

〈 論 文 〉

트랙션이 없는 커스프 균열의 열응력세기계수에 관한 연구

이 강 용* · 최 흥 섭**

(1987년 11월 12일 접수)

Thermal Stress Intensity Factors for Traction Free Cusp Cracks

Kang Yong Lee and Heung Soap Choi

Key Words : Thermal Stress Intensity Factor (열응력세기계수), Hypocycloid Crack (하이포사이클로이드 균열), Airfoil Crack (익형 균열), Lip Crack (입술형 균열), Complex Variable (복소 변수), Cusp Crack (커스프 균열)

Abstract

The thermal stress intensity factors (TSIF's) for the cusp cracks such as hypocycloid crack, symmetric airfoil crack and symmetric lip crack are determined by using Bogdanoff's complex variable approaches in plane thermoelasticity. The results are expressed in terms of the periodic functions of the direction of uniform heat flow. The TSIF's are shown to be sensitive to both the direction of uniform heat flow and the thermal boundary conditions. It is also shown that Fournce's solutions for an insulated circular hole and Sih's solutions for an insulated Griffith crack are derived from the results of the stress and displacement fields for the hypocycloid crack and the TSIF's for the various cusp cracks, respectively.

1. 서 론

정상온도분포하에 있는 2차탄성체내의 열응력을 구하기 위한 복소포텐셜함수 관계식을 Bogdanoff⁽¹⁾가 제시한 후부터 열응력해석이 활발하여졌다. Florence와 Goodier^(2,3)는 균일열유동하에 있는 구와 원형구멍에 대한 열응력 해석 및 단열된 타원형 구멍에 대해 열전위개념과 Muskhelishvili⁽⁴⁾의 복소포텐셜함수 관계식을 이용하여 열응력을 구한 바 있다. 이후 Sih⁽⁵⁾는 Florence등의 해석결과로부터

2차원탄성체내의 균열선단에서의 열응력장이 Irwin이 제시한 기계적하중하의 열응력장 형태와 동일함을 보이고 단열된 Griffith 균열선단에서의 열응력세기계수(thermal stress intensity factor 이하에서 TSIF로 표기함)를 구하였다. 최근에 Griffith 균열에 대한 TSIF결정에 관한 연구는 여러 사람들^(6~9)에 의해 보고된 바 있다. 그러나, 커스프(cusp) 균열에 대한 TSIF에 관한 연구는 찾아 보기 어려우며 단지 기계적하중하에서 커스프 균열에 관한 연구를 Wu^(10,11)가 보고한 바 있다. 따라서 본 논문에서는 Bogdanoff가 제시한 열응력 관계식을 이용하여 균일 열유동을 받는 무한체내에 존재하는 균열에 대해서 균열표면에 자유트랙션조건과 열경계

* 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

** 연세대학교 대학원

조건을 부여하여 TSIF를 구하고자 한다. 다루고자 하는 커프스 균열의 형태는 하이포사이클로이드형 (hypocycloid type), 대칭익형 (symmetric airfoil type), 그리고 대칭입술형 (symmetric lip type) 이다.

2. 이 론

정상온도분포하에 있는 2차원 등방성 균질재료로 이루어진 영역 D (Fig. 1 참조) 내에서 정칙인 복소온도포텐셜함수는 다음과 같다.

$$Q(z) = T(x, y) + iW(x, y) \quad (1)$$

여기서 $W(x, y)$ 는 Cauchy-Riemann 방정식을 만족하는 $T(x, y)$ 의 공액조화함수이다. Γ 상에서의 열경계조건은 단열된 경우와 상대온도가 영인 경우에 대해 해석하며 이하에서 각각 $\gamma=1$ 과 -1 로 표시한다. 무한경계면에서의 열경계조건은 온도 구배 τ 를 갖는 균일열유동이 x 축에 대해 λ 각도로 오는 경우로서 다음식으로 표시된다.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} Q'(z) \equiv Q = \tau e^{-i\lambda} \quad (2)$$

등각사상함수 $\omega(\zeta)$ 에 의하여 사상되는 ζ 평면에서의 복소온도포텐셜함수 $\chi(\zeta)$ 와 열경계조건식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\chi(\zeta) \equiv Q[\omega(\zeta)] = T(\xi, \eta) + iW(\xi, \eta) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (\gamma=1) \text{ 또는 } T=0 \quad (\gamma=-1) \quad (4)$$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \chi'(\zeta) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} Q'(z) \omega'(\zeta) = Q \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \omega'(\zeta) \equiv Q \quad (5)$$

Image method⁽¹²⁾에 의하여 열경계조건식(4)를 만족하는 복소온도포텐셜함수 $\chi(\zeta)$ 는 다음식으로 부터 구하여진다.

$$\chi(\zeta) = \chi_1(\zeta) + \gamma \overline{\chi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad |\zeta| > 1 \quad (6)$$

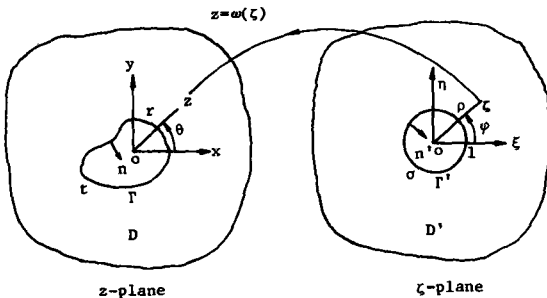


Fig. 1 Conformal mapping

여기서 $\chi_1(\zeta)$ 는 구멍이 없는 ζ 평면에서의 열원이거나 균일열유동 등에 의하여 표현되는 복소온도포텐셜함수이다. 따라서 균일열유동 Q_1 에 의한 복소온도포텐셜함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\chi(\zeta) = Q \left\{ \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \omega'(\zeta) \right\} \cdot \zeta + \gamma \overline{Q \left\{ \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \overline{\omega'(\zeta)} \right\} \frac{1}{\zeta}} \quad (7)$$

2차원 정상온도상태에서의 x 와 y 방향의 변위 u 와 v 는 ζ 평면상에서 다음과 같다⁽¹⁾.

$$2\mu(u+iv) = x\Phi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)} + 2\mu G(\zeta) \quad (8)$$

여기서

$$G(\zeta) = \beta \int_{\Gamma'} \chi(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta \quad (9)$$

$$\beta = \begin{cases} (1+\nu)\alpha & \begin{cases} 3-4\nu \text{ 평면 변형률 상태} \\ 3-\nu & \text{평면 응력 상태} \\ 1+\nu \end{cases} \\ \alpha \end{cases} \quad (10)$$

α 는 열팽창 계수, ν 는 포아송의 비, μ 는 전단 계수, $\Phi(\zeta)$ 와 $\Psi(\zeta)$ 는 Kolosov의 복소포텐셜함수이다.

임의의 선분 AB 에 작용하는 결과력 (resultant force) 은 다음식으로 주어진다⁽⁴⁾.

$$i \int_A^B (X+iY) ds = \left[\Phi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right]_{A'}^{B'} \quad (11)$$

여기서 X 와 Y 는 x 와 y 방향의 결과력 성분이며, $A'B'$ 는 z 평면의 선분 AB 에 대응하는 ζ 평면상의 성분이다. 탄성체 내의 변위는 영역 D 에서 단일해를 갖이므로 임의의 공동의 경계 D 와 x 축이 만나는 점의 상하를 각각 1, 2라고 하면 식(8)에 의해 다음식이 성립한다.

$$(2\mu(u+iv))_1^2 = \left[x\Phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi'(\sigma)} - \overline{\Phi(\sigma)} \right]_{1'}^{2'} + 2\mu(T \cdot D) = 0 \quad (12)$$

여기서

$$(T \cdot D) = \beta \int_{\Gamma'} \chi(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma \quad (13)$$

1'와 2'는 Γ 상의 1과 2에 대응하는 Γ' 상의 점이며 $\int_{\Gamma'}^{2'}$ 는 Γ' 상에서 반 시계반향으로의 경로적분을 의미한다.

식(12)를 만족하기 위해서는 Kolosov복소포텐셜함수를 다음의 형태로 표현하여야 한다.

$$\Phi(\zeta) = A \ln \zeta + \Phi^*(\zeta) \quad (14)$$

$$\Psi(\zeta) = B \ln \zeta + \Psi^*(\zeta) \quad (15)$$

여기서 A, B 는 결정하여야 할 복소 상수이고 $\Phi^*(\zeta)$ 와 $\Psi^*(\zeta)$ 는 D' 에서 정칙이어야 하므로 다음과 같이 Laurent 급수로 표시될 수 있다.

$$\Phi^*(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \zeta^{-j} \quad (16)$$

$$\Psi^*(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \zeta^{-j} \quad (17)$$

여기서 a_j, b_j 는 결정해야 할 복소상수이다. 식 (14), (15)를 식(12)에 대입하면

$$x A + \bar{B} = -\mu(T \cdot D) / (\pi i) \quad (18)$$

공동 표면에 트랙션이 없는 경우에는 Γ' 상에서 다음식이 성립한다.

$$\Phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}(\sigma)} \overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi'(\sigma)} = 0 \quad (19)$$

식(14), (15)를 위식에 대입하면

$$\begin{aligned} \Phi^*(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}(\sigma)} \overline{\Phi^{*'}(\sigma)} + \overline{\Psi^{*'}(\sigma)} \\ + \left\{ (A - \bar{B}) i \varphi + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}(\sigma)} \bar{A} \sigma \right\}_{\sigma=e^i} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

φ 가 다가(multi-value)이므로 다음식이 얻어진다.

$$A = \bar{B} \quad (21)$$

그러므로 트랙션이 없는 경계조건에서 $\Phi(\zeta)$ 와 $\Psi(\zeta)$ 가 만족해야 할 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi^*(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}(\sigma)} \overline{\Phi^{*'}(\sigma)} + \overline{\Psi^{*'}(\sigma)} = \\ - \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}(\sigma)} \bar{A} \sigma \end{aligned} \quad (22)$$

또한 식(18)과 (21)로부터

$$A = -\frac{\mu(T \cdot D)}{\pi i(x+1)} \quad (23)$$

z 평면상의 하이포사이클로이드 균열 Γ 와 그 외부 D 를 각각 ζ 평면상의 단위원 Γ' 와 그 외부 D' 로 일대일 대응시키는 등각사상함수는 다음과 같다⁽¹¹⁾.

$$Z = \omega(\zeta) = \frac{nR_0}{1+n} \left(\zeta + \frac{1}{n\zeta^n} \right) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (24)$$

여기서 $2R_0$ 은 상당균열길이(equivalent crack length)이고 n 은 형상계수로서 $n=1$ 일 때는 길이 $2R_0$ 인 선형균열(line crack)이 되며 $n>1$ 일 때는 $n+1$ 개의 커프를 갖는 하이포사이클로이드 균열이 된다. 또한 $n \rightarrow \infty$ 일 때는 반경이 R_0 인 원이 된다. 양의 x 축상의 커프를 $k=0$ 이라 하고 반시계방향으로 돌면서 나타나는 커프를 각각 $k=1, 2, \dots, n$ 이라 정하면 z 평면에서의 k 번째 커프 선단의 위치는 다음과 같다.

$$Z_k = R_0 e^{\frac{2k\pi}{n+1}i} \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad (25)$$

식 (22)에 등각사상함수식 (24)을 대입한 후 양변에 $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ 을 곱하여 Γ' 상을 따라 반시계방향으로 적분을 취하고 외부영역 D' 에 대한 Cauchy 적분 공식에 의해 계산하면 각 항의 결과는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\Phi^*(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\Phi^*(\zeta) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\omega(\sigma) \overline{\Phi^{*'}(\sigma)}}{\omega'(\sigma) (\sigma - \zeta)} d\sigma \\ = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-2} j \bar{a}_j \zeta^{j-n+1} & (n>2) \\ 0 & (n=1, 2) \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\overline{\Psi^{*'}(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0 \quad (28)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\omega(\sigma) \sigma}{\omega'(\sigma) (\sigma - \zeta)} d\sigma = -\frac{1 - \delta_n}{n\zeta^{n-1}} \quad (29)$$

여기에서

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases} \quad (30)$$

식 (7), (13), (23), (24)로부터

$$x(\zeta) = \frac{nR_0}{n+1} \left(Q\zeta + \frac{\gamma\bar{Q}}{\zeta} \right) \quad (31)$$

$$(T \cdot D) = \beta \left(\frac{nR_0}{1+n} \right)^2 (\gamma\bar{Q} - Q\delta_n) \cdot 2\pi i \quad (32)$$

$$A = -\frac{2\mu B}{x+1} \left(\frac{nR_0}{n+1} \right)^2 (\gamma\bar{Q} - Q\delta_n) \quad (33)$$

식(26)~(29)를 식(22)의 적분식에 대입하여 식 (16)과 양변을 비교하여 계수결정을 하면 다음의 최종결과식을 얻는다.

$$\Phi(\zeta) = A \ln \zeta - \frac{\bar{A}}{n} \frac{1 - \delta_n}{\zeta^{n-1}} \quad (34)$$

또 하나의 복소 포텐셜 함수 $\Psi(\zeta)$ 는 트랙션이 없는 경계 조건의 경우 England⁽¹²⁾가 제시한 응력해석영역의 확장식인 다음식으로부터 계산될 수 있다.

$$\Psi(\zeta) = -\bar{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \Phi'(\zeta) \quad (35)$$

식 (34), (35)로부터

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) = \bar{A} \ln \zeta + \frac{A(1 - \delta_n)}{n} \zeta^{n-1} \\ - \frac{\zeta^{n+1} + n}{\zeta^{n+1} - 1} \left[\frac{A\zeta^{n-1}}{n} - \frac{\bar{A}(1-n)}{n^2} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

양의 x 축상에 놓여있는 균열 선단에서의 TSIF 결정식은 다음과 같다.

$$K = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{\frac{\pi}{\omega''(1)}} \Phi'(1) \quad (37)$$

여기서 K_I 와 K_{II} 는 열립형과 전단형 TSIF이며 식 (34)를 식(37)에 대입하여 구한 K_I , K_{II} 를 λ 에 대해 $\frac{2k\pi}{n+1}$ 만큼 평행이동시키면 k 번째 커스프에서의 TSIF가 다음식으로 구하여진다.

$$K_I^* = \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^2} (2n-1) (\delta_n - \gamma) \cos\left(\lambda - \frac{2k\pi}{n+1}\right) \quad (38)$$

$$K_{II}^* = \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^2} (\delta_n + \gamma) \sin\left(\lambda - \frac{2k\pi}{n+1}\right) \quad (39)$$

$$K_I^*/K_{II}^* = \frac{\delta_n - \gamma}{\delta_n + \gamma} (2n-1) \cot\left(\lambda - \frac{2k\pi}{n+1}\right) \quad (40)$$

여기에서

$$K_{I,II}^* \equiv K_{I,II} / \left(\frac{2\sqrt{\pi} \mu \beta R_o^{3/2} \tau}{\chi + 1} \right) \quad (41)$$

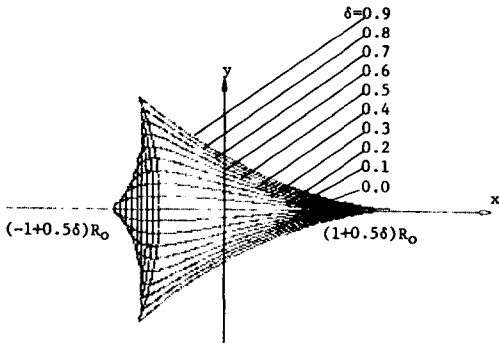


Fig. 2 Variations of symmetric airfoil crack configuration with configuration parameter δ

Fig. 2와 같은 대칭 익형 균열에 대한 등각 사상함수는 다음과 같다⁽¹¹⁾.

$$Z = \omega(\zeta) = \frac{R_o}{2} \left[(1+\delta)\zeta + \frac{1-\delta}{\zeta} + \frac{\delta}{\zeta^2} \right] \quad (0 \leq \delta < 1) \quad (42)$$

여기서 $2R_o$ 는 상당균열길이이고 δ 는 형상계수이다. 하이포사이클로이드 균열의 해석과정을 똑같이 적용하면

$$\Phi(\zeta) = A \ln \zeta - \frac{\delta \bar{A}}{1+\delta} \frac{1}{\zeta} \quad (43)$$

여기에서

$$A = \frac{\mu \beta R_o^2}{\chi + 1} \frac{1+\delta}{2} [Q(1-\delta) - \gamma \bar{Q}(1+\delta)] \quad (44)$$

TSIF는 다음식으로 얻어진다.

$$K_I^* = \frac{(1+2\delta)^{\frac{1}{2}}}{2} [1-\delta - \gamma(1+\delta)] \cos \lambda \quad (45)$$

$$K_{II}^* = \frac{1}{2(1+2\delta)^{\frac{1}{2}}} [1-\delta + \gamma(1+\delta)] \sin \lambda \quad (46)$$

$$K_I^*/K_{II}^* = \frac{1-\delta - \gamma(1+\delta)}{1-\delta + \gamma(1+\delta)} (1+2\delta) \cot \lambda \quad (47)$$

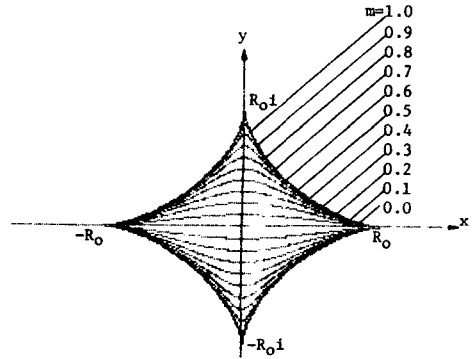


Fig. 3 Variations of symmetric lip crack configuration with configuration parameter m

또한 Fig. 3와 같은 대칭입술형 균열에 대한 등각 사상함수는 다음과 같다⁽¹¹⁾.

$$Z = \omega(\zeta) = \frac{R_o(m+2)}{4} \left[\zeta + \frac{2(1-m)}{m+2} \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{\zeta^3} \right] \quad (0 \leq m \leq 1) \quad (48)$$

여기서 $2R_o$ 는 상당균열길이이고 m 는 형상계수로서 하이포사이클로이드 균열과 같은 과정을 적용하면 결과식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\Phi(\zeta) = A \ln \zeta - \frac{m \bar{A}}{m+2} \frac{1}{\zeta^2} \quad (49)$$

여기에서

$$A = \frac{\mu \beta R_o^2 (m+2)}{8(\chi+1)} [2(1-m)Q - (m+2)\gamma \bar{Q}] \quad (50)$$

TSIF는 다음식으로 얻어진다.

$$K_I^* = \frac{3m+2}{8(1+2m)^{\frac{1}{2}}} [2(1-m) - (m+2)\gamma] \cos \lambda \quad (51)$$

$$K_{II}^* = \frac{2-m}{8(1+2m)^{\frac{1}{2}}} [2(1-m) + (m+2)\gamma] \sin \lambda \quad (52)$$

$$K_I^*/K_{II}^* = \frac{(3m+2) [2(1-m) - (m+2)\gamma]}{(2-m) [2(1-m) + (m+2)\gamma]} \times \cot \lambda \quad (53)$$

3. 검 토

선형균열인 $n=1$, $\delta=m=0$ 인 경우에 $\gamma=1$ 일 때 식 (38), (39), (45), (46), (51), (52)으로부터 Sih의 결과⁽⁵⁾와 일치하는 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} K_I^* &= 0 \\ K_{II}^* &= \sin(\lambda - k\pi) \end{aligned} \quad (k=0, 1) \quad (54)$$

이때 균열의 성장은 균열선단에서의 전단효과에 의해서만 일어남을 알 수 있다. $\gamma=-1$ 일 때는

$$\begin{aligned} K_I^* &= \cos(\lambda - k\pi) \\ K_{II}^* &= 0 \end{aligned} \quad (k=0, 1) \quad (55)$$

이때는 반대로 K_I^* 가 균열성장의 원인이 됨을 보여준다.

하이포사이클로이드 균열에 대해 $\gamma=1$ 이고 $n=2$ 일 때 λ 에 대해 K_I^* 와 K_{II}^* 를 그린 것이 Fig. 4이다. 또 $\gamma=1$, $\lambda=0$, $n \geq 2$ 에 대해 각 커스프 Z_k 에서의 K_I^* 와 K_{II}^* 를 식 (38)과 (39)로부터 관찰하면 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \arg Z_k < \frac{\pi}{2} & \text{에서 } K_I^* < 0 \\ \arg Z_k = \pm \frac{\pi}{2} & \text{에서 } K_I^* = 0 \\ \frac{\pi}{2} < \arg Z_k < \frac{3}{2}\pi & \text{에서 } K_I^* > 0 \\ 0 < \arg Z_k < \pi & \text{에서 } K_{II}^* < 0 \end{aligned} \quad (56)$$

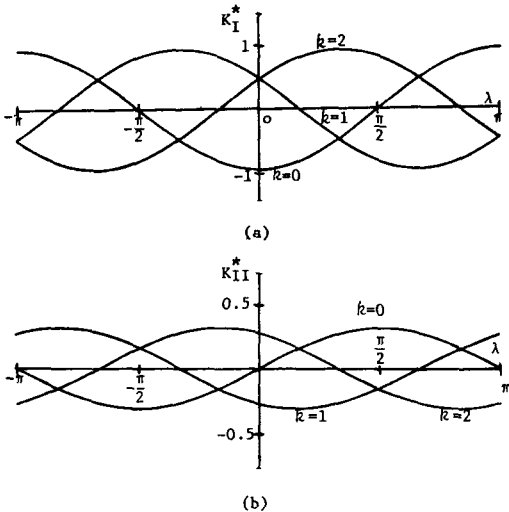


Fig. 4 Variations of dimensionless thermal stress intensity factors at the cusp k of an insulated three-cusp-hypocycloid-hole ($\gamma=1$, $n=2$) with heat flow direction λ (a) K_I^* (b) K_{II}^*

$$\arg Z_k = 0, \pm\pi \text{에서 } K_{II}^* = 0 \quad (57)$$

$$\pi < \arg Z_k < 2\pi \text{에서 } K_{II}^* > 0$$

$\gamma=1$, $n \geq 2$ 에 대해 $k=0$ 인 커스프에서 λ 의 증가에 따른 K_I^* 와 K_{II}^* 의 n 에 대한 변화를 그린 것이 Fig. 5이다. Fig. 5(a), (b)에서 $|K_I^*|$ 과 $|K_{II}^*|$ 가 각각 $n=4$ 에서 최대값 1.12를, $n=2$ 에서 최대값 0.3143을 가지는 것을 알 수 있다. 그리고 Fig. 5(c)에서는 균열선단에서의 TSIF의 비가 n 에 선형적으로 변함을 보여준다. 한편, $n \geq 2$ 이고 $\gamma=-1$ 일 때와 $\gamma=1$ 일 때의 TSIF를 비교하면 식 (38), (39)로부터

$$\begin{aligned} (K_I^*)_{\gamma=-1} &= -(K_I^*)_{\gamma=1} \\ (K_{II}^*)_{\gamma=-1} &= -(K_{II}^*)_{\gamma=1} \end{aligned} \quad (58)$$

그리고 균열선단에서의 TSIF의 비는 γ 에 관계없이 같음을 알 수 있다. $n=\infty$ 이면 식 (34)와 (36)으로부터 반지름이 R_0 인 원형구멍에 대한 다음과 같은 복소포텐셜함수가 얻어진다.

$$\Phi_\infty(\zeta) = A_\infty \ln \zeta \quad (59)$$

$$\Psi_\infty(\zeta) = \bar{A}_\infty \ln \zeta - \frac{A_\infty}{\zeta^2} \quad (60)$$

여기서 하첨자 ∞ 는 n 이 ∞ 임을 의미하며 식 (24)와 (33)로부터 $\omega_\infty(\zeta)$ 와 A_∞ 는 다음식으로 표현된다.

$$Z = \omega_\infty(\zeta) = R_0 \zeta \quad (61)$$

$$A_\infty = -\frac{2\mu\beta R_0^2 \gamma Q}{\alpha + 1} \quad (62)$$

응력과 변위식은 복소포텐셜함수와 다음의 관계가 있다^(1,4).

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \left[\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\Phi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right] \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r + i\tau_{r\theta} &= \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\Phi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \\ &- \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] + \frac{\Psi'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} 2\mu(u_r + iu_\theta) &= [\chi\Phi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\Phi'(\zeta)} \\ &- \overline{\Psi(\zeta)} + 2\mu G(\zeta)] \cdot e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (65)$$

식 (59~62)를 식 (63), (64)에 대입하여 $\lambda = \frac{\pi}{2}$ 에서 응력성분을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4\mu\beta R_0 \alpha \gamma}{\alpha + 1} \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right] \sin\theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{4\mu\beta R_0 \alpha \gamma}{\alpha + 1} \left[\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \right] \sin\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{4\mu\beta R_0 \alpha \gamma}{\alpha + 1} \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right] \cos\theta \end{aligned} \quad (66)$$

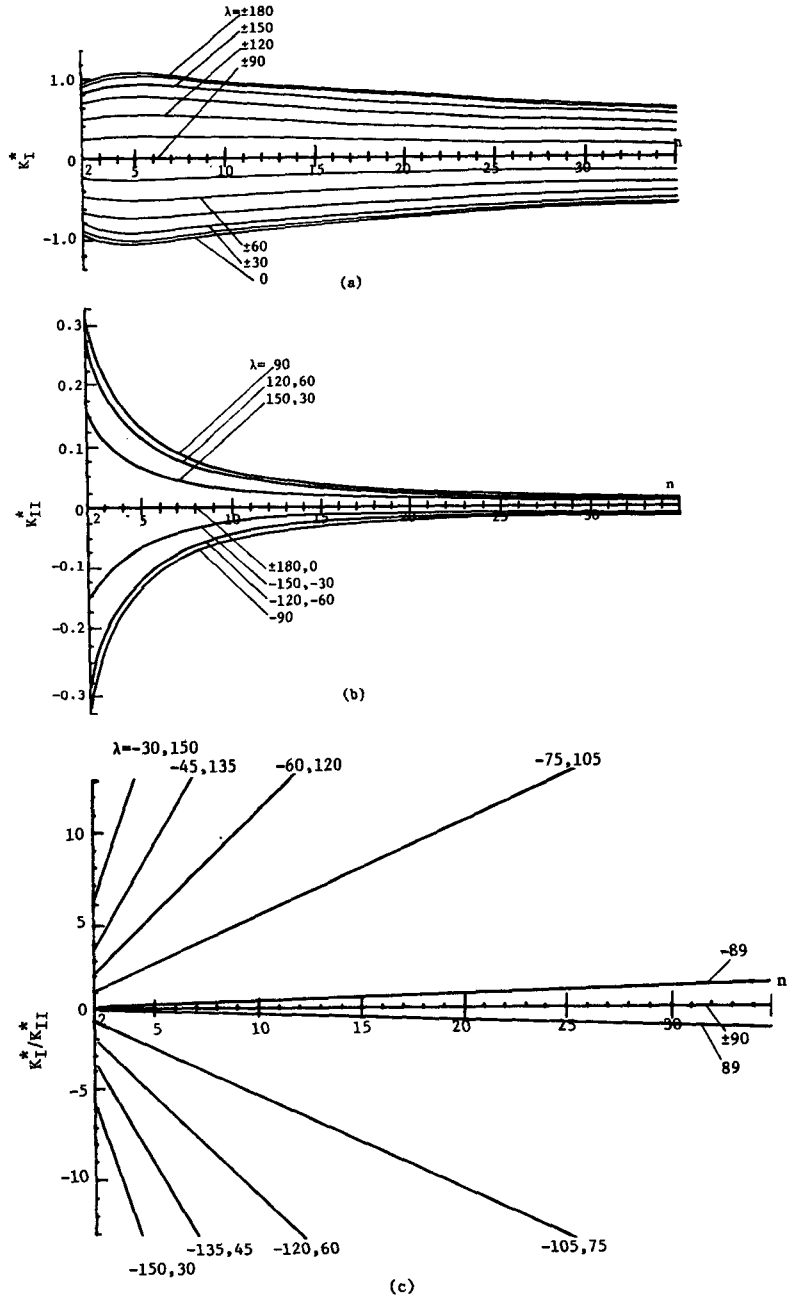


Fig. 5 Variations of dimensionless thermal stress intensity factors at the cusp $k=0$ of an insulated hypocycloidal hole ($\gamma=1$) with configuration parameter n and a constant heat flow direction λ (a) K_I^* (b) K_U^* (c) K_I^*/K_U^*

여기에서 $\rho = \frac{r}{R_0}$ 이다. 위의 결과는 $\gamma=1$ 인 경우 잘 알려진 Florence⁽²⁾의 식과 일치한다. 식 (59~62)와 식 (65)에 의해 $\lambda = \frac{\pi}{2}$ 에서 변위는 다음 식으로 얻는다.

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\beta R_0^2 \tau}{\alpha + 1} \left[2\gamma \ln \rho - \gamma \frac{1 - \rho^2}{\rho^2} + \frac{\alpha + 1}{2} \rho^2 \right] \sin \theta \\
 u_\theta &= \frac{\beta R_0^2 \tau}{\alpha + 1} \left[2\gamma \ln \rho + \gamma \frac{1 - \rho^2}{\rho^2} - \frac{\alpha + 1}{2} \rho^2 \right] \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

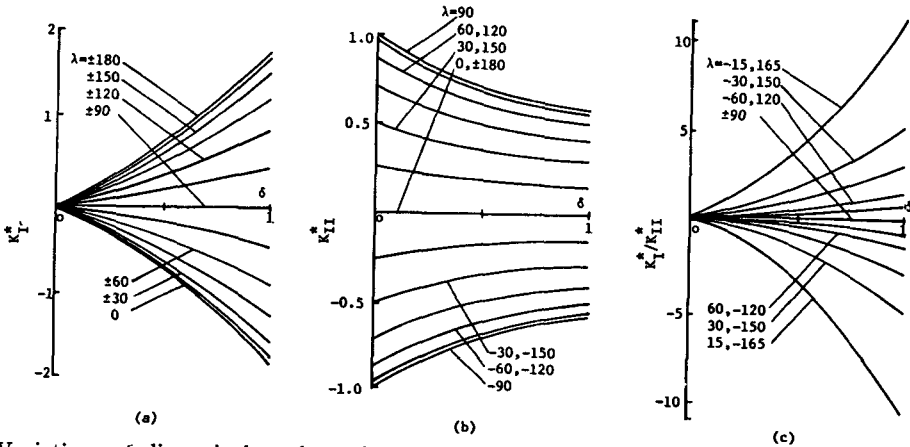


Fig. 6 Variations of dimensionless thermal stress intensity factors at the cusp crack tip of an insulated symmetric airfoil hole ($\gamma=1$) with configuration parameter δ for a constant heat flow direction λ (a) K_I^* (b) K_{II}^* (c) K_I^*/K_{II}^*

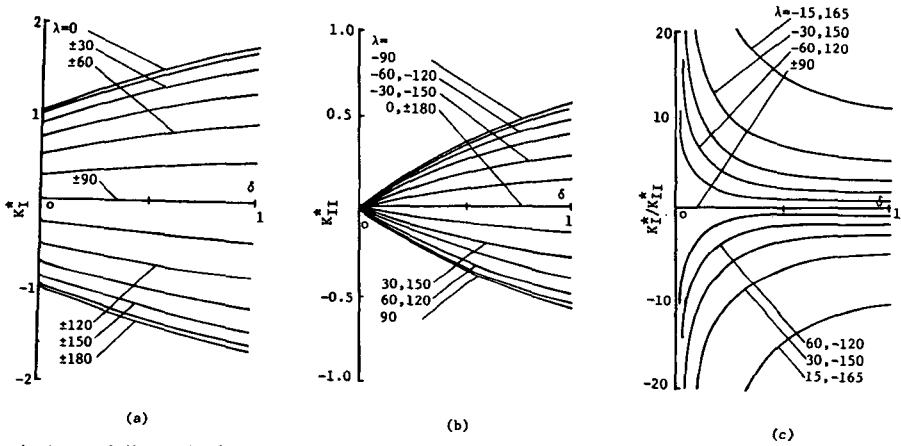


Fig. 7 Variations of dimensionless thermal stress intensity factors at the cusp of a symmetric airfoil hole under zero temperature boundary condition ($\gamma=-1$) with configuration parameter δ for a constant heat flow direction λ (a) K_I^* (b) K_{II}^* (c) K_I^*/K_{II}^*

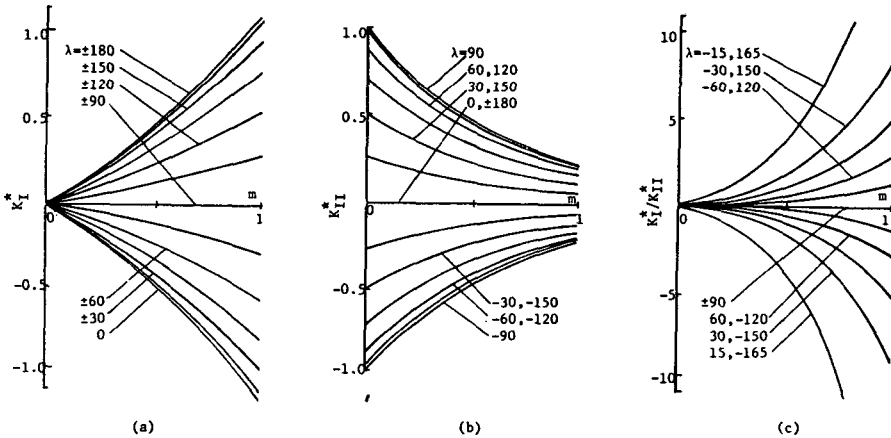


Fig. 8 Variations of dimensionless thermal stress intensity factors at the cusp of an insulated symmetric lip hole ($\gamma=1$) with configuration parameter m for a constant heat flow direction λ (a) K_I^* (b) K_{II}^* (c) K_I^*/K_{II}^*

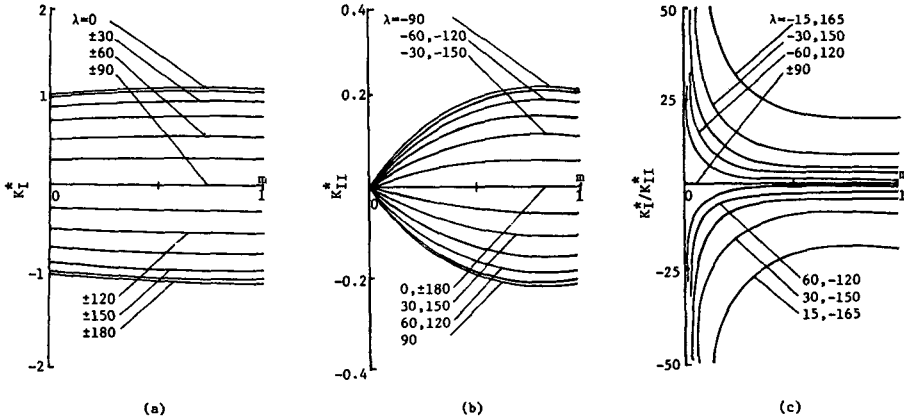


Fig. 9 Variations of dimensionless thermal stress intensity factors at the cusp of a symmetric lip hole under zero temperature boundary condition ($\gamma=-1$) with configuration parameter m for a constant heat flow direction λ (a) K_I^* (b) K_{II}^* (c) K_I^*/K_{II}^*

대칭익형 균열에 대한 K_I^* 와 K_{II}^* 를 $\gamma=1$ 및 -1 일 때 형상계수 δ 에 대해 λ 를 증가시키면서 그린 그림이 각각 Fig. 6과 7에 해당한다. 여기서 형상계수 δ 가 0에서 1로 증가함에 따라 $\gamma=-1$ 일 때는 $|K_I^*|$ 는 증가하며 $|K_{II}^*|$ 는 감소하는 경향을 주며 $\gamma=1$ 일 때는 $|K_I^*|$ 와 $|K_{II}^*|$ 가 모두 증가하는 경향을 준다. 각각의 γ 에서 λ 에 대한 K_I^* 와 K_{II}^* 의 경향은 $n \geq 2, k=0$ 인 하이포사이클로이드 균열선단에서의 K_I^* 와 K_{II}^* 의 λ 에 대한 경향과 일치하고 있다. 대칭입술형 균열에 대한 K_I^* 과 K_{II}^* 를 $\gamma=1$ 및 -1 일 때 형상계수 m 에 대해 λ 를 증가시키면서 그린 그림이 Fig. 8과 9에 해당한다. 형상계수 m 및 λ 에 대한 K_I^* 와 K_{II}^* 의 경향은 대칭익형 균열의 δ 및 λ 에 대한 K_I^* 와 K_{II}^* 의 경향과 같음을 Fig. 6~9에서 알 수 있다.

4. 결 론

균열열유동하에 있는 2차원 탄성체 내에 균열경계가 단열된 경우 및 상대온도가 영으로 고정된 트랙션이 없는 하이포사이클로이드 균열, 대칭익형 균열 및 대칭입술형 균열의 TSIF를 구하기 위한 연구에서 다음과 같은 결과를 얻었다.

- (1) 각종 커스프균열에 대한 TSIF를 균열열유동각도의 주기함수로 유도하였다.
- (2) 균열열유동방향과 평행하게 놓인 각종 커스프균열 선단에서는 모두드 I 또는 모두드 II TSIF중 어느 하나만 존재한다.

(3) 3개 이상의 커스프를 갖는 하이포사이클로이드 균열의 TSIF의 비는 열경계 조건에 관계없이 동일한 값을 가지며 그 값은 커스프 갯수에 선형적으로 비례한다.

(4) 대칭익형 균열과 대칭입술형 균열의 형상계수와 열유동각도에 대한 TSIF변화 경향은 서로 유사하다.

(5) 본 해석결과로부터 단열된 선형균열에 대한 Sih의 TSIF식과 단열된 원형 구멍에 대한 Florence의 열응력식이 유도됨을 보였다.

후 기

이 논문은 1987년도 문교부 자유공모과제 학술연구조성비의 지원과제인 "cusp형 결함의 열응력세기계수 결정에 관한 연구"의 일부이며 연구비 지원을 하여 주신 한국학술진흥재단에 심심한 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

- (1) Bogdanoff, J. L., 1954, "Note on Thermal Stresses", Trans. ASFE, J. Appl. Mech, Vol. 21, p. 88.
- (2) Florence, A. L. and Goodier, J. N., 1959, "Thermal Stress at Spherical Cavities and Circular Holes in Uniform Heat Flow", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 81, pp. 293~294.
- (3) Florence, A. L. and Gooder, J. N., 1960, "Thermal

- Stress due to Disturbance of Uniform Heat Flow by an Insulated Ovaloid Hole”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 27, pp. 635~639.
- (4) Muskhelishvili, N. I., 1953, “Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity”, 3rd ed., P. Noordhoff Ltd., Gronigen, Holland.
- (5) Sih, G. C., 1962, “On the Singular Character of Thermal Stresses near a Crack Tip”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 29, pp. 587~589.
- (6) Sekine, H., 1975, “Thermal Stress Singularities at Tips of a Crack in a Semi-Infinite Medium under Uniform Heat Flow”, *Engng Fract. Mech.*, Vol. 7, pp. 713~729.
- (7) Sekine, H., 1977, “Influence of an Insulated Circular Hole on Thermal Stress Singularities at Tips of a Crack”, *Int., J. Fract.*, Vol. 13, pp. 133~149.
- (8) Sumi, N., 1980, “Thermal Stress Singularities at Tips of a Griffith Crack in a Finite Rectangular Plate”, *Nucl. Engng Design*, Vol. 60, pp. 389~394.
- (9) Lee, K. Y. and Advani, S. H., 1983, “Critical Loading Conditions and Stree Intensity Factors for Partial or Entire Closure of Griffith Crack under Thermo-Mechanical Loading”, *Int. J. Fract.*, Vol. 22, pp. 83~90.
- (10) Wu, C. H., 1982, “Unconventional Internal Cracks Part 1: Symmetric Variations of a Straight Crack”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* Vol. 49, pp. 62~68.
- (11) Wu, C. H., 1982, “Unconventional Internal Cracks Part 2: Method of Generating Simple Cracks”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* Vol. 49, pp. 383~388.
- (12) England, A. H., 1971, “Complex Variable method in Elasticity”, Wiley-Interscience, New York.