접촉역학과 그 응용

崔 東 勳
한양대학교 기계설계학과 교수

●1953년생
●접촉역학을 전공하였으며, 이를 이용한 Fretting마멸의 해석과 Fretting마멸을 최소화하기 위한 최적 설계 등에 관심을 가지고 있다.

1. 머 리 말

산업 현장에서 사용되는 대부분의 기계나 구조물들은 구성부품의 결합 또는 접촉으로 연결되어 있으며, 접촉면을 통하여 힘과 모멘트를 전달하고, 접촉면 사이에서는 복잡한 미시적 또는 거시적 상대운동이 발생한다.

최근 기계시스템이 정밀화되고 고속화되어감에 따라, 접촉부의 보다 정확한 해석과 접촉부의 최적설계가 요구되고 있다.

본 글에서는 접촉면에서의 현상, 접촉문제의 분류, 정접촉문제 해석에 관한 일부 문헌을 소개하고, 수정된 선형계획법을 이용한 마찰접촉문제의 해석기법을 설명함으로써 접촉문제의 일반적 해석을 위한 수식화 과정을 보이고자 한다. 또한 접촉역학의 응용예로서, 고속 구름베어링의 해석법과 접촉응력을 최소화하기 위한 형상 최적설계를 소개하고자 한다.

2. 접촉면에서의 상대운동과 전달력[1]

2.1 상대운동

접촉현상의 일반적 기술을 위해 그림 1과 같은 좌표계를 설정한다. 한 물체의 순간 운동은 기준점의 선속도와 그 물체의 각속도로 정의될 수 있으며, 접촉역학에서는 하중이 가해지기 전의 접촉점을 기준점으로 설정한다. 물체 1이 선속도 $\boldsymbol{V}_1$과 각속도 $\boldsymbol{\Omega}_1$으로, 물체 2가 선속도 $\boldsymbol{V}_2$와 각속도 $\boldsymbol{\Omega}_2$로 움직이며, 설정한 좌표계가 선속도 $\boldsymbol{V}_0$와 각속도 $\boldsymbol{\Omega}_0$로 움직인다고 하면, 좌표계에 대한 각 물체의 선속도 및 각속도는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_0 \qquad \boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\Omega}_1-\boldsymbol{\Omega}_0 \qquad \boldsymbol{\omega}_2=\boldsymbol{\Omega}_2-\boldsymbol{\Omega}_0 \tag{2}$$

접촉이 연속적이기 위하여 두 물체 사이의 상대속도의 공통 법선방향 성분은 존재하지 않아야 하며($v_{z_1}=v_{z_2}=0$, $V_{z_1}=V_{z_2}=V_{z_0}$), 공통 접선방향 성분은 "sliding"이라 칭한다.

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2 \tag{3}$$

이 미끄럼 속도는 다음의 두 성분을 가진다.

$$\Delta v_x=v_{x_1}-v_{x_2} \qquad \Delta v_y=v_{y_1}-v_{y_2} \tag{4}$$

공통 접선면상에 존재하는 축에 대한 두 물체 사이의 상대 각속도는 "rolling"이라 정의되며, 다음의 두 성분을 가진다.

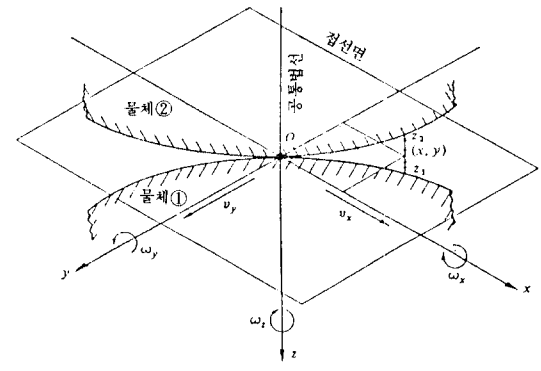

그림 1 0점에서 접촉하고 있는 두 물체에 설정한 좌표계

$$\Delta\omega_x=\omega_{x_1}-\omega_{x_2}=\Omega_{x_1}-\Omega_{x_2}$$
$$\Delta\omega_y=\omega_{y_1}-\omega_{y_2}=\Omega_{y_1}-\Omega_{y_2} \quad (5)$$

또한 공통 법선에 대한 두 물체 사이의 상대 각속도는 "spin"이라 불린다.

$$\Delta\omega_z=\omega_{z_1}-\omega_{z_2}=\Omega_{z_1}-\Omega_{z_2} \quad (6)$$

접촉면에서의 일반적인 상대운동은 sliding, rolling과 spin의 조합으로 간주될 수 있다. 자동차 바퀴와 노면의 접촉을 예로 들면, 보통 운전조건에서는 rolling만이 존재하며, 좌우 회전을 할 때는 spin이 중첩되며, 바퀴가 고정된 채 미끄러질 때는 sliding만이 존재한다.

2.2 전달력

수직력 P에 의해 생기는 접촉면을 통하여 전달되는 힘과 모멘트는 그림 2에 나타난 바와 같다. Q_x와 Q_y의 합력인 접선력 Q의 크기는 한계마찰력 fP의 크기 이하여야 한다.

$$Q\leqslant fP \quad (7)$$

여기서 f는 마찰계수이다.

M_x와 M_y는 "rolling moment"라고, M_z는 "spin moment"라고 칭한다.

2.3 Surface Tractions

상기 힘과 모멘트는 접촉면에 분포된 수직 traction p와 접선 traction q에 의해 전달되며, 평형 방정식을 만족시키기 위한 이들의 관계는 다음과 같다.

$$P=\int_S p\ dS\quad Q_x=\int_S q_x\ dS\quad Q_y=\int_S q_y\ dS$$

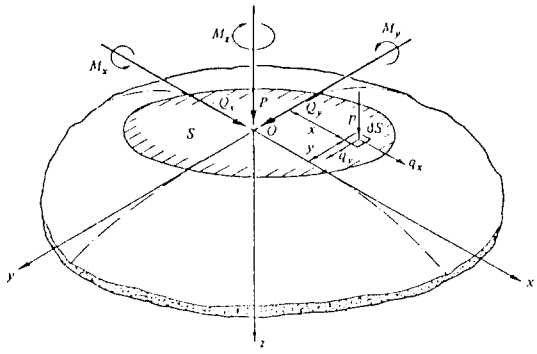

그림 2 접촉면 S에 작용하는 힘과 모멘트

$$M_x=\int_S py\ dS\quad M_y=-\int_S px\ dS$$
$$M_z=\int_S(q_y x-q_x y)\,dS \quad (8)$$

여기서 M_x와 M_y에 관한 식은 미소 warping을 무시하는 경우이며, 접촉면의 기하학적 형상이 warping을 무시할 수 없는 경우에는 q_x와 q_y에 관련된 항이 포함되도록 수정되어야 한다.

3. 접촉 문제의 분류

접촉 문제는 관점에 따라 다음과 같이 여러 가지로 분류될 수 있다.

(1) 접촉변형 양상 ; 탄성, 탄소성, 점탄성
(2) 접촉표면 모델링 ; smooth, rough
(3) 접촉물체의 수 ; two-body contact, multi-body contact
(4) 접촉부의 기하학적 형상 ; nonconforming, conforming
(5) 접촉해석의 모델링 ; 2차원, 3차원
(6) 접촉면에서의 상대운동[2] ; static, sliding, spin, rolling, rolling with sliding, rolling with spin
(7) 마찰력 존재 여부 ; frictionless, frictional

4. 정접촉 문제 해석에 관한 문헌 소개

4.1 수직력을 받고 있는 접촉 문제

접촉역학은 1882년 H. Hertz[3]에 의해 비롯되었다. 그 후 Lundberg[4], Cattaneo[5], Conway[6], Tsai 등[7]에 의해 Hertz 이론이 확장되었다. Goodman[8], Greenwood와 Tripp[9] 그리고 Goriacheva[10]는 rough contact를 다루었다. Schwartz와 Harper[11]는 mordern perturbation 이론을 이용했고, Kalker와 Randen[12]은 minimum principle을 이용했다.

Conry와 Seireg[13]는 수정된 선형 계획법을 사용하여, Chand 등[14]은 2차 계획법을 사용하여, Kravchuk[15]은 비선형 계획법을 사용하여 일반적 접촉문제를 해석하였다.

Nuri[16]는 실험적으로 rough contact에서의

강체 변위를 구하였다. White와 Enderby[17,18] Parson과 Wilson[19], Francavilla와 Zienkiewicz[20], Chdeva 등[21], Endo 등[22]은 유한요소법을 이용하여 접촉문제를 해석하였다.

이병채와 곽병만[23]은 탄소성 접촉문제를, 주진원과 곽병만[24]은 대변형을 고려한 탄소성 접촉문제를 다루었다.

4.2 수직력과 접선력을 동시에 받고 있는 접촉문제

Cattaneo[25]는 타원접촉면에, Mindlin[26]은 원형 접촉면에 분포된 접선 traction을 구하였다. Johnson[27]은 원형 접촉면에서의 상대적인 미끄름의 크기를 계산하였다. Deresiewicz[28]는 수직력과 접선력을 변화시켰을 때 타원 접촉면에서의 접촉현상을 해석하였다.

최동훈[29]은 일반적 형상을 가진 접촉면에서의 접촉현상을 해석하기 위해 마찰접촉문제를 최적화 문제로 변환시킨 후 수정된 선형계획법을 이용하였다. 유한요소법을 이용한 해석으로는 참고문헌 (30~36)을 참조바란다.

4.3 수직력과 비틀림 모멘트를 동시에 받고 있는 접촉문제

Mindlin[26]은 원형 접촉면에서 미끄름이 없다는 가정하에서 접선 traction의 분포가 중심에서는 영이 되고 접촉경계에서는 무한대가 된다는 결과를 얻었다. 접촉면에서 미끄름이 일어난다는 실제적인 가정하에 Lubkin[37]은 원형 접촉면에 대한 해석을 하였고, Deresiewicz[38]는 이를 확장하여 비틀림 모멘트를 변화시켜가며 원형 접촉면에서의 접촉현상을 해석하였다. Hetenyi와 McDonald[39]는 gross slip이 일어나기 직전의 한계조건의 경우 원형 접촉면의 접촉현상을 이론적으로 또한 실험적으로 다루었다.

상기문헌들이 원형 접촉면에만 국한되어 있는 반면, 최동훈[40]은 일반적 형상의 접촉면에서의 접촉현상을 해석할 수 있는 기법을 제안하였다.

5. 최적화 기법을 이용한 마찰 접촉문제의 해석[29]

수직력에 의해 형성된 접촉면에 분포된 수직 traction이 주어져 있을 때 접선력에 의한 접선 traction의 분포와 접선 방향의 강체 변위를 구하고자 한다. 접촉면 상의 각 점에서의 접선 변형 및 접선 traction의 방향은 접선력의 방향과 같으며, 상응하는 접촉점 사이에 상대 접선 변위가 존재하는 슬립 영역과 존재하지 않는 no-slip 영역이 형성된다. 접촉면에서의 중요한 마멸형태인 fretting 마멸은 slip 영역에 발생하는 반복적인 미소 미끄름에 의해 유발된다.

일반적 형상의 접촉면을 다루기 위해 접촉면을 N개의 사각형 요소로 분할하면 접촉 현상은 다음과 같은 수식으로 표현될 수 있다.

(1) 각 점에서의 변형 적합조건

$$u_k=\beta \text{ in the no-slip region}$$
$$u_k<\beta \text{ in the slip region}$$
$$\text{for } k=1, \cdots, N \tag{9}$$

여기서 u_k는 접촉점 k에서의 하중 방향의 접선변위이며, β는 접선 강체변위이다.

(2) 각 점에서의 접선력에 대한 제한 조건

$$F_k<fP_k \text{ in the no-slip region}$$
$$F_k=fP_k \text{ in the slip region}$$
$$\text{for } k=1, \cdots, N \tag{10}$$

여기서 F_k는 접촉점 k에 작용하는 접선력이며 P_k는 수직력이다.

(3) 평형 조건

$$\sum_{k=1}^{N} F_k=T \tag{11}$$

여기서 T는 주어진 접선방향의 하중이다.

(4) Complementary condition

각 점은 no-slip region에 있거나 slip region에 있어야 한다.

영향 계수 행렬 A와 slack variable 벡터 $\bar{Y}$를 도입하여 연립 방정식으로 수식화한 후 artificial variable 벡터 $\bar{Z}$를 사용하여 다음과

같은 최적화 문제로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize} && \sum_{i=1}^{2N+1} Z_i \\
&\text{subject to} && A\bar{F}+I\bar{Y}_1-\beta\bar{e}+I\bar{Z}_1=0 \\
& && I\bar{F}+I\bar{Y}_2+I\bar{Z}_2=f\bar{P} \\
& && \bar{e}^T\bar{F}+z_{2N+1}=T \\
& Y_{1k}=0 \text{ or } Y_{2k}=0 && \text{for } k=1,\cdots,N \\
& F_k\geqq 0,\ Y_{1k}\geqq 0,\ Y_{2k}\geqq 0,\ \beta\geqq 0 && \text{for } k=1,\cdots,N \\
& Z_i\geqq 0 && \text{for } i=1,\cdots,2N+1
\end{aligned} \tag{12}$$

효율적인 수정된 선형 계획법을 이용하여 상기 최적화 문제의 최적해를 구할 수 있다.

6. 고속 볼 베어링의 해석[41,42]

접촉역학의 응용 예로서 반경방향, 축방향과 모멘트 하중을 동시에 받고 있는 고속으로 회전하는 볼 베어링의 해석기법을 살펴보고자 한다. 볼 베어링내에 일정한 간격으로 배치되어 있는 볼들의 위치는 그림 3과 같다. 각 볼에 작용하는 하중은 그림 4에 표시된 바와 같고, 그에 따른 변형은 그림 5와 같다.

1단계 : 기하학적 조건 및 접촉력과 변위 사이의 관계식을 고려하여 각 볼에 대한 평형 조건식을 세운다. 변수의 수가 방정식의 수보다 많으므로, 변수 중 강체변위들을 임의로 추정한 후 비선형 연립방정식을 풀어 각 볼에서의 접촉력 및 접촉각을 구한다.

2단계 : 전체 베어링의 평형 조건식을 세우고 1단계에서 구한 접촉력 및 접촉각의 수치를 이용하여 강체변위들을 구한다.

3단계 : 1단계에서 추정한 강체변위들과 2단계에서 구한 강체변위들을 비교한다. 이들이 충분히 가까운 값이면 해를 얻은 것이고, 그렇지 않으면 2단계에서 구한 강체변위들을 사용하여 1단계와 2단계를 반복한다.

위와 같은 반복적인 해석 과정을 이용하여

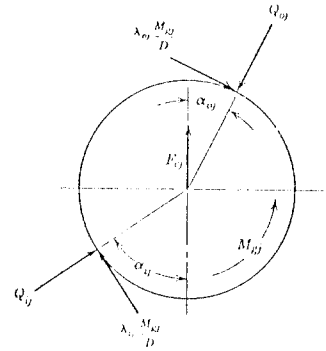

그림 4 각 볼에 작용하는 하중

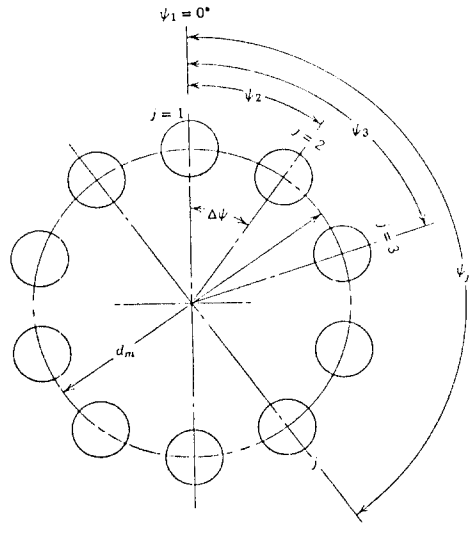

그림 3 볼 베어링내에 배치되어 있는 볼의 위치

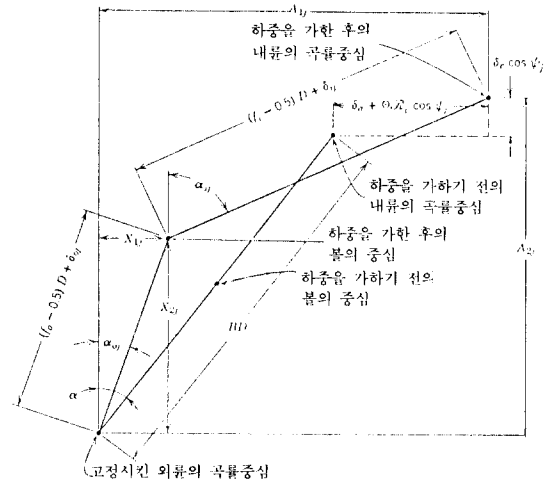

그림 5 각 볼에 대한 하중을 가하기 전과 후의 볼의 중심과 내외륜의 곡률중심의 위치

고속 베어링의 중요한 작동 특성인 각 볼에서의 접촉각 (α_i, α_0)과 작용하중 (Q_i, Q_0) 및 전체 베어링의 강체변위 (δ_r, δ_a, θ)를 구할 수 있다.

7. 접촉 형상 최적설계[13]

수직력을 받고 있는 2차원 접촉의 경우 최적의 접촉 응력분포를 주는 접촉 물체의 형상을 설계하고자 한다. 두 접촉체 사이의 초기 간격을 다음과 같은 이차함수로 정의하자.

$$d=ax^2+bx+c\geqq 0 \tag{13}$$

이제 각 점에서의 변형 후 간격이 음이 될 수 없다는 변형 적합조건은 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$\varepsilon_k=w_k-\alpha+(ax^2+bx+c)\geqq 0 \tag{14}$$

여기서 w_k는 접촉점 k에서의 두 물체의 수직방향의 탄성변형의 합이며, α는 수직 강체변위이다.

각 점에서의 수직 traction은 최소화하고자 하는 최대 수직 traction $p_{\max}$보다 커서는 안된다.

$$F_k/\Delta k-p_{\max}\leqq 0 \tag{15}$$

여기서 F_k는 접촉점 k에 작용하는 수직력이며, Δk는 접촉점 k가 대표하는 접촉 면적이다.

평형 조건식은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{N} F_k=P \tag{16}$$

여기서 P는 주어진 수직 하중이다.

또한 예상 접촉면은 접촉하거나($\varepsilon_k=0$) 또는 분리되어야($F_k=0$) 한다.

$p_{\max}$를 최소화하는 것을 목적함수로 하고 상기 제한 조건식들을 고려하면 설계변수 a, b, c를 구하기 위한 최적화 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{array}{lllll} \text{Minimize} & p_{\max} & & & \\ \text{Subject to} & -S\bar{F}+I\bar{Y}+a\bar{c} & -a\bar{X}^2 & -b\bar{X}-c & =0 \\ & D\bar{F} & & -p_{\max}\bar{e} & \leqq 0 \\ & & -a\bar{X}^2-b\bar{X}-c & & \leqq 0 \\ & \bar{e}^T\bar{F} & & & =P \end{array} \tag{17}$$

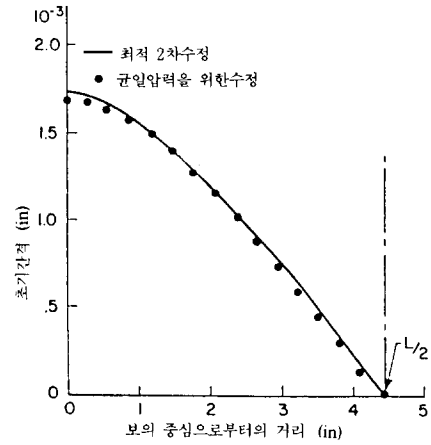

그림 6 균일 압력분포를 위한 초기간격

$$\bar{F},\ \bar{Y},\ a,\ a,\ c\geqq 0$$

Either

$$Y_k=0 \text{ or } F_k=0$$

여기서 S는 영향계수 행렬이고 $\bar{Y}$는 slack variable 벡터이다.

상기 algorithm을 beam on elastic foundation의 문제에 적응시킨 결과 얻은 최적해는 그림 6과 같고, 수직 traction 분포는 그림 7과 같다. 그림 7에서 볼 수 있는 바와 같이 상기 최적해로 주어진 2차 곡선 형태의 초기 간격을 줌으로써 최대 접촉응력을 약 35% 감소시킬 수 있다.

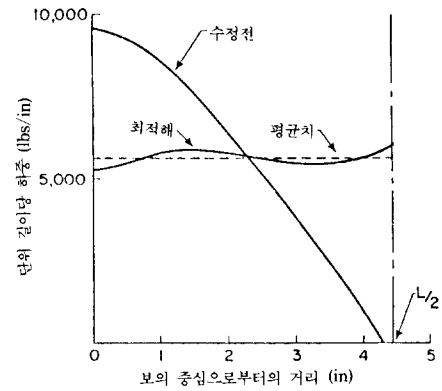

그림 7 탄성지지대 위의 보에 작용하는 압력분포

8. 맺 음 말

기계나 구조물의 수명을 결정하는 마멸은 물체간의 접촉으로 인한 것이고 마멸을 줄이기 위해 윤활이 발달되어 왔다. 여러 형태의 마멸을 해석하기 위해서 접촉역학의 이해는 필수적이라 할 수 있다.

하중과 운동 조건에 의한 다양한 접촉문제를 일반적으로 다루기 위해 접촉면을 중심으로 한 접근 방법을 소개하였으며, 접촉문제의 특이성을 보이기 위해 마찰접촉문제 해석을 위한 한 기법을 간단히 기술하였다. 고속 볼 베어링의 특성 해석과 접촉형상 최적설계를 통하여 광범위한 접촉 역학의 적용의 일부를 소개하였다.

윤활과 접촉역학을 접목시킨 대표적인 예로 elastohydrodynamic lubrication을 들 수 있으며, 마멸 및 윤활에 접촉역학을 적용하기 위하여 이 분야에 대한 지속적인 깊은 연구가 필요하다고 생각된다.

참 고 문 헌

(1) K.L. Johnson, 1984, Contact Mechanics, Cambrige Univ. Press.

(2) K.L. Johnson, 1957, "Recent Developments in the Theory of Elastic Contact Stresses: Their Significance in the Study of Surface Breakdown", Paper 24, Inst. of Mechanical Engineers.

(3) H. Hertz, English Translation in H. Hertz, 1896, "Miscellaneous Papers", translated by D.E. Jones and G.A. Schott, Macmillan, New York, 146-162. 163-183.

(4) G. Lundberg, 1939, "Elastische Beruhrung Zweier Halbaume", Forsch. Ingenieurw., 10, pp. 201~211.

(5) C. Cattaneo, 1947, "Teoria del contatto elasiico in seconda approssimazione", Univ. Rome., Rend., Mat. Appl., 6, pp. 504~512.

(6) H.D. Conway, 1956, "The Pressure Distribution Between Two Elastic Bdies in Contact", Z. Angew. Math. Phys., 7, pp. 460~465.

(7) K.C. Tsai, J. Dundurs and L.M. Keer, 1972, "Contact Between an Elastic Layer with a Slightly Curved Bottom and a Substrate", ASME, J. of Appl. Mech., Vol. 39, Ser. E, No. 3, pp. 821~823.

(8) L.E. Goodman, 1962, "Contact Stress Analysis of Normally Loaded Rough Spheres", ASME, J. of Appl. Mech., pp. 515~522.

(9) J.A. Greenwood and J.H. Tripp, 1967, "The Elastic Contact of Rough Spheres", ASME, J. of Appl. Mechanics, pp. 153~159.

(10) I.G. Goriacheva, 1979, "Plane and Axisymmetric Contact Problems for Rough Elastic Bodies", Appl. Math. Mech., Vol. 43, p. 104.

(11) J. Schwartz and E.Y Harper, 1971, "On the Relative Approach of Two-Dimensional Elastic Bodies in Contact", Int. J. Solids Struct., Vol. 7, No. 12, pp. 1613~1626.

(12) J.J. Kalker and Y. Van Randen, 1972, "Minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to Non-Hertzian Contact Problems", J. Eng. Math. Vol. 6, No. 2, pp. 193~206.

(13) T.F. Conry and A. Seireg, 1971, "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact", ASME, J. of Appl. Mech., pp. 387~392.

(14) R. Chand, E.J. Haug and K. Rim, 1976, "Analysis of Unbonded Contact Problems by Means of Quadratic Programming", J. Optim. Theory Appl., Vol. 20, No. 2, pp. 171~189.

(15) A.S. Kravchuk, 1977, "On the Hertz Problem for Linearly and Non-Linearly Elastic Bodies of Finite Dimension" Appl. Math. Mech., Vol. 41, No. 2, pp. 320~328.

(16) K.A. Nuri, 1974, "Normal Approach between Curved Surfaces in Contact", Wear, Vol. 30, No. 3, pp. 321~335.

(17) D.J. White and L.R. Enderby, 1969, "Finite-Element Stress Analysis of a Multi-Piece Piston", J. of Strain Analysis, Vol. 4, No. 1, p. 32.

(18) D.J. White and L.R. Enderby, 1970, "Finite-Element Stress Analysis of a Non-Linear Programming: a Connecting-Rod Eye Loaded by Means of a Pin", J. of Strain Analysis, Vol. 5,

No. 1, pp. 41～48.
(19) B. Parsons and E.A. Wilson, 1970, "A Method for Determining the Surface Contact Stress Resulting from Interference Fits" Trans. ASME, J. of Engr for Industry, Vol. 92, No. 1, p. 208.
(20) A. Francavilla and O.C. Zienkiewicz, 1975, "Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 9, No. 4, pp. 913～924.
(21) T.D. Sachdeva, C.V. Ramakrishnan, and R. Natarajan, 1981, "A Finite Element Method for the Elastic Contact Problems", J. of Engr. for Industry, Vol. 103, No. 4, pp. 456～461.
(22) T. Endo, J.T. Oden, E.B. Becker and T. Miller, 1984, "A Numerical Analysis of Contact and Limit-Point Behavior in a Class of Problems of Finite Elastic Deformation", Computers and Structures, Vol. 18, No. 5, pp. 899～910.
(23) B.C. Lee and B.M. Kwak, 1984, "A Computational Method for Elastoplastic Contact Problems", Computers and Structures, 18, (5).
(24) J.W. Joo and B.M. Kwak, 1986, "Analysis and Application of Elastoplastic Contact problems Considering Large Deformations", Computers and Structures, 24, (6).
(25) C. Cattaneo, 1938, "Sul Contatto di due Corpi Elastici: Distribuzione Locale Degli Sforzi", Accademia dei Lincei, Rendiconti, Ser. 6, Vol. 27, pp. 342～348, 434～436, 474～478.
(26) R.D. Mindlin, 1949, "Compliance of Elastic Bodies in Contact", J. of Appl. Mech., Vol. 71, pp. 259～268.
(27) K.L. Johnson, 1955, "Surface Interaction between Elastically Loaded Bodies under Tangential Forces", Proc. Roy. Soc. (London), A, 230, pp. 531～548.
(28) H. Deresiewicz, 1957, "Oblique Contact of Non-Spherical Elastic Bodies", J. of Appl. Mech., Vol. 79, pp. 623～624.
(29) D. Choi, "An Algorithmic Solution for Traction Distribution in Frictional Contacts", Univ. of Wisconsin-Madison, Ph. D. Thesis.
(30) S.K. Chan and I.S. Tuba, 1971, "A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies", Int. J. Mech. Sci., Vol. 13, pp. 615～639.
(31) R. Gaertner, 1977, "Investigation of Plane Elastic Contact Allowing for Friction", Computers and Structures, Vol. 7, No. 1, pp. 59～63.
(32) M. Cristescu, 1981, "Elasto-Plastic Contact Problems", Proc. of the 6th International Seminar on Computational Aspects of the Finite Element Method, Paris, pp. 103～117.
(33) E. Zolti, 1983, "A Finite Element Procedure to Time Dependent Contact Analysis", Computers and Structures, Vol. 17, No. 4, p. 555.
(34) I. Zeid and J. Padovan, 1981, "Finite Element Modeling of Rolling Contact", Computers and Structures, Vol. 14, No. 1～2, pp. 163～170.
(35) M.G. Katona, 1983, "A Simple Contact-Friction Interface Element with Applications to Buried Culverts", Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 7, No. 3, pp. 371～384.
(36) M. Mazurkiewicz and W. Ostachowicz, 1983, "Theory of Finite Element Method for Elastic Contact Problems of Solid Bodies", Computers and Structures, Vol. 17, No. 1, pp. 51～59.
(37) J.L. Lubkin, 1951, "The Torsion of Elastic Spheres in Contact", J. of Appl. Mech., Vol. 73, pp. 183～187.
(38) H. Deresiewicz, 1954, "Contact of Elastic Spheres under an Oscillating Torsional Couple", J. of Appl. Mech., Vol. 76, pp. 52～56.
(39) M. Hetenyi and H. McDonald, 1958, "Contact Stresses under Combined Pressure and Twist", J. of Appl. Mech., Vol. 80, pp. 396～401.
(40) D. Choi, 1987, "An Algorithmic Solution for Frictional Contact Problems Subjected to a Twisting Moment", KSME J., Vol. 1, p. 108.
(41) Tedric A. Harris, 1984, "Rolling Bearing Analysis", John Wiley and Sons.
(42) B.J. Hamrock and D. Dowson, 1981, "Ball Bearing Lubrication", John Wiley and Sons.