

<論 文>

점성, 압축성을 고려한 최대양력 익형설계

손병진\* · 맹주성\* · 원승호\*\* · 최상경\*\* · 조기현\*\*

(1987년 9월 9일 접수)

Design of Maximum Lift Airfoil in Viscous, Compressible Flow

Byung Jin Son, Joo Sung Meang, Seung Ho Won,  
Sang Kyung Choi and Ki Hyun Cho

**Key Words:** Optimal Technique(최적기법), Viscous Compressible Flow(점성, 압축성 유동), Airfoil(익형)

Abstract

A numerical procedure for determining the airfoil shape that maximizes the lift is presented. The structure of the flow field is calculated by iteratively coupling potential flow and boundary analysis using the viscous-inviscid interaction method. The potential flow field is obtained by the vortex pannel method and boundary layer flow is analyzed by means of integral approximation method which is capable of handling the laminar, transition and turbulent flow regimes. As the result of this study, it is found that the calculated flow regimes have good agreement with the existing experimented data. Davidon-Fletcher-Powell method and Augmented Lagrange Multiplier method are used for the optimal techniques. NACA 23012, NACA 65-3-21, NACA 64-2-415, NACA 64-2-A215 airfoils are used for determining the optimal airfoil shapes as a basic and compensate airfoils. Optimal design showed that the lift coefficients are increased by 17.4% at  $M_\infty=0.2$  and 29.7% at  $M_\infty=0.3$ , compared with those of basic airfoil.

————— 기 호 설 명 —————

- $a_\infty$  : 자유흐름 음속 (m/s)
- $a_e$  : 외부(external) 음속 (m/s)
- $a_i$  : 설계변수
- $A_{ref}$  : 기본익형 면적
- $A_{rea}$  : 수정익형 면적
- $C_D$  : 항력계수
- $C_L$  : 양력계수

- $C_M$  : 전연에 관한 모우멘트 계수
- $C_P$  : 압력계수 혹은 정압비열
- $A$  : 목적함수
- $h$  : 엔탈피
- $H$  : 형상계수
- $k$  : 열전도 계수
- $K_{ij}$  : 영향계수
- $K_{1u}$  : 상수
- $M_\infty$  : 외부(external) Mach 수
- $P_e$  : 외부(external) 압력

\*정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학과

\*\*정회원, 한양대학교 대학원

- $P_0$  : 정체점 압력
- $P_r$  : Prandtl 수
- $R$  : 가스상수
- $S$  : 온도계수
- $s$  : 익형표면을 따른 길이 (m)
- $T$  : 온도 (K)
- $\bar{u}$  : 변환된 접선속도 (m/s)
- $u$  : 접선 방향속도 (m/s)
- $\bar{v}$  : 변환된 법선방향 속도 (m/s)
- $v$  : 법선 방향속도 (m/s)
- $V_0$  : 자유 흐름속도 (m/s)
- $\bar{x}$  : 변환된 접선방향 좌표 (m)
- $x$  : 접선방향 좌표 (m)
- $X$  : 수평방향 좌표 (m)
- $\bar{y}$  : 변환된 법선방향 좌표 (m)
- $y$  : 법선방향 좌표 (m)
- $Y$  : 수직방향 좌표 (m)
- $Y_{i,j}$  : 형상함수
- $Y_{T,i}$  : 형상함수로 구성된 수정형상
- $\alpha$  : 영각
- $\Delta$  : 변환된 경계층 두께 (m)
- $\delta$  : 경계층 두께 (m)
- $\delta^*$  : 배제두께 (m)
- $\theta$  : 운동량 두께 (m)
- $\mu$  : 점성계수 (Ns/m<sup>2</sup>)
- $\nu$  : 동점성계수 (m<sup>2</sup>/s)
- $\rho$  : 밀도 (Ns<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>)
- $\rho_0$  : 정체점 밀도 (Ns<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>)
- $\gamma_i$  : 특이점의 세기
- $\tau$  : 전단응력 (N/m)
- $\psi$  : 유동함수

첨 자

- $C_i$  : 계산 중심점
- $tr$  : 등가변수
- $o$  : 정체점
- $\omega$  : 벽면조건

1. 서 론

일반적으로 항공기, 터보 기계등의 익형설계에 있어서 가장 중요한 것은 그 익형의 양력계수와 항력계수를 구하는 일이다. 컴퓨터가 발달하기 전에 풍동장치나 비행시험을 통해서 익형의 여러가지 특성을 측정

하였으나 상당한 기간과 자금이 소요되며 측정상에도 문제가 많았다.

대형 컴퓨터의 발달과 함께 해석적인 방법도 많은 발전이 되어왔다. 초기에는 비점성 유동에 대한 해석으로서 등각사상에 의한 방법이 Theodorsen<sup>(1)</sup>을 비롯한 여러학자들에 의하여 연구되었다. 그리고 Glauert<sup>(2)</sup> 등에 의하여 얇은 익형 이론이 도입되었으며 그 이후에 Oellers<sup>(3)</sup> 등에 의한 특이점 분포방법이 개발되었고 Ormsbee<sup>(4)</sup> 등에 의하여는 복합익형의 비점성 유동이 해석되었다. 70년대초 점성을 고려한 복합점형이 Goradia<sup>(5)</sup> 등에 의하여 해석되었고 Morgan<sup>(6)</sup> 등은 새로운 절점분할 방법을 도입하여 점성 및 압축성을 고려한 복합익형 주위유동을 해석하였다. 그리고 1986년에는 Dadone<sup>(14)</sup> 등이 람다(Lambda)공식을 사용하여 고아음속 영역에서의 비점성 압축성 유동장 해석을 수행하였다. 고양력 익형 설계에 대한 연구는 2가지로 분류하여 해석되어 왔다. 첫째가 압력분포 또는 속도분포를 가정하여, 가정한 압력분포, 속도분포를 얻을 수 있는 익형을 설계하는 방법이고 둘째는 형상함수의 최적이론을 사용하여 최적익형을 설계하는 방법으로 구분된다.

첫번째 방법은, Ormsbee 등<sup>(4)</sup>이 비점성 유동장에 대하여 최적압력 분포를 가정하고, 이 압력분포를 갖는 익형을 결정하였으며, Kennedy 등<sup>(7)</sup>은 비점성, 비압축성 유동장내에서 단일익형 복합익형 각각에 대하여 속도분포를 가정하고, 이러한 속도분포를 갖는 익형을 설계하였다. 또한 Liebeck<sup>(8)</sup>은, 점성 층류 유동장에서 단일익형에 대한 속도분포를 가정하고, 이 속도분포를 갖는 익형을 설계하였다. 같은 방법으로 Dutt 등<sup>(9)</sup>은 점성 난류 유동장에서 비압축성 유동에 대하여 익형설계를 수행하였다. 그런데 이러한 연구들은 임의로 원하는 속도분포 혹은 압력분포를 얻을 수 있는 익형을 설계한다는 장점이 있으나 Ormsbee 등, Kennedy 등은 비점성 유동장으로, Liebeck 은 층류 유동장으로, Dutt 등은 전흐름 영역을 난류 유동장으로 가정하였기 때문에, 일반적으로 익형 표면에 층류, 전이, 난류가 존재하는 실제문제에 직접 적용하기에는 세심한 검토가 필요하다고 생각된다.

두번째 방법은 Vanderplaats<sup>(10)</sup>가 구조해석에 사용하면, 형상함수를 사용한 최적기법을, 비점성 유동장에서의 단일 최적익형 설계에 적용하였으며, 또 그는<sup>(11)</sup> 같은 기법을 비점성 유동장 해석에 적용하고 설계변수를 축소시켜 계산시간을 단축시키는데 성공하였다. 또한 Olson 등<sup>(12)</sup>은 근사기법을 사용하여 비압축성

점성유동장 내에서의 전방 보조익형 (leading edge slat) 의 최적 위치를 결정하였다. Olson 은 그의 논문에서 첫번째 방법에 속하는 Ormsbee, Kennedy, Liebeck, Dutt 등의 기법은 엄밀한 의미에서는 최적 기법이 아니고, 주어진 조건을 만족시키는 익형 형상 설계 기법이며, Vanderplaats의 형상함수 기법만이 최적 기법이 될 수 있다는 의견을 제시하였다.

그리하여 본 연구는 Vanderplaats의 최적 기법을 사용하여 압축성과 점성을 동시에 고려하고, 익형 표면에 층류, 천이, 난류 유동이 생성된다는 가정하에서 최대 양력 익형 설계를 위한 프로그램을 개발하고 최대 양력 익형의 예를 제시하였다.

본 연구에서는 경계층 유동을 층류, 천이, 난류 영역을 포함하는 압축성 유동으로 가정하였고, Morgan 등이 제시한 새로운 질점분할 방법을 사용하여 속도분포를 계산하고, 점성 압축성 효과를 고려하기 위하여 viscous-inviscid interaction 법을 사용하였고 이 계산 결과를 기존의 실험값과 비교하여 타당성을 확인하였다. 그리고 최적 양력의 익형 설계는 Augmented Lagrange multiplier 법을 사용하였고 비구속 조건을 갖는 목적함수 augmented lagrangian의 최소화는 Davidan-Fletcher-Powell 방법 중 self-scaling quasi-Newton algorithm 을 사용하였다. 그리고 NACA 23012 를 기본 익형으로 하고 NACA 64-2-415, NACA 64-2-A215, NACA 65-3-218 를 보상 익형으로 하여 최대 양력익형을 설계 하였다.

2. 이론 해석

2.1 비점성 유동장

현을 X축, 이에 수직인 축을 Y축, 영각을  $\alpha$ , 익형 표면상에 분포되어 있는 와도의 세기를  $\gamma(s)$ 라 할 때 비점성 유동장을 기술하는 유량함수는 다음과 같이 표시된다.

$$\psi = V_\infty Y_{ci} \cos\alpha - V_\infty X_{ci} \sin\alpha - \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij} \gamma_j \quad (1)$$

$$j=1, 2, 3, \dots, N-1$$

여기서  $\gamma_j$ 는  $S_{ci}$ 에서의 와도의 세기이고

$$K_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_{j+1}}^{S_{j+1}'} \ln[\gamma(S_{ci}, S)] ds', \quad S_{ci} = \frac{S_i + S_{i+1}}{2}$$

$$X_{ci} = \frac{X_i + X_{i+1}}{2}, \quad Y'_{ci} = \frac{Y_i + Y_{i+1}}{2}$$

이다. 그리고 절점  $N$ 은 65개로 하여 총 패널(panel) 수는 64개로 하였고, Kutta 조건은 이 미소한 패널후

연의 상하면 패널에서의 특이점세기가 같다고 가정, 즉  $\gamma_1 = -\gamma_{N-1}$ 으로 놓았다. 그리고 비점성 유동의 압축성 효과는 Karman-Tsien 공식<sup>(15)</sup>을 사용하였으며 역행렬 계산은 Gauss-Jordan 방법을 사용하였다.

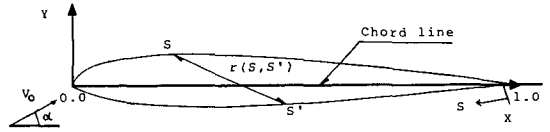


Fig. 1 The given coordinate and airfoil

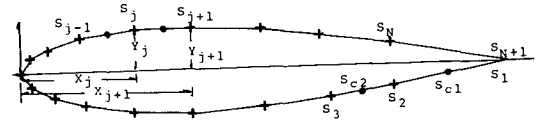


Fig. 2 Airfoil approximation by polygon

2.2 점성 유동장

점성 유동장은 Fig. 1의 익형 주위를 공기가 2차원 정상 아음속 유동을 한다는 가정에서, 경계층 방정식을 적분형 방정식으로 변환하여 근사계산을 하였다. 그리고 천이역을 무시하고 천이점에서 바로 난류가 성장하고 자유 유동난류도와 표면 조도는 없다고 가정하였다.

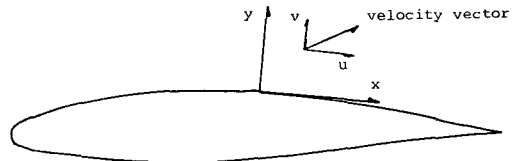


Fig. 3 The coordinate along airfoil surface

(1) 층류 경계층 이론

경계층 두께가 익형 곡률 반경에 비하여 매우 적다는 가정에서 Fig. 3의 좌표계를 사용하여 해석하였다. 지배 방정식

연속 방정식 :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

운동량 방정식 :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

에너지 방정식 :

$$\rho u \frac{\partial}{\partial n} (C_p T) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} (C_p T)$$

$$= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4)$$

상태 방정식 :  $P = \rho R T$  (9)

경계 조건은

$$u(x, 0) = 0$$

$$v(x, 0) = 0$$

이다.

Illingworth-Stewartson 변환 공식

$$\bar{x} = \int_0^x \lambda \frac{a_c P_c}{a_c P_o} dx, \quad \bar{y} = \frac{a_c}{a_o} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_o} dy \quad (6)$$

을 경계층 방정식에 적용하고, 정리하면

운동량 방정식 :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = (S+1) \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \nu_o \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (7)$$

에너지 방정식 :

$$\bar{u} \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial S}{\partial \bar{y}} = \nu_o \left[ \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{y}^2} - \frac{1-Pr}{Pr} \cdot \frac{\frac{\gamma-1}{2} M_e^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2} \frac{\partial^2 \left( \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right)^2}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (8)$$

를 얻는다.

경계 조건 :

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = 0$$

$$\bar{v}(\bar{x}, 0) = 0$$

$$S(\bar{x}, 0) = S_w(\bar{x})$$

$$S(\bar{x}, \infty) = 0$$

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{u} = \bar{u}_e(x)$$

여기서

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{a_c}{a_o} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) \\ v(x, y) &= -\frac{\rho_c}{\rho} \left\{ \lambda \frac{a_c}{a_o} \frac{p_c}{p_o} (-\bar{v}(x, y)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) \right\} \\ \theta_{tr} &= \frac{p_c}{p_o} \frac{a_o}{a_c} \theta \\ H &= H_{tr} \left( 1 + \sqrt{Pr} \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right) \end{aligned} \quad (10)$$

는 점성의 온도 보정계수로서, 공기에 대하여

$$\lambda = \left( \frac{T_w}{T_o} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{T_o + K_{su}}{T_w + K_{su}}, \quad K_{su} = 110K$$

이다.

경계조건 식 (9)를 고려하고 식 (7)과 식 (8)을 경계층두께에 대하여 적분하면 적분형 경계층 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial \theta_{tr}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{u}_e \bar{x}}{\bar{u}_e} (2\theta_{tr} + \delta_{tr}^*) = \frac{\nu_o}{\bar{u}_e} (\bar{u}_e)_w \quad (11)$$

여기서

$$\theta_{tr} = \int_0^{\Delta} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \left( 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) d\bar{y}$$

$$\delta_{tr}^* = \int_0^{\Delta} \left( 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} + s \right) d\bar{y}$$

이고  $\Delta$ 는 변환 공간에서의 경계층 두께, 첨자  $tr$ 는 변환 공간에서의 값을 나타낸다.

식 (11)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\bar{u}_e \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{n}{\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}}} \right) = 2[n(H_{tr} + 2) + l] \quad (12)$$

여기서

$$n = -\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\theta_{tr}^2}{\nu_o} \right), \quad l = \frac{\theta_{tr}}{\bar{u}_e} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_w,$$

$$S_w = \frac{T_w}{T_o} - 1$$

이 식의 해석방법은 Bennett 등<sup>(10)</sup>의 연구에 나타나 있으며, 이 계산으로부터  $\theta_{tr}$ 를 구하였다. 이 식을 계산하기 위하여 Pohlhausen의 속도 분포 방정식<sup>(16)</sup>을 사용하여 계산한  $C_f$ 는

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{1}{\sqrt{\frac{u_e x}{\nu_w}}} \left[ 2l \left\{ \frac{x}{c} \left( -\frac{dM_e}{d(x/c)} \frac{1}{n} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{1}{M_e} \right\}^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

으로 나타낼 수 있고, 압축성 유동의 변환 국부형상계수(form factor)  $H_{tr}$ 를 계산하기 위한  $H$ 는 Stevens 등<sup>(15)</sup>이 사용한 Crocco의 관계식

$$H = H_n \left[ 1 + C_1 \left( \frac{T_w}{T_o} - 1 \right) + C_2 \left( \frac{T_{aw}}{T_o} - 1 \right) \right] \quad (14)$$

을 사용하였으며 여기서

$$C_1 = \frac{7.31 - 4.65(Pr)^{1/2}}{2.62},$$

$$C_2 = [4.65(Pr)^{1/3} - 3.65(Pr)^{1/2}]$$

$$T_{aw} = T_o \left[ 1 + (Pr)^{1/2} \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right],$$

$$H_n = 1.138n + 2.384$$

이다. 식 (10), (12), (13), (14)의 관계로부터  $H_{tr}$ ,  $\theta_{tr}$ 를 계산하여 다시 식 (10)으로부터  $H, \theta$ 를 계산한다. 그리고  $\delta^*$ 는  $\theta \cdot H$ 로 계산하였다.

(2) 난류 경계층

경계층 방정식

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\tau) \quad (15)$$

여기서  $u, v, p$ 는 시간 평균값이고,  $\tau$ 는 난류 전단응력이다. 같은 방법으로 Illingworth-Stewartson 변환

$$\bar{x} = \int_0^x \frac{a_e}{a_o} \frac{P_e}{P_o} dx, \quad \bar{y} = \frac{a_e}{a_o} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_o} dy$$

을 적용하면 식 (15)는

$$\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}_{\bar{y}} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = (S+1) \bar{u}_e \bar{u}_{e\bar{x}} + \frac{1}{\rho_o \left(\frac{a_e}{a_o}\right)^2 \left(\frac{p_e}{p_o}\right)} \frac{\partial \tau}{\partial \bar{y}}$$

와 같이 변환되고 적분형 경계층 방정식은

$$\frac{\partial \theta_{ir}}{\partial \bar{x}} + \frac{\theta_{ir}}{\bar{u}_e} \bar{u}_{e\bar{x}} \left[ 2 + H_i + \int_0^{\bar{y}} \left( \frac{h(s)}{h_o} - 1 \right) d\bar{y} \right]$$

$$= \frac{\tau_w}{\rho_o \left(\frac{a_e}{a_o}\right)^2 \left(\frac{p_e}{p_o}\right) \bar{u}_e^2} \quad (16)$$

와 같이 주어진다. 여기서  $H_i$ 는 form factor 로서

$$H_i = \frac{\int_0^{\bar{y}} \left( 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) d\bar{y}}{\int_0^{\bar{y}} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \left( 1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} \right) d\bar{y}}$$

이고

$$u(x, y) = \frac{a_o}{a_e} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$$

$$v(x, y) = -\frac{\rho_o}{\rho} \left\{ \frac{a_e}{a_o} \frac{p_e}{p_o} [-\bar{v}(\bar{x}, \bar{y})] + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) \right\}$$

이다. 그리고 식 (16)을 해석하기 위한  $C_f$ 는

$$C_f = 0.246e^{-1.561H_{ir}} (R^H \theta_o)^{-0.268}$$

$$= 0.246e^{-1.561H_{ir}} \left( \frac{M_e a_o \theta_{ir}}{\nu_o} \right)^{-0.268}$$

$$\left( \frac{T_o}{T_{ref}} \right)^{0.732} \left( \frac{T_e}{T_o} \right)^{0.268} \quad (17)$$

이며, 속도 분포는  $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} = \left( \frac{\bar{y}}{\Delta} \right)^n$ 으로 놓았으며,

$$\int_0^{\bar{y}} \left( \frac{h_s}{h_o} - 1 \right) d\bar{y} = S_w \theta_{ir} H_{ir}$$

가 된다. 식 (16)과 식 (17)로부터 변환 운동량 두께  $\theta$ 를 계산하고

$$\theta = \frac{p_o}{p_e} \frac{a_o}{a_e} \theta_{ir}$$

를 사용하여  $\theta$ 를 계산하였다. 이 식에 사용되는  $\theta_{ir}$ 와  $H_{ir}$ 를 계산하기 위하여, 운동량 방정식에  $\bar{y}$ 를 곱하여 적분하여 얻은 소산에너지 방정식으로 부터 구한 방정식은

$$\frac{dH_{ir}}{d\bar{x}} = \left[ \frac{0.0123}{\left( \frac{\bar{u}_e \theta_{ir}}{\nu_o} \right)^{0.17}} - H_{ir} \left( \frac{T_w}{\rho \bar{u}_e^2} \right) + (H-1.1) \right]$$

$$\left. \frac{H_{ir} \theta_{ir}}{\bar{u}_e} \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}} \right] / \theta_{ir} \quad (18)$$

이며, 변환된  $H_{ir}$ 와  $H$ 의 관계는

$$H_{ir} = \frac{1.269H}{H-0.379}$$

이다. 이러한 관계식을 사용하여  $H_{ir}$ 과  $H$ 를 계산하므로써  $\delta^*$ 를 계산하였다.

(3) 천이점 예측

천이점 예측은 Stevens<sup>(15)</sup>가 행한 연구결과를 인용 사용하였다.

비점성 유동장 해석에서 계산된 속도 변위와 층류 경계층 방정식에서 계산된 변환 운동량 두께로 부터, 등가 제 2형상계수

$$K_{eq} = \frac{\theta_{ir}^2}{\nu_m} \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}}$$

를 계산하고 등가 운동량 Reynolds 수

$$(Re\theta)_{eq} = \frac{\bar{u}_e \theta_{ir}}{\nu_m}$$

를 계산한다. 여기서  $\nu_m$ 는 경계층 내의 평균 동점성 계수이다. 그리고 Orr-Sommerfeld 방정식의 해로부터 얻은 식

$$\overline{(Re\theta)_{eq}} = \exp[5.46963 + 43.37458K_{eq} + 218.28K_{eq}^2 - 1934.6K_{eq}^3 - 23980K_{eq}^4] \quad (19)$$

에  $x$ 지점의  $K_{eq}$ 를 대입하여 구한  $\overline{(Re\theta)_{eq}}$ 와  $x$ 지점의  $(Re\theta)_{eq}$ 와 비교하여  $(Re\theta)_{eq} > \overline{(Re\theta)_{eq}}$ 가 되는 불안정 지점의 Reynolds 수  $(Re\theta)_{inst}$ 를 구하였고 이 Reynolds 수로부터 불안정 지점  $x_{inst}$ 를 구하였다.

불안정 지점 이후의  $x$ 와  $K_{eq}$ 로부터 평균 등가 제 2형상합수

$$\bar{K}_{eq} = \frac{1}{x/c - x_{inst}/c} \int_{x_{inst}/c}^{x/c} K_{eq} d(x/c)$$

를 계산하고 Granville의 실험식<sup>(15)</sup>

$$\overline{(Re\theta)_{eq}} = (Re\theta)_{inst} + 825.45 + 28183.5 \bar{K}_{eq} + 721988 \bar{K}_{eq}^2 + 6317380 \bar{K}_{eq}^3 \quad (20)$$

에  $x$ 지점에서의  $\bar{K}_{eq}$ 를 대입하여 구한  $\overline{(Re\theta)_{eq}}$ 와  $x$ 지점의  $(Re\theta)_{eq}$ 를 비교하여  $(Re\theta)_{eq} \geq \overline{(Re\theta)_{eq}}$ 가 되는 천이점의 Reynolds 수  $(Re\theta)_{trans}$ 를 구하고,  $(Re\theta)_{trans}$ 로부터 천이점의  $x, y$ 를 계산하였다.

### 2.3 최적 설계

본 연구의 목적은 어느 한 익형을 기본으로 하고, 다른 몇 개의 익형으로 보정하여 최대 양력 익형을 설계하는 프로그램을 개발하는 것이다. 여기서는 NACA 23012를 기본익형으로 하고 NACA64-2-A215, NACA

64-2-415, NACA65-3-218 을 보정용 익형으로 사용하여 NACA23012 를 보정하였다. 이 방법은 설계변수의 수를 줄이기 위하여 1979 년에 Vanderplaats<sup>(11)</sup>가 처음으로 비점성 유동장에 시도하였다.

$i$  익형의  $j$  면의 형상을  $Y_{ij}$  ( $Y$  좌표)라 할 때 이들 4 개의 익형을 조합하여 만라 수 있는 익형은

$$Y_{Tj} = a_1 Y_{1j} + a_2 Y_{2j} + a_3 Y_{3j} + a_4 Y_{4j} \quad (21)$$

와 같이 표시될 수 있다고 가정한다. 여기서  $j=1$  인 경우 상부면  $j=2$  인 경우 하부면을 나타낸다. 그리고  $Y_{ij}$  는

$$Y_{ij} = B_{1ij} + B_{2ij} \sqrt{x/c} + B_{3ij}(x/c) + B_{4ij}(x/c)^2 + B_{5ij}(x/c)^3 + B_{6ij}(x/c)^4 \quad (22)$$

로 주어진다. 계수  $B_{kij}$  는 4 가지 익형의 형상으로 부터 최소자승법을 사용하여 계산하고 그 결과를 Table 1 에 소개하였다.

최적화는 Augmented Lagrange Multiplier (A.L.M) 방법을 사용하였고 비구속조건을 갖는 목적함수 Augmented Lagrangian 의 최소화는 Davidon-Fletcher-Powell 방법중 self-scaling quasi-Newton 알고리즘을 사용하였다.

목적함수 :

$$F = -C_L : \text{최소화} \quad (23)$$

속박조건 :

$$\begin{aligned} g_1 &= C_D - C_{Dmax} \leq 0 \\ g_2 &= |A_{rea} - A_{rea\phi}| - \epsilon \leq 0 \\ g_3 &= |C_M| - C_{Mmax} \leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Augmented Lagrangian:

$$A = F + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \phi_i + r_p \sum_{i=1}^3 \phi_i^2 \quad (25)$$

여기서  $\lambda_i$  는 Lagrange multiplier,  $r_p$  는 penalty par-

ameter,

$$\phi_i = \max(g_i, -\frac{\lambda_i}{2r_p}) \quad (26)$$

이다.

$A$  를 최소화시키는 경로를 찾기 위한 다음 단계의 설계변수를 구하기 위하여  $A$  의 경사도를 구한다.

$$\begin{aligned} [\partial A]^T &= \left[ \frac{\partial A}{\partial a_1} \quad \frac{\partial A}{\partial a_2} \quad \frac{\partial A}{\partial a_3} \quad \frac{\partial A}{\partial a_4} \right] \approx \\ & \left[ \frac{\Delta A}{\Delta a_1} \quad \frac{\Delta A}{\Delta a_2} \quad \frac{\Delta A}{\Delta a_3} \quad \frac{\Delta A}{\Delta a_4} \right] \equiv g_k \end{aligned} \quad (27)$$

설계변수의 최적화 방향 결정을 위한 Hessian 행렬은

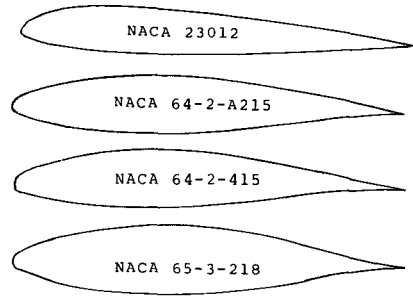


Fig. 4 Basic airfoils

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= \left( H_k - \frac{H_k q_k q_k^T H_k}{q_k^T H_k q_k} \right) - \frac{p_k^T q_k}{q_k^T H_k q_k} \\ & + \frac{p_k p_k^T}{p_k^T q_k} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned} x_k &= [a_1 a_2 a_3 a_4]_k \\ p_k &= x_{k+1} - x_k \\ q_k &= g_{k+1} - g_k \end{aligned}$$

이다.

Table 1 Geometry Coefficients

Type	Coef.	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>
NACA 23012 (i=1)	j=1	-0.003575	0.285055	-0.20659	-0.237091	0.29251	-0.12951
	j=2	0.0007167	-0.1090378	0.0281955	0.0563038	0.075823	-0.05388
NACA 64-2-415 (i=2)	j=1	0.0015554	0.182980	0.0133298	-0.039585	-0.44295	0.285352
	j=2	0.00007349	-0.14117759	0.08427227	-0.184657	0.6799184	-0.43805
NACA 64-2-A215 (i=3)	j=1	0.00095855	0.17123717	0.00363797	-0.0483754	-0.333347	0.206752
	j=2	-0.00038463	-0.1404504	0.0246242	0.0210159	0.3214254	-0.22764
NACA 65-3-218 (i=4)	j=1	0.00060569	0.2006536	-0.058639	0.264847	-0.9239193	0.516432
	j=2	0.00023014	-0.174594	0.0902588	-0.3431275	1.00682163	-0.579139

### 3. 수치계산

수치계산은 다음 과정을 밟아 행하였다.

#### 3.1 유동장 해석

- ① 최적화 과정에서 계산되는 설계변수  $a_i$ 에 대한 익형 식 (21)주위의 비정성 속도는 식 (1)을 사용하여 계산하고, 압축성의 영향을 Karman-Tsien 공식으로부터 보정하였다.
- ② 식 (11)로부터 층류 경계층에 대한 모우멘트 thickness  $\theta$ 와 displacement thickness를 계산한다.
- ③ 식 (19)와 식 (20)를 사용하여 천이점을 예측한다.
- ④ 식 (16)로부터 천이점 하류에 대한 모우멘트 thickness와 displacement thickness를 계산한다.
- ⑤ 식 (21)의 익형에 displacement thickness를 더하여 과정 ①부터 다시 반복하면서 압력계수  $C_p$ 를 계산한다.
- ⑥  $C_p$  값이 수렴될 때, 최종 익형에 대한 양력계수 항력계수 모우멘트 coefficient, 익형 면적을 계산한다.

#### 3.2 최적화 과정

- ① 3.1에서 계산한 양력계수, 항력계수, 모우멘트 coefficient, 익형 단면적 및 초기값을 사용하여 식 (25)의 Augmented Lagrangian을 계산한다.
- ② 식 (27)을 사용하여  $g_k$ 를 계산한다.
- ③ Hessian 행렬을 단위행렬로 놓는다.
- ④  $||g_k|| \leq \epsilon$  이면 ⑧을 수행한다.
- ⑤ 목적함수의 최소화 방향  $d_k = -H_k g_k$ 를 계산한다
- ⑥ Quadratic fitting 방법을 사용하여 목적함수를 최소화하는 새로운 설계변수  $x_{k+1} = [a_1 a_2 a_3 a_4]_{k+1}$ 을 계산하고  $x_{k+1}$ 에 대한  $g_{k+1}$ 를 계산한다.
- ⑦ 반복계산 횟수  $k$ 가 4(설계변수의 갯수)의 정수 배가 아닐 경우에는 식 (28)로부터  $H_{k+1}$ 를 계산하고 다시 ④로부터 계산을 반복 수행한다.  $k$ 가 4의 정수배인 경우에는 ③으로부터 다시 반복한다.
- ⑧  $\lambda_i$ 와  $\lambda_p$ 를 A.L.M 방법을 사용하여 새로이 결정한다.
- ⑨ 목적함수와  $\lambda_i$ 가 모두 수렴할 때까지 반복 수행한다. 만일 수렴하지 않을 경우에는 ②로부터 수

렴할 때까지 반복한다.

본 연구에서 사용한 기본 익형과 보상 익형은 Fig. 4에 나타내었으며, 수렴조건은

viscous-inviscid interaction :

$$\left| \frac{C_p^{k+1} - C_p^k}{C_p^k} \right| < 10^{-4}$$

최적 설계 :  $||g_k|| < 10^{-2}$

$$\left| \frac{\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k}{\lambda_i^k} \right| < 10^{-4}$$

$$\left| \frac{C_L^{k+1} - C_L^k}{C_L^k} \right| < 10^{-4}$$

으로 하였다.

### 5. 결과 및 고찰

본 연구에서 얻어진 유동장 해석의 타당성 여부를 여부를 검토하기 위하여 기존의 실험결과와 같은 조건하에서 본 유동장 해석 방법으로 계산한 결과를 비교하여 보았다.

최적 설계에서의 속박조건은 일반적으로 제한이 없으나, <sup>(11)</sup> 기본익형(NASA 23012,  $M=0.2$ )에서의  $C_D$ ,  $C_M$ , Area을 기준으로 각각 10%, 25%, 10%의 상한을 두어 각각 0.071, 0.0625, 0.09로 하였다. 이것은 보다 최대치를 갖는  $C_L$ 를 얻기 위함으로써, 구속조건을 기본익형에서의 계산값보다 다소 큰 값을 부여하였다.

Fig. 5는 NACA 63-009에 대하여 Gault<sup>(13)</sup>가 실험한 결과와 동일 조건하에서 본연구의 계산 방법으로 계산한 결과를 비교한 것이고 Fig.6은 NACA 0012 익형 주위에 비점성, 압축성 유동을 한다는 가정에서 Daddone<sup>(14)</sup>이 계산한 결과와 비교한 그림이다.

비교결과 본 연구에서 얻어진 계산치가 기존의 실험

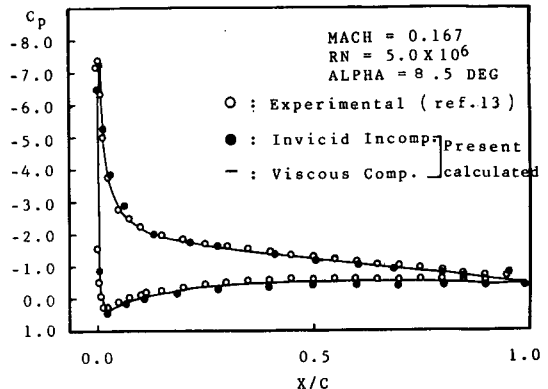


Fig. 5 Comparison of predicted and experimental  $C_p$  of NACA 63-009

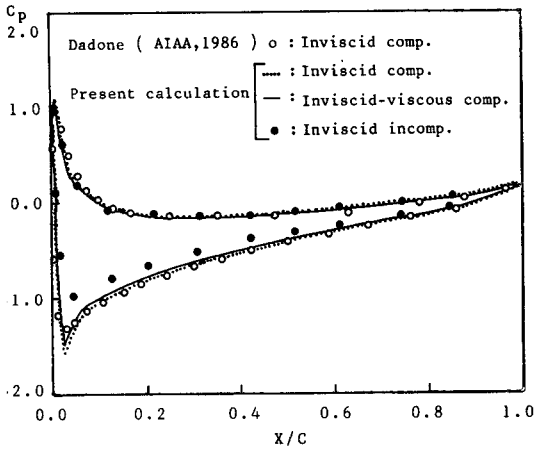


Fig. 6 Comparison of viscous, compressible effect of  $C_p$  for NACA 0013,  $\alpha=3^\circ$ ,  $M_o=0.5$

Table 2 Optimal designed values

designed val.	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Mach No.				
0.2	1.023032	0.086735	0.012012	-0.0327732
0.3	1.374579	0.097798	-0.065182	-0.2080940
Inviscid incomp.	3.565710	0.372280	-0.786540	-1.4207200

Table 3 Comparison of each coefficient

Mach No.	type	$C_L$	$C_D$	$C_M$
0.2	Basic	0.144	0.00648	-0.0486
	Optimal	0.169 (+17.4%)	0.00658 (+1.5%)	-0.0600 (+23.5%)
0.3	Basic	0.148	0.00641	-0.0499
	Optimal	0.192 (+29.7%)	0.00709 (+10.3%)	-0.062 (+24.2%)
Inviscid incomp.	Basic	0.151	0.00248	-0.050324
	Optimal	0.301 (+99.6%)	0.00700 (+185.7%)	-0.060000 (+19.23%)

값이나, 계산값에 비교적 잘 일치함을 확인할 수가 있었다.

Table 1은 본 연구에서 사용한 기본 익형 NACA 23012, 보상 익형 NACA 65-3-218, NACA 64-2-415, NACA 64-2-A215의 기하학적 형상계수(식 (22))이고 Table 2는 점성과 압축성을 고려하였을때 기본 익형

을 보정한 최대 양력 익형 설계 변수와 순수한 비점성 비압축성에서의 설계변수이다.

Fig. 7은 Mach 수 0.2, Fig. 9은 Mach 수 0.3에 대한 양력 최대 익형을 나타낸 그림이고, Fig.8과 Fig. 10은 각각 이들 날개에 대한 압력계수를 도시한 것이며, Fig. 11과 Fig. 12는 비점성 비압축성 유동에서의 최대양력익형과 이 익형에 대한 압력계수분포를 나타낸 것이다.

Table 3은 기본 익형 NACA 23012와 최대 양력 익형의 양력 계수, 항력 계수, 모우먼트 계수를 Mach 수가 0.2, 0.3일때의 점성 압축성 유동과 순수한 비점성 비압축성에 대하여 비교한 것이다.

최적익형 형상은 하연(정압면)의 변화는 거의 없으나 상연(부압면)의 형상에 변화가 컸으며, Mach 수  $M_o=0.3$ 인 경우가  $M_o=0.2$ 인 경우 보다 그 변화가 컸다. 또한 비점성 비압축성의 최대  $C_L$ 보다 점성 유동장에서의  $C_L$ 이 크게 떨어지는 것으로 나타나며 (Table3), 그 이유는 최적과정에서 박리를 방지하려는 데서 온 결과라고 생각된다. 그리고 이와 근사한 형상은

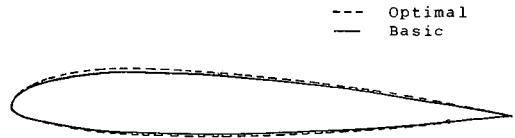


Fig. 7 Comparison of shape in optimal airfoil and basic airfoil at  $M=0.2$

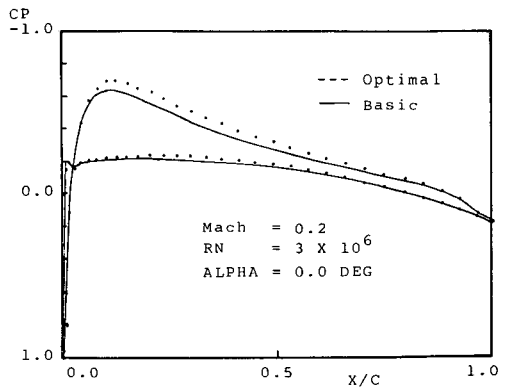


Fig. 8 Comparison of  $C_p$  value in basic airfoil and optimal airfoil at  $M=0.2$

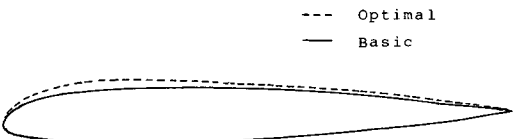


Fig. 9 Comparison of shape in optimal airfoil and basic airfoil at  $M=0.3$



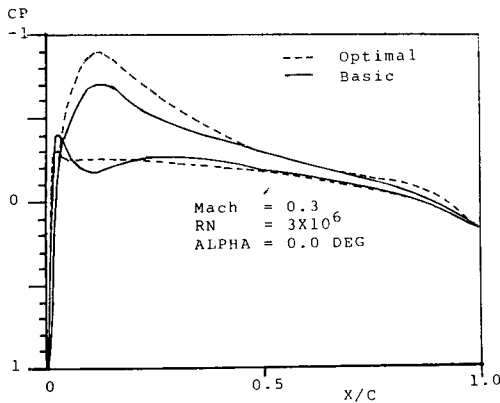


Fig. 10 Comparison of  $C_p$  value in basic airfoil and optimal airfoil at  $M=0.3$

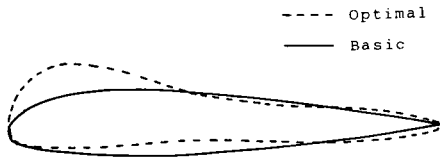


Fig. 11 Comparison of shape in optimal airfoil and basic airfoil at inviscid incompressible flow

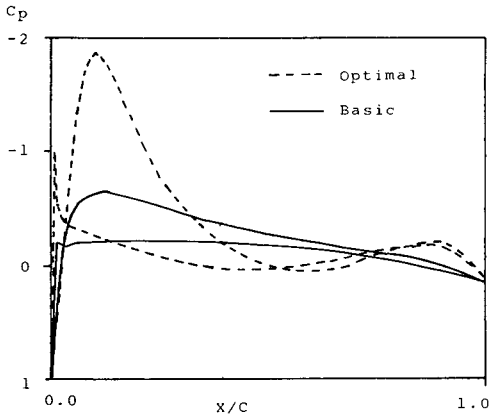


Fig. 12 Comparison of  $C_p$  value in basic and optimal airfoil at inviscid incompressible flow

Vanderplaats의 최적설계 결과에도 나타나 있음을 관찰할 수 있다.

영각 0,  $M_0=0.2$ 에서 기본 익형의 양력계수  $C_L=0.144$  이었으나 최대 양력 익형에서는  $C_L=0.169$ 로, 약 17.4% 증가 하였다.  $M_0=0.3$ 인 경우 기본 익형에 대하여  $C_L=0.148$ 에서  $C_L=0.192$ 로, 약 29.7% 증가 하였다. 반면에 항력계수  $C_D$ 와 모우멘트 계수  $C_M$ 도 증가를 보였으나 그 절대값은 그리 크지 않은 것으로 생각 되었으며 비점성 비압축성 유동장에서는 박리가 발생하지 않는 형상으로서의 제한이 없으므로 더 큰  $C_L$

을 얻는 최대 양력 형상을 얻을 수 있었다.

또한 박리 영역에 대한 검토를 수행한 결과, 천이 지점은 Mach 수가 0.2, 0.3에 대하여 각각  $x/c=0.278279$   $x/c=0.251476$  이었다. 그리고 천이점 이후의 난류 경계층 영역에서는 적분형 난류 방정식의 박리한계인  $H$  (shape factor)가 2.4 미만( $M_0=0.2, 0.3$ 에 대하여 각각 1.620245, 1.648685)이므로 공히 박리가 발생하지 않으며, 천이점 이전의 층류경계층 영역에서 박리유무를 판정하기 위한 압력매개변수 ( $A = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}$ )는 층류영역에서 공히 -12 보다 큰 수로 나타났으므로(각각 -11.938, -11.943) 박리가 발생하지 않음을 알 수 있다. 또한 이 영역에서의 Stevens<sup>(15)</sup>의 압축성 유동에 대한 박리 예측 방법을 사용하여 검토한 경우에도 층류영역에서  $\frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}$ 가 박리한계인 -0.07 보다 큰 분포(각각 -0.06937, -0.069669)를 나타내었다. 이것은 최적익형을 결정하기 위한 중간익형 형상에 따라서는 박리가 존재할 경우가 있으나, 이런 경우의 형상은 최대양력을 갖지 못하거나 항력이 제한값을 초과하게 되므로 최종적으로 결정되는 최적익형 형상은 박리가 발생하지 않는 형상으로 귀착되기 때문으로 생각 된다.

### 5. 결 론

본 연구는 압축성과 점성을 모두 고려한 최대 양력 익형을 설계할 수 있는 프로그램 개발을 시도하였고, 특히 경계층의 천이점을 예측하여 층류, 난류 경계층이 존재할 경우 NACA 23012를 기본 익형, NACA 64-2-415, NACA 64-2-A215, NACA 15-3-218을 보상 익형으로 최대 양력 익형을 계산하였다. 개발한 프로그램 중 유동장 해석 결과는 기존의 실험 결과와 잘 일치 하였고, 설계된 최대 양력 익형의 양력계수는  $M_0=0.2, M_0=0.3$ 에 대하여 각각 17.4%, 29.7%의 증가를 보였으며 점성에 의한 마찰력이 존재하지 않는 순수한 비점성 비압축성에서는 보다 큰 증가를 보였다. 영각을  $\alpha=0$ 만을 계산하였다. 영각을 줄 때 최대 양력 설계변수를 구하는데 계산시간이 많이 요구되어 우선  $\alpha=0$ 에 대하여 수행하였다. 앞으로 영각의 영향에 의한 박리를 고려한 최적 익형 설계가 필요하다고 생각된다.

### 참 고 문 헌

(1) Theodorsen, T., 1932, "Theory of Wing Section

- of Arbitrary Shape", NACA Report No. 411.
- (2) Glauert, H. 1924, "Theory of Thin Aerofoils", A.R.C. R.M.910.
- (3) Oellers, H.J., 1962, "Die Inkompressible Potentialstromung in der Ebenen Gitter Strutle", WGLR Jahrbuch, pp. 349~353.
- (4) Ormsbee, A.I. 1978, "A Potential Flow Design Method for Multi-Component Airfoil Section", J. Aircraft, Vol. 15, No.1, pp.47~52.
- (5) Goradia, S.H. 1971, "Confluent Boundary layer Flow Development with Arbitrary Pressure Distribution", Ph. D. Thesis, Georgia Ints. Techn.
- (6) Morgan, H.L. 1975, "A Computer Program for the Analysis of Multi-element Airfoils in Two-Dimensional Subsonic Viscous Flow", NASA SP-347, Part II, pp.713~748.
- (7) Kennedy, J.L. 1979, "A Potential Flow Design Method for Multi-Component Airfoil Section", J. Aircraft, Vol. 15, No.1, pp.47~52.
- (8) Liebeck, R.H. 1978, "Design of Subsonic Airfoils for High Lift", J. Aircraft Vol. 15, No. 9, pp. 547~559.
- (9) Dutt, H.N.V. 1980, "Design of Aerofoils for Prescribed Pressure Distribution in Viscous Incompressible Flow", AQ, pp.42~54.
- (10) Vanderplaats, G.N. 1975, "Application of Numerical Optimization Techniques to Airfoil Design", NASA TM-X 73.
- (11) Vanderplaats, G.N. 1979, "Approximation Concepts for Numerical Airfoil Optimization", NASA TP-1370.
- (12) Olso, L.E., etc., 1979, "Leading-Edge Slat Optimization for Maximum Airfoil Lift", NASA TM-78566.
- (13) Gault, D.E. 1950, "Boundary-layer and Stalling Characteristics of the NACA 63-009 Airfoil Section", NACA TN-1894,
- (14) Dadone, A. and Napoitano, M. 1986, "A Perturbative Lambda Formulation", AIAA Journal, Vol. 24, No. 3.
- (15) Stevens, W.A., etc. 1971, "Mathematical Model for Two-Dimensional Multi-Component Airfoils in Viscous Flow", NASA CR-1843, p.181.
- (16) Bennet, J.A., etc. 1966, "Methods for Analysis of Two-Dimensional Airfoils with Subsonic and Transonic Application", Lockheed-Georgia Company, ER-8591, p.378.
- (17) Cebeci, T., etc. 1977, "Momentum Transfer in Boundary Layers", McGraw-Hill Book Company.