

<論 文>

두 평판 사이의 난류 열대류의 수치해석

이 장 희* · 윤 효 철** · 정 명 균***

(1987년 9월 28일 접수)

Numerical Analysis of Turbulent Thermal Convection Between Two Flat Plates

Janghee Lee, Hyo Chul Yun and Myung Kyoon Chung

Key Words: Turbulent Thermal Convection(난류 열대류), Conduction Region(전도구역), Transition Region(천이 구역), Convection region(대류 구역), Mechanical Time Scale(속도장의 시간 척도), Thermal Time Scale(온도장의 시간 척도), Turbulent Time Scale Ratio(난류시간 척도비)

Abstract

Turbulent thermal convection between two plates, bottom plate is at higher temperature T_b and the upper plate is at lower temperature T_t , is numerically investigated. Model equations are abridged Reynolds stress equations; full Reynolds stress equations are simplified to yield algebraic relations in case of mean square velocity fluctuations in vertical and horizontal directions. Boundary conditions for turbulent kinetic energy k and mean square temperature variance $\overline{\theta^2}$ at the plate surfaces are set to be zero and those of dissipation rate of turbulent kinetic energy ϵ and dissipation rate of mean square temperature variance ϵ_θ are assumed at first grid point nearest to the boundary surfaces, whose values are approximated by inviscid estimates. Results show that temperature profiles are in good agreement with experimental data except transition region, in which temperature is over-predicted. Such discrepancy becomes larger as the Rayleigh number becomes smaller. Nusselt numbers, which are calculated from the temperature gradients at the boundary surfaces, are also in good agreement with experimental data.

기 호 설 명			
f	: 벽함수	k	: 난류 운동 에너지
g	: 중력 가속도	Nu	: Nusselt 수
H	: 두 평판 사이의 거리	P	: 평균 압력
		p	: 압력 요동
		Pr	: Prandtl 수
		Q	: 열전달양
		Ra	: Rayleigh 수

* 정회원, 대우전자(주) 냉기 개발부

** 대우조선공업(주) 연구개발부

*** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

- T_i, T_h : 윗판, 아래판의 온도
- ΔT : $T_h - T_i$
- T : 평균 온도
- U_i : i 방향의 평균 속도
- u, v : 수평, 수직 방향의 속도 요동
- $\overline{u\theta}$: 난류 열유속
- w, z, θ : 속도, 길이, 온도 척도
- α : 열확산 계수
- β : 체적 팽창 계수
- ε : 난류 운동 에너지의 소멸율
- ε_θ : 자승평균 온도요동의 소멸율
- $\overline{\theta^2}$: 자승평균 온도요동
- $\mathcal{T}, \mathcal{T}_\theta, \mathcal{T}_c$: 속도장, 온도장, 혼합시간 척도
- ν : 동점성 계수

1. 서 론

본 논문에서는 아래 평판은 높은 온도 T_h 로 유지되고, 위의 평판은 낮은 온도 T_i 로 유지되어 있을 때, 온도차에 의하여 발생하는 난류 열대류 문제를 난류 모델 방정식을 사용하여 수치적으로 해석하고자 한다.

이러한 유형의 문제는 일반적으로 난류 에너지 생성에 기여하는 평균 속도구배가 없이, 순수하게 온도차 즉, 밀도의 차이에 의하여 난류장이 발생하고 이에 따라 열전달이 일어나는 자연 대류 열전달로, 복잡한 난류 유동에서의 부력의 영향을 알아보기에 적합한 문제라 하겠다.

자연 대류 열전달은 다음과 같이 정의되는 무차원 변수 Rayleigh 수에 따라 그 상태를 구분하게 되는데,

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu \alpha} \tag{1}$$

Rayleigh 수가 어떤 기준치인 극한 Rayleigh 수 (Ra_c)를 넘으면 열전달은 점차 대류의 특성을 띄게 되며, Rayleigh 수가 이보다 작은 경우에는 순수 전도의 특성을 가진다.

본 논문에서는 Rayleigh 수가 충분히 커서 ($Ra > 10^5$)

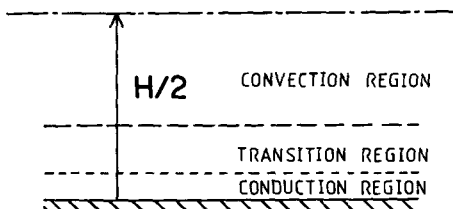


Fig. 1 Classification of turbulent thermal convection into three regions.

유동이 난류 열대류가 되는 구간에서 이 문제를 해석하고자 한다.

1.1 난류 열대류의 발생 구조

대류 열전달에서 Rayleigh 수가 작은 경우에는 버나드 셀(Bernard cell)이라고 불리는 주기를 가지고 규칙적으로 유동하는 현상이 발생한다. 이때의 유동 주기는 작은 편으로 Köster 와 Müller⁽¹⁾의 작은 Rayleigh 수에 대한 연구에 의하면 대략 Ra^{-2} 에 비례한다.

Rayleigh 수가 점차 커짐에 따라 유동은 불안정하게 되어 극한 Rayleigh 수를 넘어서면서부터 열대류 현상은 여러번의 천이를 거치면서 점차로 난류의 특성을 나타낸다. 그 중 Threlfall⁽²⁾은 가스 상태의 헬륨을 매체로한 실험에서 극한 Rayleigh 수는 약 1630 정도이고 이외에도 여러번의 불연속적인 천이가 나타남을 밝혔다. 또 Willis 와 Deardorff⁽³⁾은 Rayleigh 수가 8200, 24000의 경우에 천이를 관측하였으며, Chu 와 Goldstein⁽⁴⁾의 경우에는 Rayleigh 수가 약 7×10^7 인 상당히 큰 경우에도 열전달양의 천이가 발생한다고 하였다. Fig. 2은 Denton⁽⁵⁾의 논문에서 인용한 것으로, 열전달양의 천이가 발생하는 Rayleigh 수에 대한 여러가지 시험 결과를 보여주고 있다.

본 논문에서 다루고자 하는 난류구간은 Rayleigh 수가 대략 10^5 보다 큰 경우를 말한다. 난류 열대류의 경우는 종류의 경우와는 그 구조가 판이하게 나타나는데 난류 열대류의 경우 온도의 분포는 상하 경계면 근처의 온도 구배가 큰 구역과 그 중간 구역의 등은 구간으로 크게 구별되어 진다.

벽 근방에서의 열대류의 주된 구조는 경계층 근처에서 간헐적으로 방출되는 열덩어리(thermal plume)에

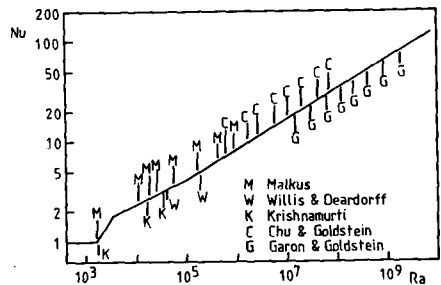


Fig. 2 Heat flux transition Rayleigh numbers for water plotted on the empirical curves of O'Toole and Silveston. Figure sited from Denton and Wood⁽⁷⁾

의하여 특성 지워진다. 유동장내에는 아랫층의 더운 경계층에서 발생한 더운 열 덩어리와 윗층의 차가운 경계층에서 발생하는 차가운 열덩어리가 공존하며 서로 반응하여 이의 결과로 온도 요동(temperature fluctuation)이 발생한다.

한쪽 경계층에서 발생한 열 덩어리는 수직한 방향으로 이동하며, 이동과정에서 주위의 유체에 의하여 가지고 있는 열을 빼앗기게 된다. 그러나 대체로 반대편 경계층 부근에 도달할 때까지 오랜 기간동안 그 특성을 유지하게 되고 여기서 다른 온도를 가지는 유체와 반응하여 열을 교환하는데, 그 과정에서 난류 대류 열 전달이 생기게 된다. 열 덩어리는 짧은 시간을 통하여 보면 대체로 일정한 지점에서 방출된다. 그러나 오랜 시간 관측하면, 그것의 발생위치는 고정되어 있지 않고 서서히 이동하는 것을 알 수 있다.

1.2 난류 열대류에 대한 연구 경향과 이의 검토

앞에서 언급한 바와같이 난류 열대류의 온도 분포는 층류의 경우와는 다른 양상을 나타낸다. 난류 열대류의 경우 온도의 변화는 대부분 벽면 근처의 한정된 구역(경계층)에서 일어나고, 그 이외의 중간 부분에서는 거의 등은 상태이다. 따라서 경계층 내에서의 온도분포가 어떻게 되는가 하는 문제가 주요 관심사가 되어지고 있다.

Malkus⁽⁶⁾는 변분법을 이용하여 온도구배가 벽면으로부터의 거리 y 의 -2 승에 비례하는 구간이 있다고 하였다. 그의 이론은 충분히 발달된 평균 온도 분포에서의 미소한 교란의 안정성에 근거하여 전개한 것으로 Nusselt 수 Nu 는 Rayleigh 수의 $1/3$ 승에 비례한다고 하였다.

Priestly⁽⁷⁾는 혼합거리의 개념을 사용하여 온도구배

가 $y^{-4/3}$ 에 비례한다는 상사법칙을 얻었으며, Kraichnan⁽⁸⁾은 Fig. 1과 같이 3개의 서로 성질이 다른 구간을 설정하여 각각 전도구역(conduction region), 천이구역(transition region), 대류구역(convection region)으로 분류하였고, 혼합거리의 개념을 확장하여 천이구역에서의 온도구배는 y^{-2} 에 비례하고, 대류구역에서는 $y^{-4/3}$ 에 비례한다고 이론적으로 예측하였다. 또, 그는 Nu 수와 Ra 수의 상관관계를 중간 정도의 Ra 수 범위에서는 $Nu \propto Ra^{1/3}$ 이고, Ra 수가 극히 큰 경우는 $Nu \propto [Ra/(\ln Ra)]^{1/2}$ 이라고 예측하였다. Carroll⁽⁹⁾의 실험에서는 전도구역이 대략 $0 \leq y \leq 0.5 \frac{H}{Nu}$ 이고, 천이구역은 $0.5 \frac{H}{Nu} \leq x \leq 1.35 \frac{H}{Nu}$ 된다고 하였다. 또, 천이구역에서의 온도 요동은 넓은 분포를 가지며 최대값에 이른다고 하였다.

Chu와 Goldstein⁽⁴⁾이 물을 대체로 하여 행한 실험에서는 재미있는 현상이 나타나고 있다. Ra 수가 비교적 작은 경우($Ra < 3.11 \times 10^5$) 음의 온도구배를 나타내고 있다. 이들의 결과는 Malkus⁽⁶⁾나 Priestly⁽⁷⁾의 이론적 예측과는 다르게 넓은 구간에서 y^{-3} 에 비례하는 경향을 보이고 있다.

난류 열전달에서 열전달량은 Ra 수에 밀접하게 관계되는데 일반적으로 Nu 수와 Ra 수의 상관관계를 다음과 같이 표시한다.

$$Nu = C \cdot Ra^a \cdot Pr^b \tag{2}$$

식(2)와 같은 상관관계에서 계수 a, b, c 에 대하여는 많은 실험결과가 발표되었다. Table 1에서는 그중 대표적인 실험 결과를 종합하여 보았다.

Prandtl 수의 Nu 수에 대한 영향은 비교적 작은 것으로 알려져 있다. Clever⁽¹²⁾의 수치적 연구에 의하면 Ra 수가 약 5×10^3 이상인 경우 Nu 수는 Pr 수의 영향을 비교적 적게 받는다. Ra 수가 커짐에 따라 Nu 수는 $Ra^{1/3}$ 에 비례하게 된다. 이에 대하여는 Long⁽¹³⁾의

Table 1 Relation between Ra and Nu

Investigator	Heat flux	Ra No. range	Fluid
Carroll ⁽⁹⁾	$Nu = 0.21 Ra^{0.26}$	$1.0 \times 10^5 \sim 1.0 \times 10^7$	Air
Threlfall ⁽²⁾	$Nu = 0.173 Ra^{0.28}$	$60 \sim 2.0 \times 10^9$	Gaseous helium
Katsarous et al. ⁽¹⁰⁾	$Nu = 0.062 Ra^{0.33}$	$3.8 \times 10^8 \sim 4.0 \times 10^9$	Water
Fitzjarrald ⁽³⁶⁾	$Nu = 0.13 Ra^{0.3}$	$4 \times 10^4 \sim 7 \times 10^9$	Air
Globe, Dropkin ⁽¹¹⁾	$Nu = 0.069 Ra^{0.33} Pr^{0.074}$	$7 \times 10^6 \sim 3 \times 10^8$	—
Chu, Goldstein ⁽⁴⁾	$Nu = 0.183 Ra^{0.278}$	$2.8 \times 10^5 \sim 1.0 \times 10^8$	Water

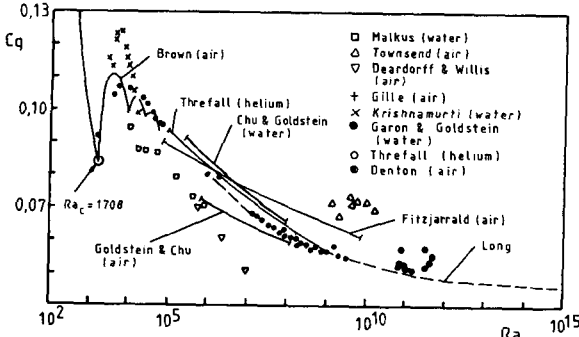


Fig. 3 Heat transfer coefficient Cq from parallel and single plated experiments
Figure sited from Denton and Wood⁽⁷⁷⁾

차원해석을 이용한 수학적 해석이 있다.

Denton⁽⁵⁾은 Nu 수와 Ra 수의 상관관계에 대하여 여러 자료를 종합하여 연구하였는데 Fig. 3를 보면 계수 $Cq (= \frac{Nu}{Ra^{1/3}})$ 는 Ra 수가 증가함에 따라 감소하고, 또 Ra 수가 큰 경우일수록 Cq 는 일정하게 되어가는 경향을 나타내어 Long⁽¹³⁾의 결과와 일치하고 있음을 알 수 있다.

두 평판 사이의 난류 일대류에 대한 연구는 주로 실험에 의하여 수행되어 왔으며 난류 모델에 의한 수치 해석은 거의 진행되지 않고 있는 상태이다. 따라서 본 논문에서는 이에 대한 난류 모델식에 의한 수치 해석을 시도하였다.

2. 난류 방정식 및 모델

2.1 평균 유동 방정식

유동의 평균 상태를 지배하는 운동량 방정식과, 에너지 방정식 그리고 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k} \right) + \beta (T - T_a) \delta_{ik} g_k \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{u_k \theta} \right) + \frac{\epsilon}{\rho C_p} \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0 \quad (5)$$

위의 식 (3), (4), (5)에서, 본 논문에서 다루는 경우의 문제는 평균 유동이 없고, 수직 방향축에 대하여 대칭이 되므로 (3), (4)식은 고려할 필요가 없게 되며, 평균 유동식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} - \overline{v\theta} \right) + \frac{\epsilon}{\rho C_p} \quad (6)$$

2.2 난류 방정식의 모델

운동량 방정식과 에너지 방정식으로 부터 유도되는 난류 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - \overline{u_i u_j u_k} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i P}}{\partial x_j} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \overline{u_j P}}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\ &- \beta (g_i \overline{u_j \theta} + g_j \overline{u_i \theta}) + \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \\ &- 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i \theta}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k \theta} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p \theta}}{\partial x_i} \\ &- \overline{u_i u_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta^2} \\ &+ \frac{1}{\rho} p \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + (\nu + \alpha) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{\theta^2}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} - \overline{u_k \theta^2} \right) - 2\overline{u_k \theta} \frac{\partial T}{\partial x_k} \\ &- 2\alpha \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (9)$$

또, 식 (7)에서 난류 운동에너지에 대한 식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial k}{\partial x_k} - k u_k \right) - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\ &- \beta g_k \overline{u_k \theta} - \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (10)$$

위의 식 (6)~(10)에는 압력-변형항이나 소멸항과 같이 그 차수가 높은 항이 있으므로, 이 식들을 풀기 위하여는 이런 항들을 저차의 다른 항으로 모델을 할 필요가 생긴다. 혹은 다른 고차의 방정식을 세워야 하게 되는데 이 경우 또 다른 고차항이 생기게 되어 결국 어느 수준의 차원에서 모델을 하여야 한다.

난류 모델에는 여러가지 방법이 있는데 다음 절에서 부터는 본 논문에서 사용한 모델에 대하여 주로 설명을 하도록 하고 그외의 경우는 간략하게 언급하도록 한다.

(1) 압력-변형항 (pressure-strain term)

식 (7)와 (8)에서 나타나는 압력-변형항은 난류 구조의 이방성을 등방성인 상태로 유도하는 작용을 하는데 여기에는 난류장의 자체작용에 의한 항과 평균변형과 난류장과의 상호작용에 의한 항이 있다.

압력-변형항에 대한 기호로 ϕ_{ij} 와 $\phi_{i\theta}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\phi_{ij} = \frac{\bar{p}}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

$$\phi_{i0} = \frac{\bar{p}}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (12)$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,3} + \phi_{ij,w} \quad (13)$$

$$\phi_{i0} = \phi_{i0,1} + \phi_{i0,2} + \phi_{i0,3} + \phi_{i0,w} \quad (14)$$

여기서 하첨자 1, 2, 3, w는 각각 난류장간의 상호작용(turbulent interaction)에 의한 항, 평균속도 변형(mean flow strain)과 난류장과의 작용에 의한 항, 중력의 작용하에서의 밀도변동에 의한 항 그리고 벽면이 있는 경우를 고려하여 주는 항을 표시한다. $\phi_{ij,1}$, $\phi_{ij,2}$, $\phi_{ij,3}$ 에 대한 모델은 Launder⁽¹⁴⁾의 방법을 사용한다.

$$\phi_{ij,1} = -c_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (15)$$

$$\phi_{ij,2} = c_2 \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad (16)$$

$$\phi_{ij,3} = c_3 \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_k \overline{u_k \theta} \right) \quad (17)$$

벽면의 효과를 나타내는 $\phi_{ij,w}$ 는 압력에 대한 Poisson 식에서 표면 적분에 해당하는 것으로 벽면이 없을 때는 이항은 0이 된다. $\phi_{ij,w}$ 에 대한 모델은 Shir⁽¹⁵⁾와 Gibson과 Launder⁽¹⁶⁾의 식을 사용하여 양 평판에 의한 벽면 효과를 고려하였다.

$$\phi_{ij,w} = \phi_{ij,w_1} + \phi_{ij,w_2} + \phi_{ij,w_3} \quad (18)$$

$$\phi_{ij,w_1} = c_{1w} \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} \overline{u_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_k} \overline{u_k n_i} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_k} \overline{u_k n_j} \right) \cdot f \quad (19)$$

$$\phi_{ij,w_2} = c_{2w} \left(\phi_{km,2} \overline{u_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} \overline{u_k n_j} - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} \overline{u_k n_i} \right) \cdot f \quad (20)$$

$$\phi_{ij,w_3} = c_{3w} \left(\phi_{km,3} \overline{u_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,3} \overline{u_k n_j} - \frac{3}{2} \phi_{jk,3} \overline{u_k n_i} \right) \cdot f \quad (21)$$

ϕ_{i0} 에 대한 모델도 ϕ_{ij} 의 경우와 유사하게 Gibson과 Launder⁽¹⁶⁾가 제안한 식을 사용하면,

$$\phi_{i0,1} = -c_{01} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i \theta} \quad (22)$$

$$\phi_{i0,2} = c_{02} \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (23)$$

$$\phi_{i0,3} = c_{03} \beta g_i \overline{\theta^2} \quad (24)$$

$$\phi_{i0,w} = \phi_{i0,w_1} + \phi_{i0,w_2} + \phi_{i0,w_3} \quad (25)$$

$$\phi_{i0,w_1} = -c_{01w} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i \theta} \overline{u_k n_k} \cdot f \quad (26)$$

$$\phi_{i0,w_2} = -c_{02w} \overline{u_i \theta} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \overline{u_k n_k} \cdot f \quad (27)$$

$$\phi_{i0,w_3} = -c_{03} \beta g_k \overline{\theta^2} \overline{u_k n_k} \cdot f \quad (28)$$

위의 식들에서 사용된 벽함수(wall function) f 는 벽 근방에서 1이 되고, 자유유동(free stream)에서 0이 되는 함수다. 또 이 벽함수는 강하게 안정된(strongly stable) 유동에서는 거의 0이 되고, 유동이 불안정(unstable)하게 될수록 f 의 값은 커져 1에 가까운 값을 가지게 된다.

본 논문에서는 Ljuboja와 Rodi⁽¹⁷⁾에 의해 제시되어진 함수의 형태를 사용하였다.

$$f = c_w \frac{k^{\frac{3}{2}}}{y \cdot \epsilon} \quad (29)$$

여기서, 계수 c_w 의 결정은 뒤에서 언급될 소멸항에 대한 경계조건과 관련하여 0.39로 하였다.

(2) 난류 확산항(turbulent diffusion term)

확산에는 난류 확산과 층류 확산이 있는데, 대부분의 난류 유동에서 층류 확산은 난류 확산에 비하여 작으므로 흔히 무시되어진다. 그러나 식(30)과 같이 정의되는 난류 Reynolds 수가 작은 경우(흔히, 벽에 인접한 지역에서의 경우)에는 층류 확산항을 무시하기가 곤란하다.

$$Re_\epsilon = \frac{4k^2}{9\nu\epsilon} \quad (30)$$

따라서 본 논문에서는 층류 확산항을 무시하지 않고 사용하였다. 본 논문에서는 지배 방정식의 수를 가능한 한 줄이기 위하여 난류 전단응력 $\overline{u_i u_j}$ 확산항에 대하여는, 비평형 상태의 난류 전단응력의 순수 전달량은 난류 운동에너지의 순수 전달량에 비례한다는(31)식과 같은 Rodi⁽¹⁹⁾의 가정을 이용하여, 이에 대한 미분 방정식을 대수 방정식으로 바꾸어 사용한다.

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - D(\overline{u_i u_j}) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left(\frac{Dk}{Dt} - D(k) \right) \quad (31)$$

여기서 $D(k)$ 는 k 의 난류 확산항을 표시한다.

Rodi⁽¹⁹⁾의 모델과 유사한 방법으로, Gibson과 Launder⁽²⁰⁾는 열유속 $\overline{u_i \theta}$ 에 대하여 (32)과 같은 모델을 설정하여 부력이 존재하는 제트 유동을 계산하였다.

$$\frac{D\overline{u_i \theta}}{Dt} - D(\overline{u_i \theta}) = \frac{\overline{u_i \theta}}{\sqrt{k \cdot \overline{\theta^2}}} \left\{ \frac{D(\sqrt{k \cdot \overline{\theta^2}})}{Dt} - D(\sqrt{k \cdot \overline{\theta^2}}) \right\} \quad (32)$$

그러나 본 논문에서는 부력의 영향이 주된 역할을 하는 경우이므로 $\overline{u_i \theta}$ 를 (32)과 같이 단순하게 대수 방정식으로 모델링하는 것은 적당치 않다. 난류 확산항의 모델에는 많은 경우 단순 구배형(simple gradient form)을 사용하게 되는데, Lumley, Zeman와 Siess⁽¹⁸⁾에 의하면 단순 구배형의 모델은 안정된 유동에서는

잘 적용되지만 난류 열대류 현상과 같이 부력의 영향이 주된 작용을 하는 불안정한 경우의 확산 현상을 기술하기에는 부적합하다고 하겠다. 따라서 $k, \overline{\theta^2}, \overline{v\theta}, \varepsilon, \varepsilon_0$ 의 확산항에 대한 모델은 Zeman 과 Lumley^(21, 22)에 의하여 개발된 다음의 식을 사용하기로 한다. 이 식은 평균 속도성분이 없이 순수하게 부력의 작용에 의하여 난류 유동이 발생하는 현상에 대하여 부력의 효과를 충분히 고려한 것으로 본 논문의 경우에 적합한 모델이라고 하겠다.

$$-\overline{k v} = \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\overline{u^2}}{k}\right) K_m \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{1}{2} \beta g \mathcal{F} K_m \frac{\partial \overline{v\theta}}{\partial y} + \frac{3}{8} \beta^2 g^2 K_t \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial y} \quad (33)$$

$$-\overline{\theta^2 v} = K_t \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial y} \quad (34)$$

$$-\overline{v^2 \theta} = \frac{\mathcal{F}}{2.2} \overline{v\theta} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} + \frac{K_m}{1.1} \frac{\partial \overline{v\theta}}{\partial y} + \frac{3}{4} \beta g \mathcal{F} K_t \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial y} \quad (35)$$

$$-\overline{\varepsilon v} = K_\varepsilon \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - 0.28 \frac{\partial \overline{v\theta}}{\partial y} \right) \quad (36)$$

$$-\overline{\varepsilon_0 v} = K_{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} - \frac{1}{2} \beta \mathcal{F} \left(K_t \frac{\partial T}{\partial y} - \overline{v\theta} \right) \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial y} \quad (37)$$

여기서,

$$\mathcal{F} = 0.31 \frac{2k}{\varepsilon}; \text{ mechanical time scale} \quad (38)$$

$$\mathcal{F}_\theta = 0.31 \frac{\overline{\theta^2}}{\varepsilon_0}; \text{ thermal time scale} \quad (39)$$

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{\frac{2.2}{\mathcal{F}} + \frac{0.62}{\mathcal{F}_\theta}}; \text{ compound time scale} \quad (40)$$

$$K_m = \mathcal{F} (\overline{v^2} + \beta g \overline{v\theta} \mathcal{F}_\theta) \quad (41)$$

$$K_t = \mathcal{F}_c \frac{(\overline{v^2} + 2\beta g \overline{v\theta} \mathcal{F}_\theta)}{1 + \frac{1}{3} \mathcal{F}_c \mathcal{F}_\theta \beta g \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|} \quad (42)$$

$$K_\varepsilon \approx 0.46 K_m \quad (43)$$

$$K_{\varepsilon_0} \approx 0.5 K_t \quad (44)$$

(3) 소멸항

식 (7)에서 나타나는 난류 전단 응력 $\overline{u_i u_j}$ 의 소멸항 ε_{ij} 는, 일반적으로 작은 크기의 eddy (small scale eddy)는 방향성이 없으므로,

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (45)$$

과 같이 한다.

또 식 (8)의 ε_{i0} 는 ε_{ij} 와 같이 등방성 (isotropy)이라는 가정을 하여 무시한다. 즉,

$$\varepsilon_{i0} = (\alpha + \nu) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \approx 0 \quad (46)$$

난류 운동에너지 k 의 소멸항인 ε 과 $\overline{\theta^2}$ 의 소멸항인 ε_0 는 간단한 방법으로 단순 구배형 모델을 쓰는 경우도 많으나 보다 정확한 계산을 위하여는 모델화된 방정식을 사용한다.

ε 에 대한 모델식으로는 Hanjalic 과 Launder^(23, 24)등이 제시한 다음과 같은 식이 많이 사용되고 있다.

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\varepsilon u_k) + c_{\varepsilon 1} P \frac{\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (47)$$

윗식에서 P 는 난류 에너지의 생성항으로 본 논문의 경우에는 부력 생성항만 존재하므로 $P = \beta g \overline{v\theta}$ 가 된다. 또 마지막 항 $c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$ 는 ε 의 감쇄항으로 ε 에 대한 중요한 요소가 된다. 따라서 계수 $c_{\varepsilon 2}$ 에 대하여는 상수로 정하지 않고 난류 Reynolds 수 Re_t 에 대한 함수로 다음과 같은 Chung⁽²⁵⁾의 식을 사용한다.

$$c_{\varepsilon 2} = 1.775 \left[1 - 0.211 \exp\left(-\frac{Re_t^2}{2.5}\right) \right] + 0.225 \exp\left(-\frac{36.7}{Re_t^{1/2}}\right) \quad (48)$$

$\overline{\theta^2}$ 의 소멸을 ε_0 에 대한 모델은 Newman 등⁽²⁶⁾이 균일한 (homogeneous) 유동에서의 $\overline{\theta^2}$ 의 변화과정에 대한 실험 자료를 근거로 하여 속도장의 시간척도 (mechanical time scale)에 관계되는 항과 온도장의 시간척도 (thermal time scale)에 관계되는 항을 ε 의 감쇄항과 유사한 방법으로 모델하였고 온도 구배와 열유속에 의한 생성항을 고려하여 식 (49)을 제시하였다.

$$\frac{D\varepsilon_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\varepsilon_0 u_k) - c_{\varepsilon_0 1} \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{k} - c_{\varepsilon_0 2} \frac{\varepsilon_0^2}{\overline{\theta^2}} + c_{\varepsilon_0 3} \frac{\varepsilon_0}{\overline{\theta^2}} u_k \theta \frac{\partial T}{\partial x_k} + c_b P \frac{\varepsilon_0}{k} \quad (49)$$

윗식에서 우변 마지막항은 평형 상태를 고려하여 난류 에너지 생성항에 의한 ε_0 의 생성을 추가시켜 Sung 등⁽²⁷⁾이 사용하였다.

3. 수치적 해석 및 척도

3.1 난류 열대류의 척도 (Scale)

난류 열대류에서의 척도는 평균 속도가 주된 작용을 하는 경우와는 달리 온도구배에 의한 부력의 영향에 의하여 유동현상이 발생하게 되므로 난류 열대류의 경우에는 그 현상에 적합한 척도를 설정할 필요가 생기게 된다.

Tanaka 등⁽²⁸⁾의 실험에 의하면 열경계층은 그 두께가 양 평판 사이의 거리에 비하여 약 백분의 일 정도의 두께를 가지고 있다. 또, 그 구조는 양 평판의 중심부근의 대류 구역과는 무관하며, 간헐적으로 열 덩

어리(buoyant plume, thermal plume)를 방출하는데, 이 열 경계층에서의 eddy는 Taylor의 미세척도(Taylor's micro scale)의 크기를 가지고, 중심 구역의 유동은 평판 사이의 거리에 상당하는 길이 척도를 가진 에너지를 함유한 eddy(energy containing eddy)에 의하여 특성지어진다.

이와같이 각 구역에 따라 그 유동의 구조가 다르므로, 척도는 자기 그 현상에 적합하게 설정할 필요가 있다.

Chung⁽²⁵⁾은 이러한 근거에서 자기 성질이 다른 유동층에 따라 그 특성에 따른 척도를 다음과 같이 제시하였다.

(i) 전도 구역 (conduction region)

$$w_d = \left(\frac{\alpha^2 \beta g Q}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\theta_d = Q/w_d$$

$$z_d = \alpha/w_d$$

(ii) 천이 구역 (transition region)

$Pr > Pr_0$ 때

$$w_v = (\beta g \nu Q)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_v = Q/w_v$$

$$z_v = \nu/w_v$$

$Pr < Pr_0$ 때

$$w_a = (\beta g \alpha Q)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_a = Q/w_a$$

$$z_a = \alpha/w_a$$

여기서 Pr_0 는 critical Prandtl 수

(iii) 대류 구역 (convection region)

$$w_* = (\beta g Q z_*)^{\frac{1}{3}}$$

$$\theta_* = H$$

$$z_* = Q/w_*$$

이외에도 Townsend⁽²⁹⁾, Deardorff와 Willis⁽³⁰⁾, Carroll⁽⁹⁾등 많은 사람들이 그들의 연구에서 자자 다른

척도를 사용하였다. Table 2는 그들이 사용한 척도를 나타낸다.

Chung⁽²⁵⁾의 전도 척도나 Carroll⁽⁹⁾의 척도는 벽근방에서의 온도를 나타내는데 적합하며, 이 경우 벽면에서의 온도구배는 -1이 된다. 반면 에너지를 함유한 eddy가 지배하는 대류 구간에서는 대류 척도를 사용하는 것이 유리하다.

3.2 지배 방정식 및 무차원화

앞의 2장에서 설명한 난류 방정식과 난류 모델을 이용하여 본 논문에서 고려하는 난류 열전달 문제의 지배 방정식을 세운다. 식을 무차원화 하기 위하여 길이 척도로 z , 속도 척도로 u , 온도 척도로 θ s를 표시한다.

에너지 방정식 (4)는 무차원 식으로 쓰면,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(DLB \frac{\partial T}{\partial y} - v\theta \right) \quad (50)$$

또 k 와 $\bar{\theta}^2$ 에 대한 식 (8), (9)은 (33), (34)을 이용하여

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial y} \left[\left\{ DLA + \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\bar{u}^2}{k} \right) K_m \right\} \frac{\partial k}{\partial y} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} DLD \mathcal{J} K_m \frac{\partial v\bar{\theta}}{\partial y} + \frac{3}{8} DLD^2 \mathcal{J}^2 K_m \right. \\ & \left. \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial y} \right] + DLEv\bar{\theta} - DLA\varepsilon \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (DLB + K_t) \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial y} \right\} - 2v\bar{\theta} \frac{\partial T}{\partial y} \\ & - 2DLA\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (52)$$

으로 된다.

$\bar{v}\bar{\theta}$ 에 대한 식 (8)은 확산항에 대한 모델식 (35)과 압력-변형항에 대한식 (22)~(28)을, 그리고 벽함수 (29)식을 사용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v\bar{\theta}}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K_m}{1.1} \frac{\partial v\bar{\theta}}{\partial y} \right) + \frac{1}{DLA} \frac{\partial}{\partial y} \\ & \left(\frac{\mathcal{J}}{2.2} v\bar{\theta} \frac{\partial v^2}{\partial y} \right) + DLD \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3}{4} \mathcal{J} K_t \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial y} \right) \\ & - v^2 \frac{\partial T}{\partial y} + (1 - c_{03} + c_{03} c_{03w} \cdot f) DLE\bar{\theta}^2 \\ & - (c_{01} + c_{01w} \cdot f) DLA \frac{\varepsilon}{k} v\bar{\theta} \end{aligned} \quad (53)$$

ε 과 ε_0 에 대한 식 (47), (49)은 (36), (37)식을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial y} \left(0.46 K_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - 0.28 DLD \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial v\bar{\theta}}{\partial y} \right) \\ & - c_{\varepsilon 1} DLEv\bar{\theta} \frac{\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} K_t \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ DLC \left(K_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\}$$

Table 2 Turbulent scales

Investigator	Length scale	Temperature scale	Velocity scale
Townsend ⁽²⁹⁾	$\frac{\alpha}{(\alpha\beta g Q)^{1/4}}$	$\frac{Q}{(\alpha\beta g Q)^{1/4}}$	—
Deardorff, Willis ⁽³⁰⁾	H	ΔT	α/H
Carroll ⁽⁹⁾	$\frac{H}{2Nu}$	ΔT	—

$$\begin{aligned}
 & -\overline{v\theta}\left\{ \mathcal{F}_c \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial y} \right\} - c_{\epsilon 0_1} DLA \frac{\epsilon \epsilon_0}{k} \\
 & - c_{\epsilon 0_2} DLB \frac{\epsilon_0^2}{\overline{\theta^2}} - c_{\epsilon 0_3} \frac{\epsilon_0}{\overline{\theta^2}} \overline{v\theta} \frac{\partial T}{\partial y} \\
 & + c_b DLE \overline{v\theta} \frac{\epsilon_0}{k} \tag{55}
 \end{aligned}$$

마지막으로 $\overline{v^2}$, $\overline{u^2}$ 에 대한 식은 앞에서 언급한 바와 같이 Rodi⁽¹⁹⁾의 가정인 식(31)와 압력 변형항에 대한 식(15)~(21)와 벽함수 f 를 사용하면, 다음과 같이 대수 방정식이 된다.

$$\frac{\overline{u^2}}{k} = \frac{\left(\frac{2}{3} c_3 - \frac{4}{3} c_3 c_{3w} f \right) DLD \frac{\overline{v\theta}}{\epsilon} + \frac{2}{3} (c_1 - 1) + c_{1w} f \frac{\overline{v^2}}{k}}{c_1 - 1 + DLD \frac{\overline{v\theta}}{\epsilon}} \tag{56}$$

$$\frac{\overline{v^2}}{k} = \frac{\left\{ 2 \left(1 - \frac{2}{3} c_3 \right) + \frac{8}{3} c_3 c_{3w} f \right\} DLD \frac{\overline{v\theta}}{\epsilon} + \frac{2}{3} (c_1 - 1)}{c_1 - 1 + 2c_{1w} f + DLD \frac{\overline{v\theta}}{\epsilon}} \tag{57}$$

그런데 식(56)과 식(57)에서 보여지듯이 $2\overline{u^2} + \overline{v^2} = 2k$ 가 되므로 식(56)을 쓰지 않고 대신,

$$\frac{\overline{u^2}}{k} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\overline{v^2}}{k} \tag{58}$$

를 사용한다.

식(52)~(57)에서 나타난 변수들은 모두 무차원 변수이며, 무차원 상수 DLA , DLB , DLC , DLD , DLE , 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 DLA &= \frac{\nu}{z, u_s} \\
 DLB &= \frac{\alpha}{z, u_s} \\
 DLC &= \frac{\beta g \theta_s z_s^3}{\nu \alpha} \\
 DLD &= \frac{\beta g \theta_s z_s^2}{\nu u_s} \\
 DLE &= \frac{\beta g \theta_s z_s}{u_s^2}
 \end{aligned}$$

3.3 수치계산 방법 및 경계조건

방정식(50)~(55)를 계산하는데 있어서 유한차분법(Finite Difference Method)을 사용하였다. 수렴성을 좋게 하기 위하여 Crank-Nicolson 방법을 사용하고(Roache⁽³¹⁾), Patankar⁽³²⁾의 방법에 따라 유한 차분식을 세웠다.

경계 조건은 평균 온도가 양 벽면에서 정하여져 있으므로 아랫 평판에서는 $T_{y=0} = T_b$, 윗 평판에서는 $T_{y=h} = T_i$ 이다.

난류방정식에서 난류 운동에너지 k 와 온도 요동의

자승평균 $\overline{\theta^2}$ 은 벽에서는 요동이 없으므로 양 벽면에서 각각 0으로 하였다.

난류 소멸을 ϵ 과 열소멸을 ϵ_0 에 대한 경계조건에 대하여는 아직 정확한 정보가 있지 않은 상태이다. 그러나 차원해석에 의하여 난류 운동에너지의 소멸을 ϵ 은 대략

$$\epsilon \sim \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \tag{59}$$

의 크기를 가진다. (여기서 l 은 난류 특성 길이)

본 논문에서는 Farouk⁽³³⁾이 원통 주위의 난류 열전달의 계산에 사용한 방법과 같이하여, ϵ 의 경계조건을 벽면 바로 다음의 격자점에서 주었다. 즉,

$$\epsilon_b = c_{\epsilon 0} \frac{k_b^{\frac{3}{2}}}{y_b} \tag{60}$$

윗 식에서 하첨자 b 는 벽면 바로 다음의 격자점을 나타낸다. 계수 $c_{\epsilon 0}$ 는 $c_{\mu}^{3/4}/\kappa$ 이고, κ 는 von-Karman 상수, c_{μ} 는 혼합거리 모델에서 사용되는 계수로 $c_{\mu} = 0.09$, $\kappa = 0.41$ 이다. 이와같은 계수는 Sung⁽²⁷⁾의 논문에서 이미 유도된 바 있다.

열소멸항 ϵ_0 에 대한 경계 조건도 ϵ 의 경우와 같이 y_b 에서 난류시간 척도비 R (turbulent time scale ratio)이 벽근방에서 약 0.4라고 가정(Beguir⁽³⁴⁾)하여 다음과 같이 하였다.

$$\epsilon_{0b} = \frac{2k_b \cdot \epsilon_b}{R\theta_s^2} \tag{61}$$

열유속 $\overline{v\theta}$ 에 대한 경계조건은 k 나 $\overline{\theta^2}$ 와 같이 벽에서 0이 된다. 그러나 본 논문에서는 벽에서 경계 조건을 주지 않고 전도 구역에서는 열전달 현상이 순수 전도의 성격을 나타낸다는 점을 고려하여, 전도 척도로 $y/z_d = 1$ 되는 지점에서 경계 조건을 $\overline{v\theta} = 0$ 으로 하였다. 계산에 사용된 모델계수는 Table 3에 나타내었다. 이 계수는 Gibson과 Launder⁽¹⁶⁾가 사용한 계수를 기준으로 하였고, ϵ_0 식에서 나오는 계수는 Zeman과 Lumley^(21,22)가 사용했던 계수를 본 논문의 경우에 적합하게 약간 수정하여 사용하였다. 벽함수의 계수 c_w 는, 식(60)에서 보편 f 의 값이 y_b 에서 1이 되도록 할

Table 3 Model coefficients

c_1	c_3	$c_{\theta 1}$	$c_{\theta 2}$	c_{1w}	c_{3w}	$c_{\theta 1w}$	$c_{\theta 2w}$
1.8	0.5	3.5	0.33	0.5	0	0.5	0
$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon \theta 1}$	$c_{\epsilon \theta 2}$	$c_{\epsilon \theta 3}$	c_b	c_w	$c_{\epsilon b}$	
1.2	0.375	3.0	1.5	1.2	0.39	0.39	

Table 4 Physical parameters at five Rayleigh numbers. For air at 1 atm., $T_0=298^\circ\text{K}$, $\alpha=0.0000263\text{ m}^2/\text{sec}$, $\nu=0.0000187\text{ m}^2/\text{sec}$, $Pr=0.71$

$\Delta T(^{\circ}\text{C})$	$H(\text{m})$	Ra
9.5	0.1	6.3×10^5
21.6	0.12	2.4×10^6
21.6	0.16	5.9×10^6
25.8	0.18	1.0×10^7
27.3	0.35	7.8×10^7

때, $c_w=c_{es}=0.39$ 가 되는 것을 알 수 있다.

본 논문에서는 공기($Pr=0.71$)를 매질로 생각하여 다섯 가지의 Rayleigh 수에 대하여 계산하였다. 이때 사용한 ΔT 와 H 는 Table 4와 같다.

4. 계산 결과 및 고찰

수치계산에서는 Deardorff와 Willis⁽³⁰⁾가 사용한 ΔT , α/H , H 를 척도로 하여 계산하였다. 그 이유는 \bar{v}^2 과 k 에 대하여 그의 실험결과와 비교가 용이하도록 하기 위하여서다. 그러나 이 척도는 유동 현상을 기술하는데 적합하지는 않다. 이 경우 속도 척도가 너무 작기 때문에 무차원 속도들의 값이 큰 값을 갖기 때문이다. 그래서 계산 후 이 결과를 여러가지 다른 척도로 환산하여 보았다.

Fig. 4에서는 평균 온도 분포를 각 Ra 수에 대하여

실험 결과와 비교하였다. 이때의 온도는 양 평판 사이의 온도차 ΔT 로 무차원화 하고, 길이는 양 평판 사이의 간격 H 로 무차원화하였다. 먼저 눈에 띄는 것은 Ra 수가 커짐에 따라 벽면 근처에서의 온도가 급격히 변한다는 것이다. 이것은 당연한 결과로 Ra 수가 큰 경우, 즉, 난류 유동이 활발해 질수록 혼합효과가 커져 온도를 등온상태로 만들려는 경향이 커지기 때문이다.

계산된 온도 분포와 실험치들을 비교하여 보면, 벽에 아주 인접한 구간에서의 중심구역에서는 비교적 잘 일치하고 있으나 그 사이의 구간(천이 구역)에서는 계산치가 실험치보다 높게 나타난다. 이 현상은 Ra 수가 작을수록 크고, Ra 수가 1.0×10^7 으로 큰 경우에는 비교적 그 차이가 작게 나타났다.

벽면에서의 온도구배에 의하여 계산한 무차원 열전달 계수 Nu 는 Fig. 5에 나타내었다. Nu 수에 대한 실험결과들을 함께 그려 계산치와 비교하였는데 실험 결과들과 잘 일치하는 경향을 보여 온도 분포가 천이 구역에서 실험치보다 크게 나타남에도 불구하고 벽면에서의 구배는 정확히 계산되어졌음을 알 수 있다.

이런 결과를 나타낸 이유는 열유속 $\bar{v}\theta$ 의 경계조건을 적용할 때 전도구역에서의 유동은 층류의 성격을 가진다는 것을 고려하여, $y/z_d=1$ 이 되는 지점에서 경계조건을 $\bar{v}\theta=0$ 이라고 주었기 때문이 아닌가 생각한다.

본 논문에서 사용한 식은 모두 난류 식이기 때문에 이 식을 그대로 사용할 경우 난류 유동의 성격이 거의 없는 전도구간의 온도분포를 예측하는 것은 어려운 일

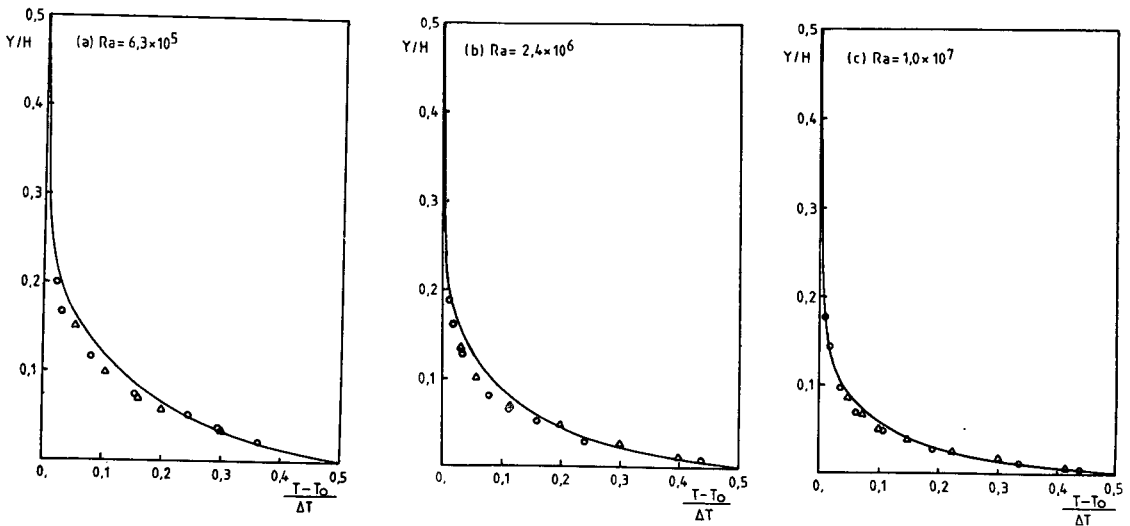


Fig. 4 Comparison of mean temperature-with experimental data: ----, prediction; Δ , data of Deardorff and Willis⁽³⁰⁾; \circ , data of Goldstein and Chu⁽³⁶⁾

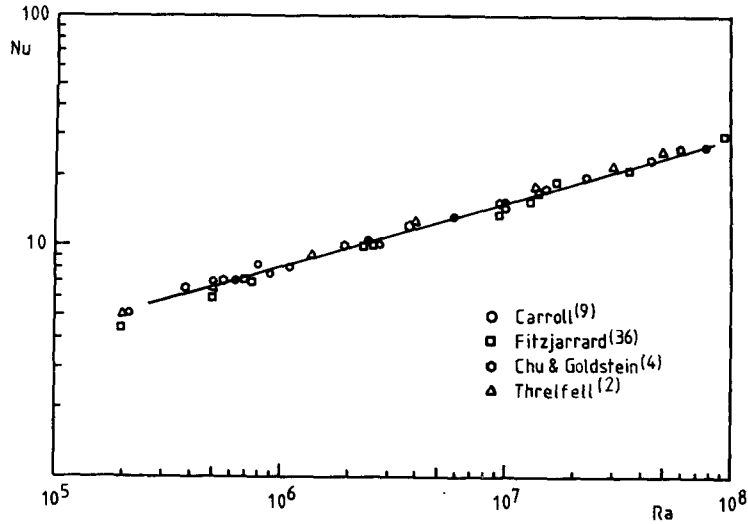


Fig. 5 Comparison of predicted Nusselt numbers with experimental data. Five predicted values (•) are fitted by solid line

이라고 생각하여 이를 보정하기 위한 방편이 전도구간에서 난류 열유속 $\overline{v\theta} = 0$ 라는 가정을 사용하여 본 것이다. 그러나 난류 대류 열전달과 전도 열전달의 효과가 비슷하게 작용되는 천이구역에서는 그 특성을 난류식에서 보정하기가 어려웠다. 이런 이유로 이 구간에서의 온도는 정확하게 예측하기가 힘든 것 같다.

수직 방향 속도 요동의 r.m.s.값 v 를 대류척도로 무차원화하여 나타내면, 양 평판의 중간 부근에서 계산한 다섯가지의 Rayleigh 수 (6.3×10^5 , 2.4×10^6 , 5.9×10^6 , 1.0×10^7 , 7.8×10^7)에 대하여 대략 $v/w_* = 0.75$ 정도로 거의 비슷한 값을 나타내었다. 이 결과가 Fig. 6에 나타나 있다. 수평 방향 속도 요동의 r.m.s. 값은 수직 방향보다는 그 분포가 산만하게 되지만 Fig. 7에서와 같이 $u/w_* = 0.62$ 정도가 되었다. 이 결과를 Fitzjarrard⁽³⁶⁾의 실험 결과와 비교하여 보면 그의 실험에서는 본 논문에서의 계산값 보다 큰 값을 나타내어 $v/w_* = 0.95 \pm 0.05$, $u/w_* = 0.72 \pm 0.05$ 를 나타내고 있다.

Ra 수에 따른 결과의 경향을 Fig. 6, Fig. 7에서 살펴 보면, v 의 Ra 수에 따른 형태는 거의 비슷한데 비하여, u 의 형태는 벽에서 급격히 증가하고 그 위도는 약간 오목한 현상을 보이며 증가하는데, Ra 수가 클수록 오목한 형상이 점차 급격해지고 짧은 구간에서 분포한다. $Ra = 7.8 \times 10^7$ 때에는 거의 그 형상이 없어진다. 벽면 근처에서는 u 가 v 보다 크지만 양 평판사이의 중간구역 (convection region)으로 가면서 v 가 조금씩 증가하는 것도 모든 Ra 수에 대하여 공통적으로 나타

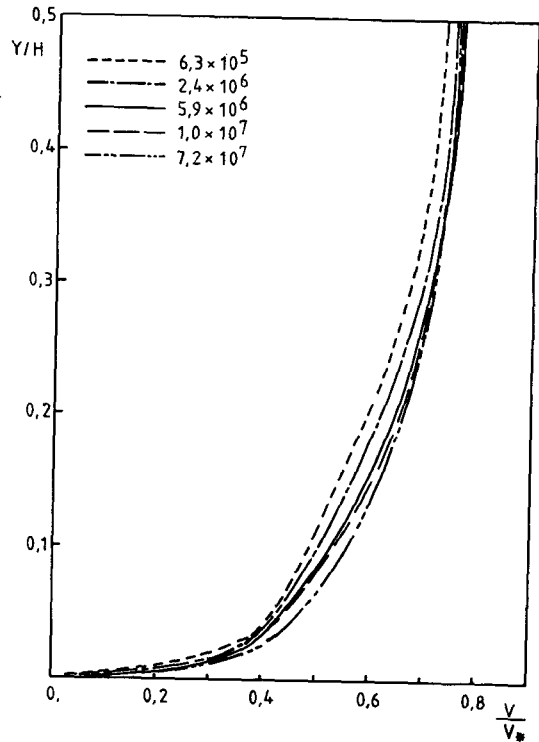


Fig. 6 r.m.s. vertical velocity fluctuations non-dimensionalized by convection scale

난다.

Fig. 8은 수직방향의 속도 요동 v 가 y 에 따라 어떠한 경향을 나타내는가를 보기 위하여 대수좌표에 그린

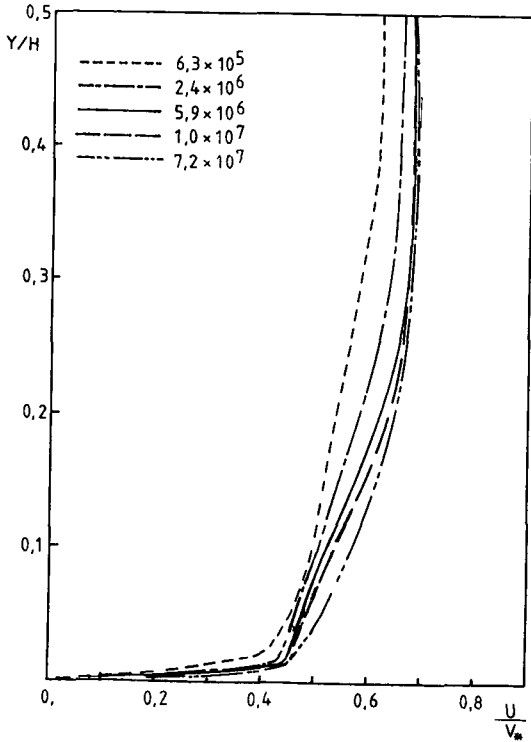


Fig. 7 r.m.s horizontal velocity fluctuations non-dimensionalized by convection scale

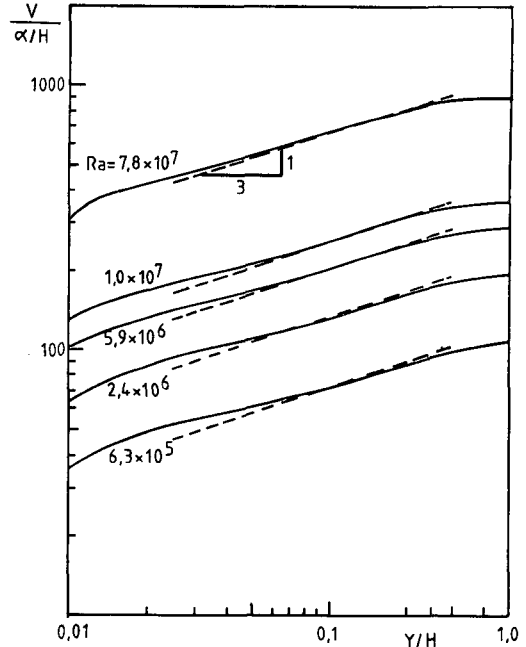


Fig. 8 Vertical velocity fluctuations with log-log coordinate. Dotted lines represent 1/3-power theory

것이다. 이때 v 는 Ra 가 커짐에 따라 $y^{1/3}$ 에 비례하는 구간이 나타나는 것을 보여 주어 Kraichnan⁽⁶⁾의 이론적 예측과 일치하고 있다.

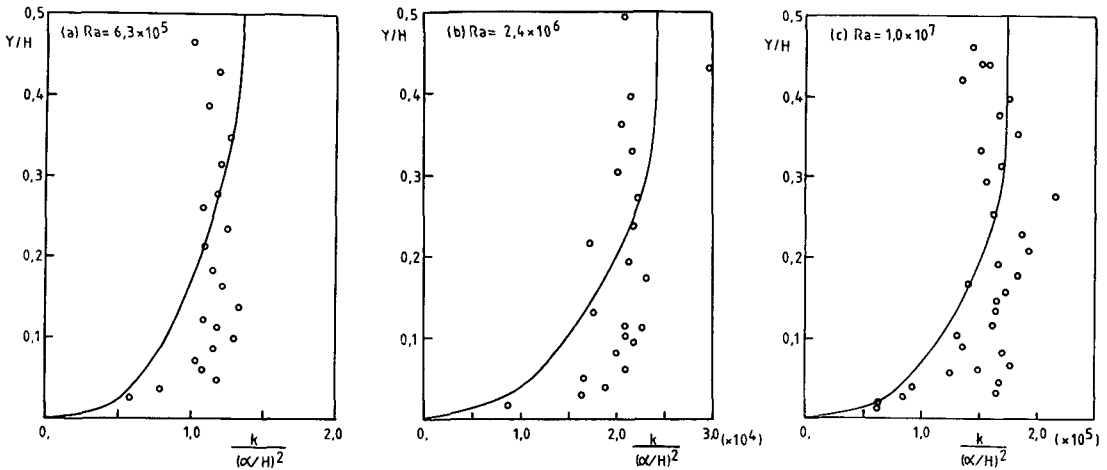


Fig. 9 Comparison of predicted turbulent kinetic energy with experimental data of Deardorff and Willis⁽⁶⁾ : ----, prediction ; o, data of Deardorff and Willis⁽⁶⁾

Fig. 9 은 난류운동에너지를 Deardorff 와 Willis⁽³⁰⁾의 실험치와 비교한 그림이다. 실험치는 벽 근방에서의 급격한 증가를 나타내고 중간 부근으로 가면서 약

간 감소하는 경향을 나타내어 계산 결과와는 큰 차이를 보이고 있다. 계산치와 Deardorff 와 Willis⁽³⁰⁾의 실험치가 이렇게 차이를 보이는 이유는 확실하지 않다.

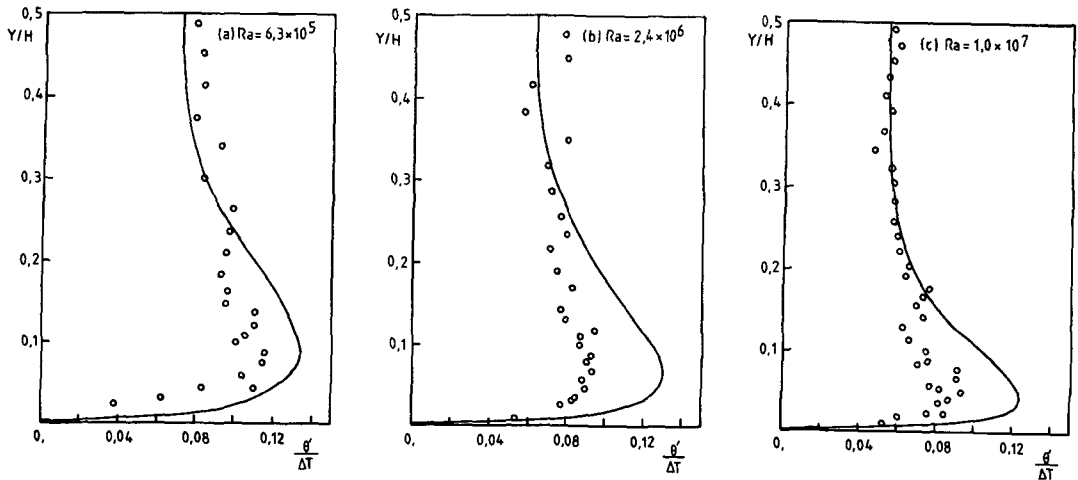


Fig. 10 Comparison of predicted R.M.S temperatures variance with experimental data of Deardorff and Willis⁽⁶⁾ : ----, prediction ; o, data of Deardorff and Willis⁽⁶⁾

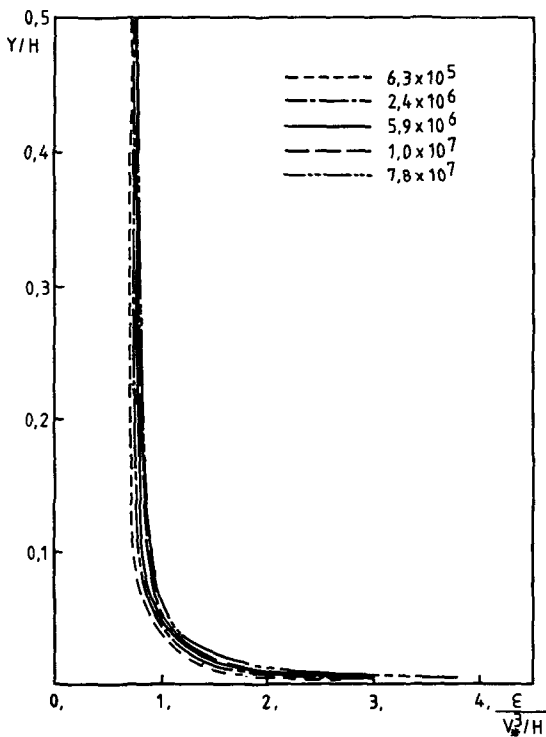


Fig. 11 Predicted dissipation rate of turbulent kinetic energy

계산된 결과는 모든 Ra 수에 대하여 k가 벽근처에서 급히 증가하다 그 후로는 서서히 증가하는 경향을 나타낸다.

Fig. 10는 온도요동의 r.m.s 값 θ' 를 계산한 결과로

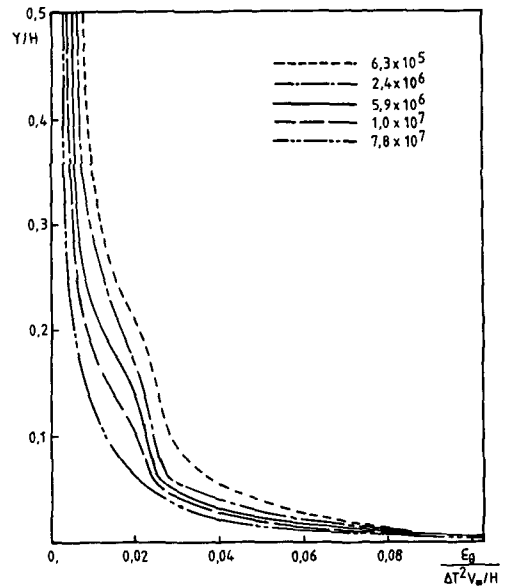


Fig. 12 Predicted dissipation rate of mean square temperature variance

역시 Deardorff와 Willis⁽³⁰⁾의 실험치와 비교하였다. 이때는 계산된 값이 벽면에 가까운 구간(경계층)에서 최대값을 보이고 중간 구역(대류구역)에서는 감소함을 보이고 있다. Carroll⁽⁹⁾의 연구에서 지적한 바에 의하면 상하 벽근방에서 발생한 열 덩어리(thermal plume)가 다른 편외 경계층으로 이동하여 서로 다른 온도의 유체 덩어리끼리 반응하는 과정에서 온도의 요동이 심하게 일어난다고 하였다. $\overline{v^2}$ 에 대한 실험 자료가 자세

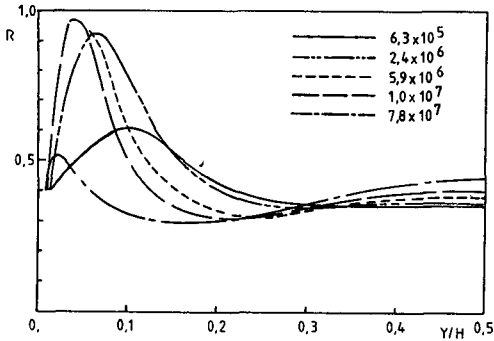


Fig. 13 Predicted turbulent time scale ratio

하게 나와 있는 참고 문헌이 부족하여 여러 실험 결과와 비교를 할 수 없었다. 그러나 간접적인 실험 자료를 통하여 보면 계산된 $\theta'/\Delta T$ 의 각 Ra 수에서의 최대치는 0.12에서 0.13에 분포하여, Carroll⁽⁹⁾의 경우 나타난 $\theta'/\Delta T \sim 0.1$ 보다 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 11은 난류 운동에너지의 소멸율 ϵ 을 나타낸다. ϵ 의 벽면으로 부터의 거리에 따른 분포는 중간에 넓은 구역에 걸쳐 거의 일정한 값을 갖고 있다. 벽에 가까워짐에 따라 급격히 증가하는 경향을 나타낸다.

Fig. 12은 $\bar{\theta}^2$ 의 소멸율 ϵ_θ 를 나타낸다. 이 경우는 ϵ_θ 의 분포는 벽면 근처에서 매우 큰 값을 가지고, 벽면에서 멀어짐에 따라, 급격히 감소하는데 도중에 그 감소율이 둔화되는 구역이 있다. 이 구역은 Ra 수가 작은 경우일수록 많이 나타나고 Ra 수가 커질수록 구역이 줄어들어 $Ra=7.8 \times 10^6$ 의 경우에는 이런 현상이 보이지 않고 있다.

Fig. 13은 난류시간 척도비(turbulent time scale ratio)을 나타낸다. y_0 에서 $R=0.4$ 로 가정하였으므로 이곳에서는 모두가 같으나 Ra 수에 따라 R 의 분포는 벽에 비교적 가까운 구간($0 < y/H < 0.2$)에서는 서로 그 크기가 다르게 나타난다. 중간 부분에서는 R 의 값은 대략 0.4 정도의 값을 가지며 Ra 수가 클수록 중간에서의 R 은 커짐을 볼 수 있다.

5. 결 론

난류 방정식을 이용하여 수치적으로 난류 열전달 문제를 계산하는 경우에 가장 문제가 되는 점은 난류와 층류의 효과가 공존하는 천이구역(transition region)에서의 현상을 설명할 수 있는 방법이 필요하다고 생각된다. 본 논문에서는 전도구역(conduction region)에서의 열유속 $\overline{v\theta}$ 에 대한 경계조건을 변형시킴으로써

어느 정도 해결하였다.

온도에 대한 부분적인 부정확한 결과에도 불구하고 유동의 전체적인 현상은 어느 정도 근사하게 예측되었다. 온도 변화는 대부분 벽면 근처의 좁은 전도 구역에서 일어나며, 그 이외의 구역에서의 온도는 거의 등온 상태를 나타낸다. Rayleigh 수가 커짐에 따라서 전도 구역에서의 온도는 급격하게 나타나고, 이에 따라 열전달량도 Rayleigh 수의 지수승에 비례하여 커진다.

온도 요동 θ' 는 천이 구역에서 최대값을 나타내며 대류 구역에서는 서서히 감소하는 경향을 보인다.

대류 구역에서는 수직 방향의 속도 요동이 수평 방향의 속도 요동보다 크게 나타나고 있다. 그러나 벽면에 인접한 곳에서는 수평 방향의 속도 요동이 수직 방향의 속도 요동보다 크다.

참 고 문 헌

- (1) Köster, J.N. and Müller, U., 1982, "Free Convection in Vertical Gaps", *Phys. Fluids*, Vol. 5, pp. 429~451.
- (2) Threlfall, D.C., 1975, "Free Couvection in Low Temperature Gaseous Helium", *J. Fluid Mech.*, Vol. 67, pp.17~28.
- (3) Willis, G.E. and Deardorff, J.W., 1967, "Confirmation and Renumbering of the Discrete Heat Flux Transition of Malkus", *Phys. Fluids*, Vol. 10, pp. 1867~1873.
- (4) Chu, T.Y. and Goldstein, R.J., 1973, "Turbulent Convection in a Horizontal Layer of Water", *J. Fluid Mech.*, Vol. 60, pp.141~159.
- (5) Denton, R.A. and Wood, I.R., 1979, "Turbulent Convection between Two Horizontal Plates", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 22, pp.1339~1346.
- (6) Malkus, W.V.R., 1954, "Discrete Transitions in Turbulent Convection", *Prog. Roy. Soc.* Vol. 225, p.185.
- (7) Priestley, C.H.B., 1955, "Convection from a Horizontal Surface", *Austr. J. Phys.*, Vol. 7, p. 176.
- (8) Kraichnann R.H., 1962, "Turbulent Thermal Convection at arbitrary Prandtl number", *Phys. Fluids*, Vol. 5, pp.1374~1389.
- (9) Carroll, J.J., 1976, "The Thermal Structure of Turbulent Convection", *J. Atmos. Sci.* Vol. 33.

- pp. 642~659.
- (10) Kataros, K.B., Lui, W.T., Businger, J.A. and Tillman, J.E., 1977, "Heat Transfer and Thermal Structure in the Interfacial Boundary Layer Measured in an Open Tank of Water in Turbulent Free Convection", *J. Fluid Mech.*, Vol. 83, pp. 311~335.
 - (11) Globe, S. and Dropkin, 1958, "Natural Convection Heat Transfer in Liquids Confined by Two Horizontal Plates and Heated from Below", *Heat Trans. and Fluid Mech. Inst.*, pp. 156~165, Univ. of Calif. Berkeley.
 - (12) Clever, R.M. and Busse, F.H., 1981, "Low Prandtl Number Convection in a Layer Heated From Below", *J. Fluid Mech.*, Vol. 102, pp. 61~71.
 - (13) Long, R.R., 1976, "Relation between Nusselt Number and Rayleigh Number in Turbulent Thermal Convection", *J. Fluid Mech.*, Vol. 73, pp. 445~451.
 - (14) Launder, B.E., 1975, "On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum", *J. fluid Mech.*, Vol. 67, pp. 569~581.
 - (15) Shir, C.C., 1973, "A Preliminary numerical Study of Atmospheric Turbulent Flows in the Idealized Planetary Boundary Layer", *J. Atmos. Sci.*, Vol. 30, pp. 1327~1339.
 - (16) Gibson, M.M. and Launder, B.E., 1978, "Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer", *J. Fluid Mech.*, Vol. 86, pp. 491~511.
 - (17) Ljuboja, M. and Rodi, W., 1981, "Prediction of Horizontal and Vertical Turbulent wall Jets", *ASME. J. Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 343~349.
 - (18) Lumley, J.L., Zeman, O. and Siess, J., 1978, "The Influence of Buoyancy on Turbulent Transport", *J. Fluid Mech.*, Vol. 84, pp. 581~597.
 - (19) Rodi, W., 1980, "Turbulence Models for Environmental Problems", *Prediction Methods for Turbulent Flow*, Ed. Kollman, McGraw-Hill Co.
 - (20) Gibson, M.M. and Launder, B.E., 1976, "On the Calculation of Horizontal, Turbulent, Free Shear flows under Gravitational Influence", *ASME. J. Heat Transfer*, Vol. 98, pp. 81~87.
 - (21) Zeman, O. and Lumley, J.L., 1976, "Modelling Buoyancy Driven Mixed Layer", *J. Atmos. Sci.*, Vol. 33, pp. 1974~1988.
 - (22) Zeman, O. and Lumley, J.L., 1977, "Buoyancy Effects in Entraining Turbulent Boundary Layers; A Second-Order Closure Study", *Turbulent Shear Flow I*, pp. 295~306.
 - (23) Hanjalic, K. and Launder, B.E., 1972, "A Reynolds Stress Model of Turbulence and Its Application to Thin Shear Flow", *J. Fluid Mech.*, Vol. 52, pp. 609~638.
 - (24) Hanjalic, K. and Launder, B.E., 1976, "Contribution Towards a Reynolds Stress Closure for Low-Reynolds Number Turbulence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 74, pp. 593~610.
 - (25) Chung, M.K., 1978, "Study of Second Order Models with Variable Coefficients", Ph. D. Thesis, Univ. of Illinois.
 - (26) Newman, G.R., Launder, B.E. and Lumley, J. L., 1981, "Modelling the Behaviour of Homogeneous Scalar Turbulence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 111, pp. 217~232.
 - (27) Sung, H.J. and Chung, M.K., 1983, "Development of Four-Equation Turbulence Model for Prediction of Mixed Convective Heat Transfer on a Flat Plate", *Transactions of KSME*. Vol. 7, pp. 193~203.
 - (28) Tanaka, H. and Miyata, H. 1980, "Turbulent Natural Convection in a Horizontal Water Layer Heated From Below", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 1273~1281.
 - (29) Townsend, A.A., 1959, "Temperature Fluctuations Over a Heated Horizontal Surface", *J. Fluid Mech.*, Vol. 5, pp. 209~241.
 - (30) Deardorff, J.W. and Willis G.E., 1967, "Investigation of Turbulent Thermal Convection between Horizontal Plates", *J. Fluid Mech.*, Vol. 28, pp. 675~704.
 - (31) Roache, P.J., 1972, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers Co.
 - (32) Patanker, S.V., 1982, *Numerical Heat Transfer and Fluid flow*, McGraw-Hill Co.
 - (33) Farouk, B. and Guceri, S.I., 1982, "Natural Convection From a Horizontal Cylinder-Turbulent Regime", *ASME. J. Heat Transfer*, Vol. 104, pp.

- 228~235.
- (34) Beguier, C., Debeyser, I. and Launder, B.E., 1978, "Ratio of Scalar and Velocity Dissipation Time Scale in Shear Flow Turbulence", *Phys. Fluids*, Vol. 21, pp.307~315.
- (35) Golstein, R.J. and Chu, T.Y., 1969, "Thermal Convecion in a Horizontal Layer of Air", *Prog. Heat Mass Transfer*, Vol. 55, pp.55~75.
- (36) Fitzjarrald, D.E., 1976, "An Experimental Study of Turbulent Convection in Air", *J. Fluid Mech.*, Vol. 73, pp.693~719.