

<論 文>

벨로우즈의 동특성에 관한 연구

이 완 익* · 오 재 응** · 김 태 원***

(1988년 7월 12일 접수)

A Study on the Dynamic Characteristics of Bellows

Wan Ik Lee, Jae Eung Oh and Tae Wan Kim

Key Words : Bellows(신축 이음), Axisymmetric Conical Frustum Element(축대칭 원추대 요소), F.E.M(유한요소법), Dynamic Characteristic(동특성)

Abstract

In this study, the dynamic characteristics of Bellows, used for expansion joint, were investigated by F.E.M. Using the axisymmetric conical frustum element, the natural frequencies, modevectors and the parameters governing the dynamic characteristics of Bellows were also investigated. Through the experiment, it was shown that the results calculated by finite element method and measured experimental values were in good agreement.

기 호 실 명

<p>a : 원통 부분의 반지름</p> <p>$[D]$: 탄성 계수 행렬</p> <p>E : 탄성 계수</p> <p>$\{F\}$: 외력 벡터</p> <p>h : 요소의 두께</p> <p>j : 조화 성분의 차수</p> <p>K_E : 운동 에너지</p> <p>$[K]$: 전체 강성 행렬</p> <p>$[K]^e$: 요소 강성 행렬</p> <p>L_i : 요소의 접선 방향 길이</p> <p>l_x : 원통 부분의 길이(원통셀의 길이)</p> <p>$[M]$: 전체 질량 행렬</p> <p>$[M]^e$: 요소 질량 행렬</p> <p>$M_s, M_\theta, M_{s\theta}$: 합모멘트</p> <p>$[N]$: 형상 함수 행렬</p> <p>$N_s, N_\theta, N_{s\theta}$: 합응력</p>	<p>N_c : 벨로우즈 파형의 수</p> <p>r : 회전축으로부터 요소의 중립면까지의 반지름</p> <p>r_0 : 벨로우즈 파형의 반지름</p> <p>$[T]$: 좌표 변환 행렬</p> <p>t : 시간</p> <p>u_i, v_i, w_i : 변위</p> <p>β : 회전 변위</p> <p>$\{u\}$: 변위 벡터</p> <p>$\{\bar{J}\}^e$: 요소의 절점 변위 벡터(기준 좌표계)</p> <p>$\{\Delta\}^e$: 요소의 절점 변위 벡터(국부 좌표계)</p> <p>$\epsilon_s, \epsilon_\theta, \gamma_{s\theta}$: 변형율 성분</p> <p>$k_s, k_\theta, k_{s\theta}$: 곡률 성분</p> <p>ν : 프와송 비</p> <p>ξ : 계수</p> <p>Π_p : 위치 에너지</p> <p>ρ : 밀도</p> <p>ω : 각속도</p> <p>ϕ : 원추대 요소의 자오선 방향의 접선과 회전축이 이루는 각</p>
---	---

*정회원, 한양대학교 공과대학 기계설계학과
 **정회원, 한양대학교 공과대학 정밀기계공학과
 ***한양대학교 대학원

1. 서 론

근년, 산업이 발달함에 따라 화학플랜트, 발전소, 지역 난방 시스템, 자동차 등에 배기, 배관 계통이 많이 사용되고 있다. 배기, 배관 계통은 고온, 고압의 유체로 인한 축방향 변형량이나 외력에 의한 진동을 받는다. 이러한 변형량과 진동을 흡수하여 구조물의 변형 및 파손을 방지하는 완충기의 하나로 벨로우즈(bellows)가 널리 이용되고 있다. 벨로우즈는 Fig. 1에 표시한 것과 같이 원통셸(cylindrical shell), 원형 평판(annular plate), Toroidal 셸로 이루어진 파형(corrugation)이 연속된 복합 셸구조(composite shell structure)의 일종이다. 최근 벨로우즈의 이용이 광범해짐에 따라 응력 및 변형량을 중심으로 한 종래의 설계개념에서 동특성을 고려한 포괄적인 개념이 도입되어지고 있다. 이것은 벨로우즈를 장착함으로써 배기, 배관 계통의 전체적인 동특성이 변화하기 때문이다. 따라서, 외부 조건에 의한 벨로우즈의 공진 현상과 이에 따른 구조변경 여부를 검토하여야 한다.

벨로우즈의 동특성에 대한 직접적인 연구는 간판식⁽¹⁾을 이용하여 고유 진동수를 예측하는 정도에 그치고 있으나, 벨로우즈를 구성하고 있는 원통셸, 원형평판에 대한 해석은 활발히 진행되어 왔으며⁽²⁻⁴⁾, 복합 셸구조의 해석에 유리한 유한요소이론⁽⁵⁾이 보고되면서, 이를 이용한 복합 셸구조의 동특성 해석에 응용할 수 있는 기초 연구가 진행되어 왔다^(3,6). 1973년, Balderes⁽⁷⁾는 벨로우즈의 기본형으로 사용되는 Toroidal셸의 동특성에 대하여 연구하였다. 그는 Love-Reissner 식을 이용하여 Fourier함수로 해를 구하였으나, 벨로우즈에 직접 적용하기에는 미흡하였다.

일반적으로 벨로우즈의 연속적인 파형에 대한 전체 운동방정식을 기술하는 것이 어려우므로 근사적인 해법에 의존하였다. 그러나, 이와 같은 결과는 벨로우즈의 합리적인 설계를 위한 자료로는 충분하

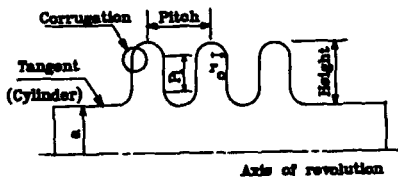


Fig. 1 A configuration of bellows

지 못하였다. 이러한 점을 극복하기 위하여 유한요소법을 이용하면, 요소의 강성행렬과 질량행렬만을 정의함으로써 유효한 해를 얻을 수 있다^(8,9).

본 연구에서는 복합 셸구조에 유리한 축대칭 원추대 요소(axisymmetric conical frustum element)의 유한요소법을 이용하였고, 고유 진동수와 진동 모우드를 구하여 벨로우즈의 동특성을 규명하였다. 또한, 벨로우즈의 기하학적인 형상을 변수로 한 동특성의 변화를 검토하여 벨로우즈의 동적인 안정성에 관한 설계 자료를 제시하고자 하였다.

2. 진동 해석을 위한 유한 요소법

2.1 축대칭 원추대 요소

본 연구에서는 벨로우즈의 형상을 고려하여 축대칭 원추대 요소를 이용하였다. 축대칭 원추대 요소는 외력 및 변위를 원주 방향에 대하여 Fourier급수로 전개할 수 있으므로 3절점 요소나, 4절점 요소를 이용하는 경우보다 요소수, 계산시간 등을 절약할 수 있다^(6,10,11). Fig. 2는 축대칭 원추대 요소를 표시한 것이다.

2.2 유한 요소법의 정식화

축대칭 원추대 요소에 발생하는 변위는 요소의 종방향에 대한 접선 방향(s), 원주 방향(θ) 및 법선 방향의 변위이며 이를 각각 u, v, w 라 하고, 접선 방향의 회전각을 β 라 할 때, θ 방향에 대해서 급수 형태로 식 (1)과 같이 가정한다^(3,5,10,11). 따라서, Fig. 2에 표시한 것과 같이 원추대 요소는 각 절점원(nodal circle)에서 4개의 변위를 가지므로, 각 요소의 자유도는 8이 된다.

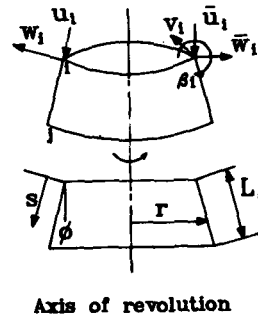


Fig. 2 An axis symmetric conical frustum element

$$\begin{aligned}
 u(s, \theta) &= \sum_{j=0}^m u(s) \cos j\theta \\
 v(s, \theta) &= \sum_{j=1}^m v(s) \sin j\theta \\
 w(s, \theta) &= \sum_{j=0}^m w(s) \cos j\theta \\
 \beta(s, \theta) &= \sum_{j=0}^m \beta(s) \cos j\theta
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 s 는 요소의 접선 방향에 대한 변수이고, ϕ 는 요소의 자오선 방향이 회전축과 이루는 각이며, j 는 조화 차수(harmonic number)이다.

식 (1)에서 $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$ 는 요소의 변위를 고려하여 (2)식과 같이 가정하고, 회전 변위 β 는 dw/ds 로 정의한다^(3,5,11).

$$\begin{aligned}
 u(s) &= a_1 + a_2 s \\
 v(s) &= a_3 + a_4 s \\
 w(s) &= a_5 + a_6 s + a_7 s^2 + a_8 s^3
 \end{aligned} \tag{2}$$

$a_i (i=1,9)$ 는 임의 상수이고, 요소의 절점 변위 벡터 $\{\delta\}^e$ 를

$$\{\Delta\}^e = \{u_i, v_i, w_i, \beta_i, u_j, v_j, w_j, \beta_j\}^T \tag{3}$$

로 정의하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\{u\} = [N] \{\Delta\}^e \tag{4}$$

단, $\{u\} = \{u \ v \ w\}^T$ 인 변위 벡터이고, $[N]$ 은 형상함수 행렬로서 부록에 표시하였다. 요소내의 절점 변위 성분 u_i, v_i, w_i, β_i 를 회전축과 평행한 방향과 수직인 방향의 변위 성분 $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \beta_i$ 로 표시하면 식 (5)와 같다.

$$\{\Delta\}^e = [T] \{\bar{\Delta}\}^e \tag{5}$$

단, $[T]$ 는 좌표 변환 행렬(coordinate transformation matrix)로서

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

이다.

축대칭 원추대 요소에 발생하는 변형률-변위 관계식은 아래와 같다⁽⁶⁾.

$$\{\epsilon\} = [L] \{u\} \tag{7}$$

단, $\{\epsilon\} = \{\epsilon_s, \epsilon_\theta, \gamma_{s\theta}, \kappa_s, \kappa_\theta, \kappa_{s\theta}\}^T$ 이고 $[L]$ 은 부록에 수록하였다.

또한, 요소에 발생하는 합응력-변형률 관계식은

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \tag{8}$$

로 표시할 수 있으며, $\{\sigma\} = \{N_s, N_\theta, N_{s\theta}, M_s, M_\theta, M_{s\theta}\}^T$ 이다. Fig. 3은 축대칭 셸 구조물에 발생

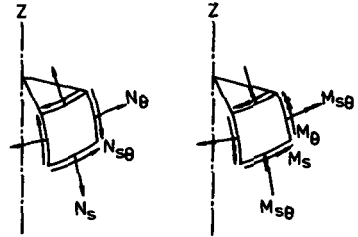


Fig. 3 Stress and moment resultants occurring on the shell surface

하는 합응력(stress resultant)과 합모멘트(moment resultant)를 표시하고 있다.

2.3 운동 방정식

Hamilton의 원리를 이용하여 계의 운동 방정식은 식 (9)로 나타낼 수 있다^(3,11).

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (\Pi_p - K_E) dt = 0 \tag{9}$$

여기서, Π_p 는 포텐셜 에너지(potential energy), K_E 는 운동 에너지(kinetic energy)로서 아래와 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_p &= \int_A \{\sigma\}^T \delta \{\epsilon\} dA - \int_A \{F\}^T \delta \{u\} dA \\
 &= \int_A ([L][N][T] \{\bar{\Delta}\}^e)^T \\
 &\quad \times [D] \delta ([L][N][T] \{\bar{\Delta}\}^e) dA \\
 &\quad - \int_A \{F\}^T \delta ([N][T] \{\bar{\Delta}\}^e) dA
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \delta K_E &= - \int_V \rho \{\dot{u}\}^T \delta \{u\} dV \\
 &= - \int_V \rho ([N][T] \{\bar{\Delta}\}^e)^T \\
 &\quad \delta ([N][T] \{\bar{\Delta}\}^e) dV
 \end{aligned} \tag{11}$$

식 (10), (11)을 식 (9)에 대입하고, N 개의 유한 요소에 대하여 정리하면 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$[K] \{\bar{\Delta}\} + [M] \{\ddot{\bar{\Delta}}\} = \{F\} \tag{12}$$

$$\{F\} = \sum_e^N \{F\}^e, \quad \{\bar{\Delta}\}^e = \sum_e^N \{\bar{\Delta}\}^e, \quad \{\ddot{\bar{\Delta}}\} = \sum_e^N \{\ddot{\bar{\Delta}}\}^e \tag{13}$$

임의의 조화차수, j 에 대하여 요소의 강성 행렬(stiffness matrix) 및 질량 행렬(mass matrix) $[K]^e, [M]^e$ 은

$$[K]^e = \pi L_i \xi \int_0^1 [T]^T ([L][N])^T [D] ([L][N])[T] r ds \tag{14}$$

$$[M]^e = \pi L_i h \xi \rho \int_0^1 ([N][T])^T$$

$$([N][T]) rds \quad (15)$$

이고, 식 (14), (15)에서

$$j=0 \text{ 이면 } \xi=2$$

$$j \geq 1 \text{ 이면 } \xi=1 \text{ 이다.}$$

자유 진동하는 것에 대하여 식 (12)는

$$[K]\{\bar{A}\} + [M]\{\ddot{\bar{A}}\} = 0 \quad (16)$$

로 표시된다.

$\{\bar{A}\}$ 를 각속도 ω 인 조화 운동으로 나타내면, $\{\ddot{\bar{A}}\}$ 는 식 (17)과 같이 표시된다.

$$\{\ddot{\bar{A}}(t)\} = -\omega^2 \{\bar{A}\} e^{i\omega t} \quad (17)$$

식 (16)에 식 (17)을 대입하면,

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{A}\} = 0 \quad (18)$$

로 되어 자유 진동의 특성 방정식이 된다. 본 연구에서는 식 (18)의 고유치 문제를 풀기 위하여 Subspace Iteration법⁽⁹⁾을 이용하였다. Fig. 4는 본 연구에서 사용한 프로그램의 개략적인 흐름을 표시하고 있다.

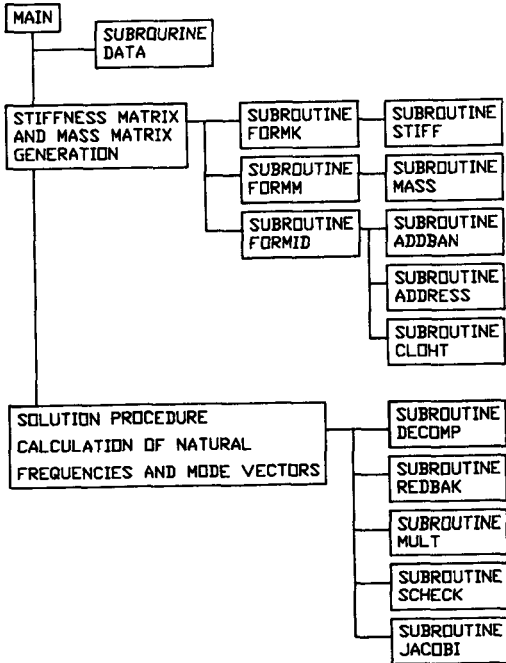


Fig. 4 A brief structure of F.E.M. program

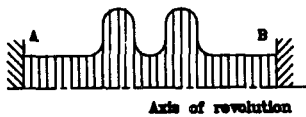


Fig. 5 Boundary condition and mesh generation

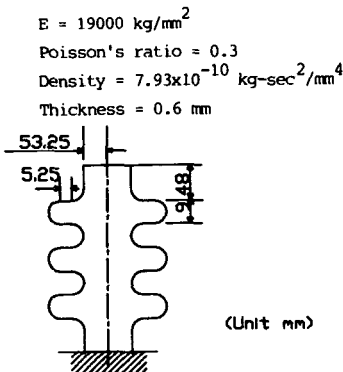


Fig. 6 Dimensions of test sample

2.4 해석 형상 및 경계 조건

벨로우즈는 일반적으로 플랜지 이음이나, 용접이음으로 장착되므로 식 (19)와 같은 경계 조건을 가진다. Fig. 5는 벨로우즈의 요소 분할 형태를 나타내고 있다.

$$\begin{aligned}
 u_A = v_A = w_A = \beta_A = 0 \\
 u_B = v_B = w_B = \beta_B = 0
 \end{aligned} \quad (19)$$

3. 실험

3.1 실험모델

벨로우즈의 고유 진동수를 측정하기 위하여 제품화된 배관용 벨로우즈(U Type)를 준비하고, 벨로우즈의 일단을 기계구조용강(SM 45C)으로 만든 원판에 알곤 용접하여 고정시켰다. 이때, 원판은 지지조건과 방진을 고려하여 벨로우즈보다 큰 질량을 갖도록 제작하였고, 표면은 연삭하였다. 실험에 사용된 벨로우즈는 스테인리스강으로 제작하였으며, 벨로우즈의 치수와 재료의 기계적 특성치는 Fig. 6에 표시하였다.

3.2 고유진동수 측정 실험

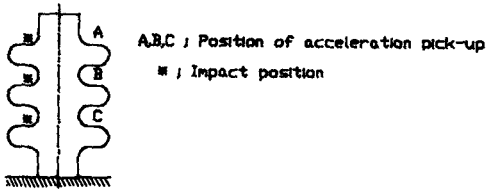
진동수를 측정하기 위하여 벨로우즈를 임팩트 햄머로 가진하였으며 가속도-픽업의 위치는 벨로우즈의 원형 평판부분에 부착하였고, Fig. 7(a)에 표시한 것과 같이 가속도-픽업을 부착한 파형 부분을 가진하였다. 가속도-픽업은 최소형(PV-90A형, 1.2g, Rion Co.)을 사용하였다. 임팩트 햄머와 가속도-픽업에 의해 측정된 신호는 FFT 해석기(SD-375)로 모니터링하면서, 고유 진동수를 측정하였다. Fig. 7(b)는 본 연구에서 사용한 측정장치 및

자료처리 계통도를 나타내고 있다.

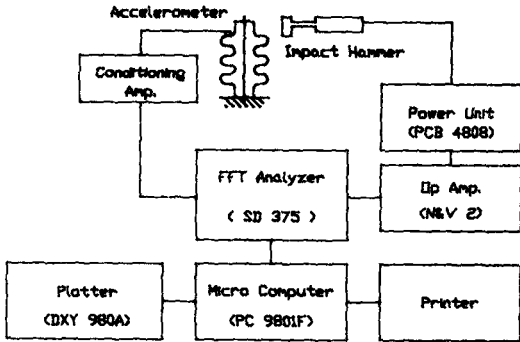
4. 결과 및 고찰

4.1 해석의 정확도

본 해석의 정확도를 검토하기 위하여, 첫째는 본 연구에서 구한 진동수와 Sen⁽³⁾이 해석한 일단이 고정된 원통셀에 대한 고유 진동수를 비교하였으며,



(a) Impact position and acceleration pick-up location



(b) Experimental data acquisition and processing diagram

Fig. 7 Experimental data acquisition system diagram

두번째는 배관용 벨로우즈에 대하여 고유 진동수 측정 실험을 행하였다.

Fig. 8과 같이 일단이 고정된 원통셀에 대한 해석 결과와 Sen⁽³⁾의 결과를 Table 1에 표시하였다. Table 1과 같이 두 해석 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 2는 실험으로 측정된 진동수와 본 연구의

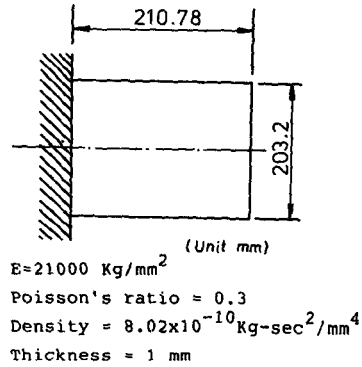


Fig. 8 Fixed-free cylindrical shell⁽³⁾

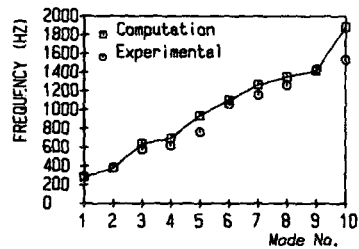


Fig. 9 Comparison of experimental and computational results

Table 1 Fixed-free cylindrical shell

Harmonic number	Natural frequencies, in Hertz					
	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
	Present	Reference(3)	Present	Reference(3)	Present	Reference(3)
0	0.5482E04	0.5486E04	0.7960E04	0.8055E04	0.8027E04	0.8123E04
1	0.2033E04	0.2033E04	0.5424E04	0.5431E04	0.6954E04	0.6986E04
2	0.9821E03	0.9820E03	0.3411E04	0.3409E04	0.5754E04	0.5783E04
3	0.5644E03	0.5649E03	0.2243E04	0.2243E04	0.4355E04	0.4378E04
4	0.4869E03	0.4869E03	0.1602E04	0.1598E04	0.3327E04	0.3318E04
5	0.6210E03	0.6213E03	0.1301E04	0.1295E04	0.2654E04	0.2632E04
6	0.8626E03	0.8631E03	0.1263E04	0.1258E04	0.2275E04	0.2250E04
7	0.1169E04	0.1170E04	0.1422E04	0.1419E04	0.2149E04	0.2126E04
8	0.1529E04	0.1531E04	0.1710E04	0.1710E04	0.2234E04	0.2217E04

해석 결과를 표시한 것이며, Fig. 9는 Table 2를 그림으로 표시한 것이다. Fig. 10은 고유 진동수 측정 실험을 통하여 얻어진 전달 함수(transfer function)를 표시한 것이다. Table 2, Fig. 9와 같이 실험 결과와 해석 결과가 잘 일치함을 알 수 있었다. 따라서, 요소수를 충분히 증가시켜 주면 본 연구의 해석 결과는 정해에 매우 접근하리라 믿어진다.

Table 2 Comparison of experimental and computational results Unit(Hz)

Mode	Experimental	Present
1	285	278
2	375	390
3	570	635
4	625	696
5	760	934
6	1055	1098
7	1155	1265
8	1255	1348
9	1430	1414
10	1535	1884

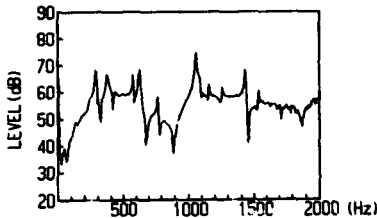


Fig. 10 Measured transfer function

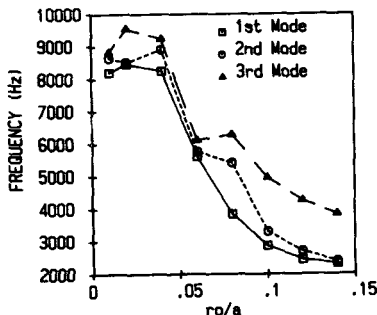


Fig. 11 Variation of natural frequency according to r_o/a . ($a=50\text{mm}$, $h=1\text{mm}$, $pl=2\text{mm}$, $E=19000\text{kg/mm}^2$, $\nu=0.3$, $lx=20\text{mm}$, $Nc=2$)

4.2 고찰

벨로우즈는 기하학적 특성으로 인하여 원통부분의 반지름(a), 파형(corrugation)의 반지름(r_o), 원형 평판의 길이(pl), 파형의 수(Nc), 원통부분의 길이(lx)가 중요한 인자로 나타나게 된다^(12~14). 본 연구에서는 이러한 인자를 중심으로 하여 벨로우즈의 동특성을 정리하였다.

Fig. 11은 벨로우즈의 원통부분의 반지름 (a)과 파형의 반지름(r_o)의 비(r_o/a)에 따른 진동수의 변화를 표시하고 있다. Fig. 11에 표시된 것과 같이 r_o/a 가 증가할수록 진동수가 감소함을 알 수 있다. 이것을 파형의 피치(P)와 높이(H)의 비(P/H)로 대체하면 Fig. 12와 같이 표시된다. 파형의 반지름이 커지면 벨로우즈의 강성(stiffness)이 감소하고, 질량이 증가하게 되어 고유 진동수는 감소한다.

원형 평판의 길이 변화가 진동수 변화에 미치는

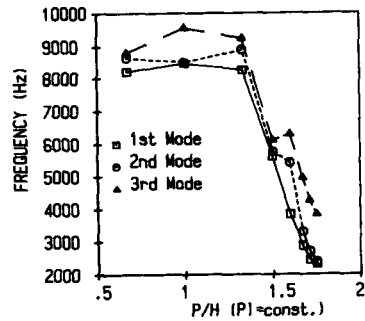


Fig. 12 Variation of natural frequency according to P/H . ($a=50\text{mm}$, $h=1\text{mm}$, $pl=2\text{mm}$, $lx=20\text{mm}$, $Nc=2$)

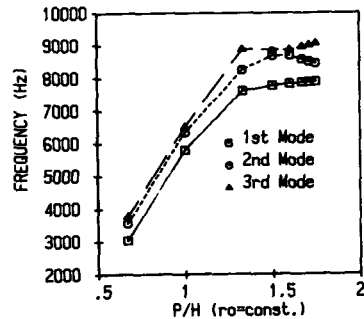


Fig. 13 Variation of natural frequency according to P/H . ($a=50\text{mm}$, $h=1\text{mm}$, $r_o=2\text{mm}$, $lx=20\text{mm}$, $Nc=2$)

영향을 검토하기 위하여, 파형의 반지름을 일정하게 하고 원형 평판의 길이를 변화시켜 Fig. 13에 표시하였다. Fig. 13에 표시한 것과 같이 P/H 비

가 감소하면 고유 진동수가 감소함을 알 수 있다. 그러므로 원형 평판의 길이가 증가하면 고유 진동수는 감소한다. 이러한 현상은 Fig. 11, 12에 표시

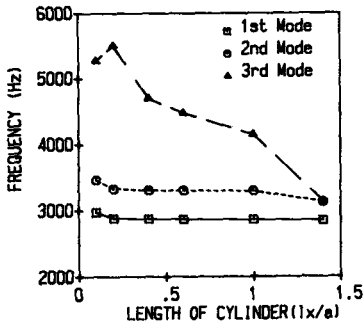


Fig. 14 Variation of natural frequency according to lx/a . ($a=50\text{mm}$, $h=1\text{mm}$, $r_o=5\text{mm}$, $pl=2\text{mm}$, $Nc=2$)

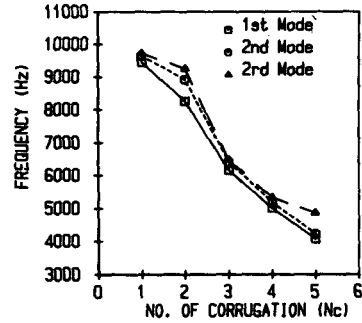


Fig. 15 Variation of natural frequency according to Nc . ($a=50\text{mm}$, $h=1\text{mm}$, $r_o=2\text{mm}$, $pl=2\text{mm}$, $lx=20\text{mm}$)

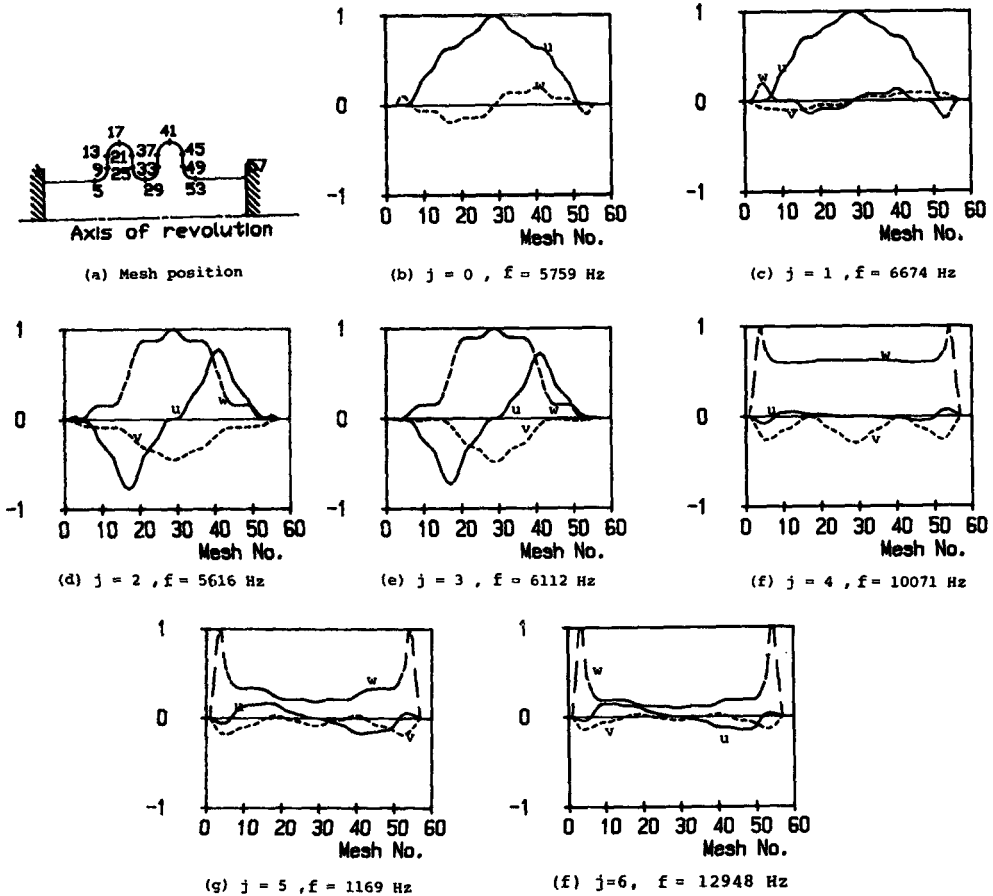


Fig. 16 A typical mode vectors of bellows ($a=50\text{mm}$, $r_o=3\text{mm}$, $pl=2\text{mm}$, $lx=20\text{mm}$, $Nc=2$, $h=1\text{mm}$, $E:19000\text{kg/mm}^2$ $\nu=0.3$)

한 것과 같은 현상으로 이해된다. 그러나, 원형 평판의 길이에 따른 고유 진동수의 변화는 파형의 반지름에 의한 변화보다 규칙적으로 나타나며, 천이 영역도 뚜렷함을 알 수 있다.

Fig. 14는 원통부분의 길이를 증가시켰을 때 나타나는 진동수 변화를 표시한 것이다. Fig. 14와 같이 원통 부분의 길이가 증가하여도 진동수는 크게 변화하지 않았다. 따라서, 벨로우즈의 동특성은 파형의 기하학적 형상에 의하여 가장 큰 영향을 받음을 알 수 있다.

Fig. 15는 파형의 수를 증가시켰을 때 나타나는 진동수의 변화를 표시한 것이다. 파형의 수가 증가하면 벨로우즈의 질량이 증가하므로 진동수는 감소하였으며, Fig. 15에 표시한 것과 같이 고유진동수의 변화가 거의 선형적으로 나타난다.

Fig. 16은 벨로우즈의 진동수에 따른 진동 모드($j=0\sim6$)를 표시한 것이며, Fig. 16에 나타난 것과 같이 진동 모우드는 원주 방향의 조화 차수 j 의 값이 작을 경우에 벨로우즈의 진동 모우드는 축방향의 진동모우드가 지배적이지만, j 의 값이 증가할수록 축방향과 수직 방향의 진동 모우드가 지배적으로 나타난다.

5. 결 론

축대칭 유한 요소의 유한 요소법을 이용하여 벨로우즈의 진동 특성을 해석하고, 실험을 통하여 확인한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 진동수 측정 실험을 통한 실험 결과와 유한 요소법의 결과가 잘 일치함을 확인하였다.
- (2) 벨로우즈의 고유 진동수는 파형의 반지름이 커지고, 원형 평판의 길이가 길어질수록 감소한다.
- (3) 벨로우즈의 원통부분의 길이는 고유 진동수에 큰 영향을 미치지 않으며, 파형의 수(Nc)가 증가할수록 고유 진동수는 선형적으로 감소한다.
- (4) 원주 방향의 Fourier함수의 조화 차수가 작을 경우에 벨로우즈의 진동 모우드는 축방향의 진동 모우드가 지배적이지만, 차수가 증가할수록 축방향과 수직 방향의 진동 모우드의 영향이 크다는 것을 알았다.

참 고 문 헌

- (1) E.J.M.A, 1980, "Standard of Expansion Joint Manufacturing Association", 5th ed.
- (2) V.I. Weingarten, 1964, "Free Vibration of Thin Cylindrical Shells", AIAA, Vol. 2, No. 4, pp. 717~722.
- (3) S.K. Sen and P.L. Gould, 1974, "Free Vibration of Shells of Revolution Using FEM", J. of Eng. Mech. Division, ASCE, EM 2, pp. 283~304.
- (4) A.W. Leissa, 1973, "Vibration of Shells", NASA SP-288.
- (5) J.H. Percy, T.H. Pian, S. Klein and D.R. Navaranta, 1965, "Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolution", AIAA, Vol. 3, No. 11, pp. 2138~2145.
- (6) H.M. Adelman, S.C. Donnell and W.C. Walter, Jr., 1969, "A Method for Computation of Vibration Modes and Frequencies of Orthotropic Thin Shells of Revolution Having General Curvature", NASA TN D-4972.
- (7) T. Balderes and A.E. Armenakas, 1973, "Free Vibration of Ringed Stiffened Toroidal Shells", AIAA Journal, Vol. 11, No. 12, pp. 1637~1644.
- (8) W. Soedel, 1981, "Vibration of Shells and Plates", Marcel Dekker, Inc.
- (9) K. Bathe, 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc.
- (10) O.C. Zienkiewicz, 1977, "The Finite Element Method", McGraw-Hill Book Co.
- (11) 鷲津久一郎, 1981, "有限要素法 Handbook", 培風館.
- (12) M. Hamada and S. Takezono, 1970, "Analysis of Expansion joint of Pressure vessel", Bull. of JSME, Vol. 13, No. 55, pp. 17~25.
- (13) 이완익, 1986, "Bellows Joint의 최적 형상에 관한 연구", 한양대학교, 산업과학연구소논문집, Vol. 23, pp. 153~159.
- (14) 이완익, 1987, "유한 요소법을 이용한 Bellows Joint의 응력해석", 한국자동차공학회지, Vol. 9, No. 4, pp. 61~68.
- (15) C.H. Calladine, 1983, "Theory of Shell Structures", Cambridge Univ. Press.
- (16) J.A. Stricklin, W.S. Haisler, H.R. McDougall and F.J. Stebbins, 1968, "Nonlinear Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method", AIAA, Vol. 6, No. 12, pp. 2306~2312.

부 록

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 \\ \frac{\sin \phi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\cos \phi}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} (-\sin \phi + r \frac{\partial}{\partial s}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \\ 0 & \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{r} (\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial s}) \\ 0 & \frac{-2}{r} (\frac{\sin \phi \cos \phi}{r} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial s}) & \frac{-2}{r} (\frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}) \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu C & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(1-\nu)/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D(1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Where, $C = E h / (1 - \nu^2)$, $D = E h^3 / (12(1 - \nu^2))$

$$[N] = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\eta^2+2\eta^3 & L_i(\eta-2\eta^2+\eta^3) & 0 & 0 & 3\eta^2-2\eta^3 & L_i(-\eta^2+\eta^3) \\ 0 & 0 & -6(\eta-\eta^2)/L_i & 1-4\eta+3\eta^2 & 0 & 0 & 6(\eta-\eta^2)/L_i & -2\eta+3\eta^2 \end{bmatrix}$$

Where, $\eta = \frac{s}{L_i}$