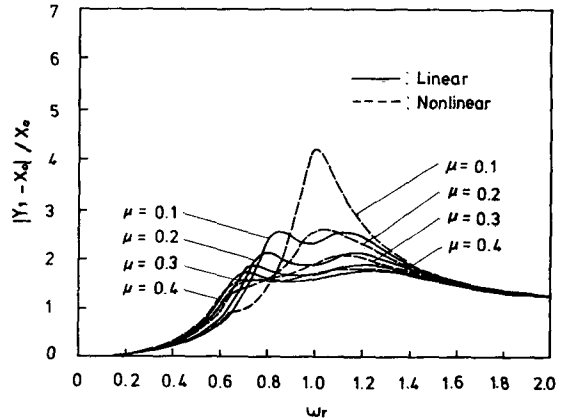


Fig. 7 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$)

Fig. 5는 Fig. 4와 같은 조건에서 기반에 대한 주진동계의 상대진폭비를 나타낸 것이다. Fig. 5에서 알 수 있는 바와 같이 선형동흡진기를 부착한 경우에는 각각의 질량비에 대해 제 1공진점과 제 2공진점에서의 진폭비는 거의 같으나 비선형동흡진기를 부착한 경우에는 제 1공진점의 진폭비가 제 2공진점의 진폭비보다 크며 비선형진동계에서 일어날 수 있는 점프현상과 불안정영역은 존재하지 않는다. 또한 Fig. 5에서 질량비가 증가하면 진폭비는 감소하고 공진점에서의 진동수비도 서서히 감소함을 알 수 있다. 이와 같은 현상은 주진동계에 조화기진력이 작용할 때⁽⁸⁾와 같은 현상이며, 진동수비가 0일 때 주진동계에 조화기진력이 작용할 때는 진폭비가 1인 데 비해서 기반에 조화기진력이 작용할 때는 진폭비가 0이며 진동수비가 무한히 증가하면 주진동계에 조화기진력이 작용할 때는 0으로 수렴하나 기반에 조화기진력이 작용할 때는 1에

수렴한다.

Fig. 6은 주진동계의 감쇠비가 0.1, $\gamma=0$ 와 $\gamma=-0.005$ 일 때 최적진동수비와 최적감쇠비를 적용한 경우, 질량비가 변화함에 따라 진동수비에 대한 상대진폭을 나타낸 것이다. Fig. 6에서 알 수 있는 바와 같이 선형과 비선형동흡진기가 부착된 경우 질량비의 증가에 따라 상대진폭의 크기는 감소하고 있으며 $\gamma=-0.005$ 인 경우에 비선형진동계에서 일어날 수 있는 점프현상과 불안정영역은 존재하지 않음을 알 수 있다.

Fig. 7은 Fig. 6과 같은 조건에서 진동수비에 대한 주진동계의 상대진폭비를 나타낸 것이다. $\gamma=-0.005$ 인 연성스프링을 적용한 경우에는 제 2공진점의 진폭비가 제 1공진점의 진폭비보다 크다는 것을 알 수 있으며 질량비의 증가에 따라 제 2공진점에서 진폭비는 감소하나 비선형진동계에서 일어날 수 있는 점프현상과 불안정영역은 존재하지 않음을 알 수 있다.

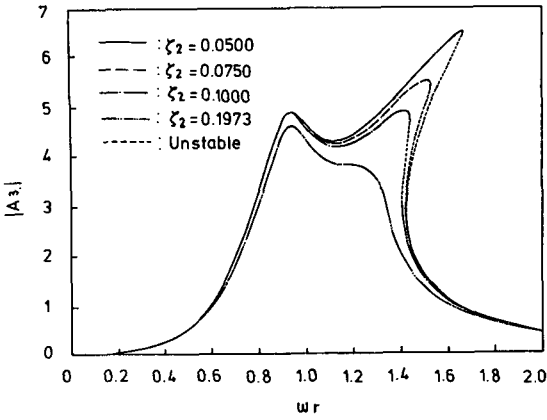


Fig. 8 Relative amplitude versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=0.005$, $f=0.9329$, $\mu=0.1$)

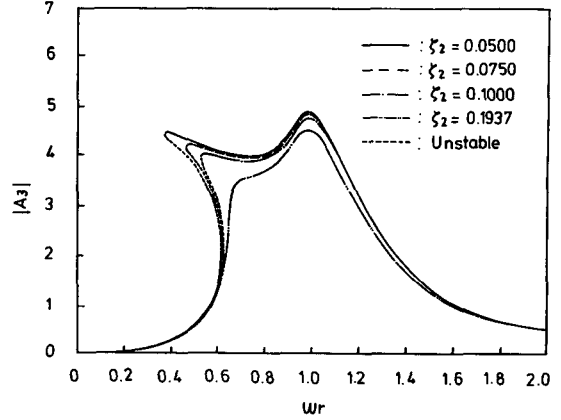


Fig. 10 Relative amplitude versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=-0.005$, $f=0.9329$, $\mu=0.1$)

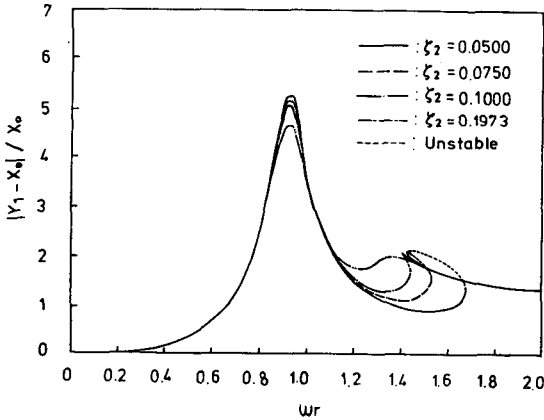


Fig. 9 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=0.005$, $f=0.9329$, $\mu=0.1$)

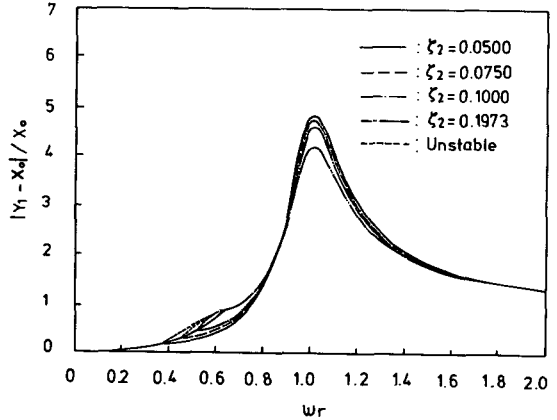


Fig. 11 Amplitude ratio versus frequency ratio for various mass ratio ($\zeta_1=0.1$, $\gamma=-0.005$, $f=0.9329$, $\mu=0.1$)

Fig. 8은 $\gamma=0.005$ 인 경우, 주진동계의 감쇠비와 질량비 및 고유진동수비가 일정할 때 부진동계의 감쇠비가 $\zeta_2=0.1973$, 0.1 , 0.075 및 0.05 인 경우의 상대진폭을 나타낸 것이다. Fig. 8에서 알 수 있는 바와 같이 ζ_2 가 0.1 , 0.075 및 0.05 인 경우에 비선형진동계에서 일어날 수 있는 점프현상과 불안정영역이 존재한다. 또한 ζ_2 가 감소함에 따라 상대진폭과 불안정영역이 증가하며 경성스프링의 특성을 나타낸다.

Fig. 9는 Fig. 8과 같은 조건에서 주진동계의 상대진폭비를 나타낸 것이다. Fig. 9에서 알 수 있는 바와 같이 ζ_2 가 감소함에 따라 상대진폭비와 불안정영역이 증가하며 비선형진동계의 특성을 나타낸다.

Fig. 10은 $\gamma=-0.005$ 인 경우 주진동계의 감쇠비와 질량비 및 고유진동수비가 일정할 때 ζ_2 가 0.1973 ,

0.1 , 0.075 및 0.05 인 경우의 상대진폭을 나타낸 것이다. Fig. 10에서 알 수 있는 바와 같이 ζ_2 가 0.1 , 0.075 및 0.05 인 경우에 점프현상과 불안정영역이 존재하며 ζ_2 가 감소함에 따라 불안정영역이 증가하며 연성스프링의 특성을 나타낼을 알 수 있다.

Fig. 11은 Fig. 10과 같은 조건에서 주진동계의 상대진폭비를 나타낸 것이다. Fig. 11에서 알 수 있는 바와 같이 ζ_2 가 감소함에 따라 상대진폭비와 불안정영역이 증가하며 비선형진동계의 특성을 나타낸다.

4. 결 론

기반의 조화운동을 받는 주진동계에 부착한 비선형 동흡진기의 동특성에 관해서 연구한 결과 다음과 같은

결론을 얻었다.

(1) 비선형계수가 일정한 경우 주진동계의 상대진폭비는 질량비의 증가에 따라 감소한다.

(2) 비선형진동계에서 감쇠비가 증가하면 점프현상과 불안정영역이 존재하지 않지만 감쇠비가 감소하면 점프현상과 불안정영역이 존재한다.

(3) 경성스프링인 경우에는 제 1 공진점에서 주진동계의 상대진폭비가 증가하고 연성스프링인 경우에는 제 2 공진점에서 주진동계의 상대진폭비가 증가한다.

후 기

본 연구를 수행하는 데 많은 조언을 해준 New York 주립대학 기계·항공공학과 Andres Soom 교수, 千葉공업대학 정밀기계공학과 五百井俊宏교수께 깊이 감사드린다.

참 고 문 헌

- (1) Den Hartog, 1956, "Mechanical Vibrations", McGraw, London, pp.93~104.
- (2) S.E. Randall, D.M. Halsted and D.L. Taylor, 1981, "Optimum Vibration Absorber for Linear

- Damped Systems", Tran. of the ASME, J. of Mechanical Design, Vol. 103, pp.908~913.
- (3) Toshihiro Ioi and Ken Ikeda, 1978, "On the Dynamic Vibration Damped Absorber of the Vibration System", Bulletin of the JSME, Vol. 21, No. 151, pp.64~71.
- (4) J.B. Hunt and J.C. Nissen, 1982, "The Broadband Dynamic Vibration Absorber", J. of Sound and Vibration, Vol. 83, No. 4, pp.573~578.
- (5) M.A.V. Rangacharyulu, 1983, "Response of Non-linear Non-conservative Systems of Two Degree of Freedom to Transient Excitation", J. of Sound and Vibration, Vol. 91, No. 1, pp.45~56.
- (6) A. Soom and Ming San Lee, 1983, "Optimal Design of Linear and Nonlinear Vibration Absorbers for Damped Systems", Tran. of the ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 105, pp.112~119.
- (7) 亘理 厚, 1983, "機械振動", 丸善株式會社, pp.116~117.
- (8) 김광식, 안찬우, 1987, "비선형스프링과 선형감쇠를 가지는 동흡진기에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제 11 권, 제 3 호, pp.473~478.