□ 研究論文 □

韓國 軍事運營分析 學會誌
第 14 卷 第 1 號, 1988. 6.

축차경매의 평형입찰전략과 최적경매설계*
(Equilibrium Bidding Strategy and Optimal Auction Design of Sequential Auction)

김 여 근 (Kim, Yea Geun)**
박 순 달 (Park, Soon Dal)***

Abstract

This study is concerned with the equilibrium bidding strategy and the optimal auction design of sequential auction with a reserve price and an entry fee. It is assumed that each bidder has a fixed reservation value and draws the reservation values of other bidders independently in the same distribution and may obtain at most one object to be sold. Under such assumptions, the sequential auction will be analyzed by the game theoretic approach.

The purpose of this paper is, in the sequential auction, to find the equilibrium bidding strategy and to design the optimal auction under the equilibrium bidding strategy. The equilibrium bidding strategy and the optimal auction design are further analyzed with respect to change of the reserve price, the entry fee, and the number of bidders and objects. Specially, the auctioneer's expected revenue for each auction is obtained and analyzed.

---

* 이 연구는 한국과학재단의 지원에 의한 것임.
** 전남대학교
*** 서울대학교

1. 서 론

동산이나 부동산등을 공개경쟁매매하는 행위를 흔히 경매(auction)라고 하는데, 경매방법에는 여러가지가 있다. 경매품목이 하나인 경우에도 공개입찰경매와 비밀입찰경매가 있고, 비밀입찰경매에도 낙찰자와 낙찰가를 결정하는 방법에 따라 다를 수 있다. 더우기 경매품목이 여러개인 경우에는 더욱 다양하여, 전품목을일시에 모두 경매하는 동시경매와 한 품목씩 연속적으로 경매하는 축차경매가 있을 수 있으며, 이들 경매에서도 낙찰자와 낙찰가를 결정하는 방법이나 비밀입찰 또는 공개입찰에 따라 여러가지가 있다. 이 연구에서는 경매품목이 동일다품목이고 비밀입찰경매로써 한 입찰자가 단지 한 품목만을 낙찰 받을 수 있으며 매 경매에서 최고입찰자가 낙찰자가 되고 낙찰자의 입찰가를 낙찰가로 하는 축차경매(sequential auction)에 관하여 다루고자 한다.

경매에 있어서 경매자는 수입면에서 가장 유리한 경매방법을 택하려 하고, 입찰자는 주어진 경매하에서 상대입찰자들에 대처하여 이익을 최대로 할 수 있는 입찰가를 결정하고자 할 것이다. 이렇게 경매는 경매자와 입찰자, 그리고 입찰자 상호간에 이해가 엇갈린다. 이러한 경매상항을 모형화하여 최적의 입찰가를 결정하는 입찰전략에 관한 연구는 1956년 Friedman[5]에서 비롯하여, 그후 많은 연구가 이루어졌는데, Stark와 Rothkopf[16]는 1976년까지의 경매 및 경쟁입찰에 관한 약500개의 연구를 소개하였고, Engelbrecht-Wiggans[4]는 1980년까지의 연구현황을 분석하였다.

경매의 수리적 접근방법은 크게 결정이론적인 것과 게임이론적인 것으로 나누어 볼 수 있다. 결정이론적 접근방법은 상대 입찰자의 과거 입찰가에 관한 정보에 의해 한 입찰자의 최적입찰전략을 구하는데 반하여, 게임이론적 접근방법은 평가액의 정보에 의해 모든 입찰자의 평형입찰전략을 구한다. 결정이론적 접근방법의 축차 경매에 관한 연구로는 Kortanek etal.[10]와 Attanasi[3]가 자원의 제약이 있는 경우에 관하여 다루었다. 게임이론적 접근방법으로는 Griesmer와 Shubik[7]이 두 입찰자의 평형입찰전략의 특성을 밝혔고, Ortega-Reichert[13]는 품목이 두개이고 앞 경매의 낙찰가가 다음 경매의 입찰가에 영향을 미치는 경우의 평형입찰전략을 구하였다. 또한 Engelbrecht-Wiggans와 Weber[5]는 품목의 가치가 단지 0, 1이고 두 입찰자의 정보가 비대칭(asymmetric)인 모형을 연구하였다. 이들의 연구[5, 7, 13]는 입찰자가 단지 두명인 경우인데, 입찰자가 n명인 경우에 관해서도 Oren과 Rothkopf[12]가 연구하였으나 상대입찰자의 다음 입찰전략을 반응함수로 국한하고 있다.

한편 Vickrey[17]는 입찰자가 한 품목만을 낙찰 받을 수 있는 축차경매를 연구하였으나 품목이 두개이고 평가액의 분포가 uniform분포인 경우의 평형입찰전략을 구하는데 그치고 있다.

최적경매설계에 관한 연구는 Riley와 Samuelson[14], Myerson[11]이 연구하였으나 단일품목인 경우에 한하고 있으며, 다품목 경매에서 동시경매와 축차경매의 경매자 수입비교에 관해서는 Hausch[8]가 연구

하였다.

金汝根과 朴淳達[1,2]은 경매품목이 동일 다품목이고 한 입찰자가 많아야 한 품목 낙찰 받을 수 있는 다품목 단일입찰경매(multiple unit aution)에 있어서 최저경매가와 참가비가 있는 동시경매(simultaneous auction)의 평형입찰전략과 입찰자기대이익에 관하여 연구[1]하였고, 또한 다품목 단일입찰경매의 최적경매설계와 전체낙찰자 기대이익[2]에 관해서도 연구하였다.

이 연구에서는 다품목 단일입찰경매에 있어서 매 경매에서 최고입찰자가 낙찰자가 되고 최고입찰가를 낙찰가로 하며 최저경매가와 참가비가 있는 축차경매(sequential auction)를 게임이론적 방법에 의하여 평형입찰전략을 구하고, 이를 분석하고자 한다. 그리고 더 나아가 평형입찰전략하에서의 최적경매를 설계하고 매 경매에서의 경매자 기대수입을 비교분석하고자 한다. 이 연구는 Vickrey[17]의 연구를 다품목이고 평가액이 일반분포를 따르는 경우로 확장하는 동시에, 최저경매가와 참가비가 있는 경매모형으로 확장하여 평형입찰전략을 구하고, 더 나아가 최저경매가와 참가비로써 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 최저경매설계를 하고자 한다. 다루고자 하는 축차경매에는 참가비, c와 최저경매가, m이 있고 입찰자는 사전에 참가비를 지불하여야 응찰할 수 있고 경매자는 최저경매가 보다 낮게 물품을 경매하지 않는다고 본다.

이 연구에서는 제2절에서 다루는 모형을 설명하고 제3절에서 평형입찰전략을 구하고 이를 분석한다. 제4절에서는 경매자의 기대수입과 기대이익을 구하고 최저경매가와 참가비에 의해 이들을 최대로 하는 최적경매를 설계하며 매 경매의 경매자 기대수입을 비교분석한다. 제5절은 예제를 보이고, 제6절은 결론으로 되어 있다.

2. 가 정

최저경매가, m과 참가비, c가 있는 축차경매를 분석하는데 다음과 같은 가정을 두기로 한다.

가정1. 경매자는 평가액이 ν_0인 ℓ개의 동일품목으로 n($>\ell$)명의 잠재입찰자를 상대하여 한 품목씩 연속적으로 경매하여, 입찰자는 서로 비협조적이며 낙찰자는 남은 경매에 응찰할 수 없다. 그리고 낙찰자는 매 경매의 최고입찰자이고 낙찰가는 낙찰자의 입찰가로 한다.

가정2. 입찰자 i, $i = 1, 2, \cdots, n$는 경매품목에 대하여 零이상의 고정된 평가액 $\nu_i \in [\underline{\nu}, \bar{\nu}]$를 갖는다. 각 입찰자는 모든 상대입찰자의 평가액분포함수를 $F(\nu)$로 본다. $F(\nu)$는 $F(\underline{\nu}) = 0$, $F(\bar{\nu}) = 1$인 연속적이고 미분가능한 증가함수이다. 그리고 $F'(\nu)$를 $f(\nu)$로 둔다.

가정3. k번째 경매에서 입찰자 i의 입찰가 $U_k(\nu_i)$, $k = 1, 2, \cdots, \ell$, $i = 1, 2, \cdots, n$은 각자의 입찰가 ν_i의 연속 미분가능한 단조증가함수이다.

가정 4. 입찰자는 기대이익이 零이상일때 응찰한다.

위의 가정들이 갖는 의미를 살펴 보기로 한다. 가정1.은 경매대상품목이 ℓ개이고 경매자는 고정된 평가액을 가지고 있으며, 응찰을 희망하는 입찰자는 n명이며 서로 결탁

이나 의사소통을 하지 않는다는 것이다. 가정2.는 각 입찰자가 경매 물품에 대하여 고정된 평가액을 가지며 모든 상대입찰자의 평가액은 하나의 같은 분포함수를 따른다고 보는 것이다. 이와 같이 모든 입찰자의 정보가 대칭인 경우를 대칭정보 (symmetric information)라 한다.

가정3.은 각 입찰자는 자신의 평가액에 의해 입찰가를 결정한다고 본다. 각 입찰자는 k번째 $k = 1, 2, \cdots, \ell$ 경매에서 하나의 같은 전략함수 $U_k(\nu_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$을 사용한다고 본다. $U_k(\nu_i)$가 증가함수라는 것은 평가액이 높을수록 높게 입찰한다는 것이다. 가정4.는 손해보면서 응찰하지 않는다는 것이다.

가정2.로부터 상대입찰자의 입찰가에 영향을 주는 상대입찰자의 평가액에 관하여 불완전정보 (incomplete information)를 갖는다. 위와 같은 가정아래서 경매상황을 불완전정보를 갖는 비협조게임(noncooperative game with incomplete information)으로 모형화 한다. 이 경매모형에서는 각 입찰자는 고정된 평가액을 가지고 있고, 낙찰자는 남은 경매에 응찰할 수 없다는 가정으로 부터, 경매가 진행되는 동안에 앞 경매의 낙찰가 공개여부에 상관없이, 각 입찰자는 평가액의 수정이 없고, 또한 앞 경매의 낙찰가는 다음 경매의 입찰전략에 영향을 주지 못한다. 즉 앞 경매의 낙찰가에 관한 정보의 흐름여부는 남은 경매의 입찰전략에 영향을 주지 못한다.

이러한 경매상황에서 모든 입찰자가 k번재 경매에서 입찰전략 $U_k(\nu_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$을 사용할 때 어떤 입찰자도 이 전략 이외의 전략으로 기대이익을 더 높일 수 없으면 이 전략을 평형입찰전략(equilibrium bidding strategy)이라고 한다. 각 입찰자에게 전략함수 $U_k(\nu_i)$, $k = 1, 2, \cdots, \ell$, $i = 1, 2, \cdots, n$의 평형입찰전략이 존재한다고 보며, 이 함수는 연속적이고 미분가능한 단조증가함수이므로 역함수가 존재하고, 이를 ϕ_k로 둔다. 이러한 가정아래서 축차경매의 평형입찰전략을 구하여 보자.

3. 평형입찰전략

입찰자 i, $i = 1, 2, \cdots, n$는 $(k-1)$번째 경매까지 낙찰되지 않으면 k번째 경매에서 b_k로 입찰한다고 하자. 이때 남은 상대입찰자는 평형입찰전략 $U_k(\nu_j)$, $j \neq i$를 사용한다고 본다. 그리고 k번째, $k = 1, 2, \cdots, \ell$ 경매에서 상대입찰자의 최고입찰가를 y_k라 두고, $(n-1)$명의 상대입찰자의 평가액을 작은 차례로 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1}$로 두자.

먼저 $b_1, b_2, \cdots, b_\ell$로 응찰할 때의 낙찰확률을 구하여 보자. 첫 경매에서 낙찰되려면 입찰가 b_1이 상대입찰자의 최고입찰가 y_1보다 커야 한다. 모든 상대입찰자는 연속적이고 단조증가함수인 평형입찰전략 $U_1(\nu_j)$, $j \neq i$를 사용한다는 가정에 의해서 낙찰확률은 $\phi_1(b_1)$이 x_{n-1}보다 클 확률과 같다. 즉,

$$P_1 = P_r[b_1 > y_1]$$
$$= P_r[\phi_1(b_1) > x_{n-1}] \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

로 된다. 첫 경매에서 b_1으로 응찰하여 낙찰되지 않고, 둘째 경매에서 b_2로 응찰하여 낙찰될 확률은 $b_1 < y_1$ 이고 $b_2 > y_2$ 일 확률과

같다. 이 확률은 $\phi_1(b_1) < x_{n-1}$이고 $\phi_2(b_2) > x_{n-2}$일 확률과 같다. 즉,

$$P_2 = P_r[b_1 < y_1, b_2 > y_2]$$

$$= P_r[\phi_1(b_1) < x_{n-1}, \phi_2(b_2) > x_{n-2}] \quad \cdots\cdots (2)$$

로 된다.

같은 방법으로 b_1, b_2, $\cdots b_k$로 응찰할 때, (k − 1)번째 경매까지 낙찰되지 않고 k번째 경매에서 낙찰될 확률은

$$P_k = P_r[b_k > y_k, b_{k-1} < y_{k-1}, \cdots, b_1 < y_1]$$

$$= P_r[\phi_k(b_k) > x_{n-k}, \phi_{k-1}(b_{k-1}) < x_{n-k+1}, \cdots, \phi_1(b_1) < x_{n-1}] \quad \cdots\cdots (3)$$

가 된다.

순서통계량 x_{n-k}, $x_{n-k+1}, \cdots, x_{n-1}$의 결합 확률밀도함수 (joint probability density function)는

$$r(x_{n-k}, x_{n-k+1}, \cdots, x_{n-1})$$

$$= [\prod_{i=1}^{k}(n-i)]F^{n-k-1}(x_{n-k})f(x_{n-k})f(x_{n-k+1})\cdots f(x_{n-1}) \quad \cdots\cdots (4)$$

로 된다(9). 그러므로

$$P_k = \int_{\phi_1(b_1)}^{\bar{V}} \int_{\phi_2(b_2)}^{x_{n-1}} \cdots$$

$$\int_{\phi_{k-2}(b_{k-2})}^{x_{n-k+3}} \int_{\phi_{k-1}(b_{k-1})}^{x_{n-k+2}} \int_{\underline{V}}^{\phi_k(b_k)} [\prod_{i=1}^{k}(n-i)]F^{n-k-1}(x_{n-k})$$

$$dF(x_{n-k+1})\,dF(x_{n-k+2})\cdots dF(x_{n-2})\,dF(x_{n-1})$$

$$= F^{n-k}(\phi_k(b_k))A_k \quad \cdots\cdots (5)$$

가 된다. 여기서

$$A_k = \int_{\phi_1(b_1)}^{\bar{V}} \int_{\phi_2(b_2)}^{x_{n-1}} \cdots \int_{\phi_{k-2}(b_{k-2})}^{x_{n-k+3}} \int_{\phi_{k-1}(b_{k-1})}^{x_{n-k+2}} [\prod_{i=1}^{k-1}(n-i)]$$

$$dF(x_{n-k+1})dF(x_{n-k+2})\cdots dF(x_{n-2})dF(x_{n-1}) \quad \cdots\cdots (6)$$

이다.

다음은 이 낙찰확률로부터 기대이익을 구하여 보자. 기호를 간단히 하기 위하여 입찰자 i의 평가액 ν_i를 ν로 둔다. 입찰자 i가 (k − 1)번째 경매까지 낙찰되지 않고 k번째 경매에서 낙찰되면 이익은 평가액에서 입찰가와 참가비를 뺀 $(\nu - b_k - c)$가 된다. 그러므로 입찰자 i가 b_k로 응찰할 때 k번째 경매의 기대이익은

$$(v - b_k - c)P_k \;,\; k = 1, 2, \cdots\cdots, \ell - 1$$

로 된다. 그런데 마지막 경매까지 낙찰되지 않으면 참가비 c만큼 손해이고 이 확률은 $(1 - \sum_{k=1}^{\ell} P_k)$이므로, 기대손해액은 $\sum_{k=1}^{\ell} P_k$가 된다. 그러므로 평가액이 ν인 입찰자 i가 $b_1, b_2, \cdots, b_\ell$로 응찰할 때 기대이익은

$$E = \sum_{k=1}^{l} (v - b_k - c)P_k - c[1 - \sum_{k=1}^{l} P_k]$$

$$= \sum_{k=1}^{l} (v - b_k)P_k - c \quad \cdots\cdots (7)$$

과 같이 표현된다.

다음은 응찰조건을 구하여 보자. 매 경매에서 최저경매가가 낙찰가로 될 때 기대이익이 零이 되는 평가액을 $\nu_* \in [\underline{\nu}, \bar{\nu}]$로 두자. 최저경매가로 낙찰되려면 입찰가가 최저경매가여야 하므로 $U_k(\nu_*) = m$, $k = 1, 2, \cdots, \ell$로 된다. 즉 $\phi_k(m) = \nu_*$, $k = 1, 2, \cdots, \ell$이므로 k번째 경매의 낙찰확률은 식(5)로부터

$$p_k = \binom{n-1}{n-k} F^{n-k}(v_*)(1 - F(v_*))^{k-1} \quad \cdots\cdots (8)$$

가 된다. ν_*는 매 경매에서 최저경매가로 입찰할 때 기대이익이 零이 되는 평가액이므로

$$(v_* - m)\sum_{k=1}^{l} \binom{n-1}{n-k} F^{n-k}(v_*)(1 - F(v_*))^{k-1} - c = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

을 만족해야 한다. 그리고

$$H(v_*) = \sum_{k=1}^{l} \binom{n-1}{n-k} F^{n-k}(v_*)(1 - F(v_*))^{k-1} \quad \cdots\cdots (10)$$

로 두면, 식(9)는

$$(v_* - m)H(v_*) - c = 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

가 된다. 식 (11)은 논문 [1]의 식 (5)와 같음을 알 수 있다. 가정4.로 부터 입찰자는 평가액이 ν_*이상일때 응찰할 것이다.

최저경매가와 참가비가 있는 축차경매의 평형입찰전략은 식 (7)의 기대이익과 식 (11)의 응찰조건을 이용하여 구하면 다음과 같다.

定理1. 최저경매가가 m이고 참가비가 c인 축차경매의 평형입찰전략은

$$u_k(v) = v - \sum_{j=n-l}^{n-k} \binom{n-k}{j} \Big[\int_{v_*}^{v} F^{j}(z)\{F(v)-F(z)\}^{n-k-j} dz + \frac{cF^{j}(v_*)}{H(v_*)}\{F(v)-F(v_*)\}^{n-k-j} \Big] / F^{n-k}(v), \quad \cdots\cdots (12)$$

$$v_* < v \leqq \bar{v},\ k = 1, 2, \cdots, \ell$$

이다.

證明. 부록 참조.

모든 입찰자는 대칭정보이고 하나의 같은 전략함수를 사용한다는 가정으로부터 입찰자 i, $i = 1, 2, \cdots, n$의 k 번째, $k = 1, 2, \cdots, \ell$ 경매의 평형입찰전략은 식 (11)의 $U_k(\nu_i)$이다.

경매단계(k), 입찰자수(n), 품목수(ℓ)와 최저경매가(m), 참가비(c)의 변화에 따른 평형입찰전략의 변화를 분석하여 보자. 식 (12)로부터 k번째, $k = 1, 2, \cdots, \ell$ 경매에서 평가액이 ν인 입찰자의 평형입찰전략은 평가액 보다

$$\int_{v_*}^{v} \Big[\sum_{j=n-l}^{n-k} \binom{n-k}{j} \Big(\frac{F(z)}{F(v)}\Big)^{j} \cdot \Big(1-\frac{F(z)}{F(v)}\Big)^{n-k-j}\Big] dz + c\Big[\sum_{j=n-l}^{n-k} \binom{n-k}{j} \Big(\frac{F(v_*)}{F(v)}\Big)^{j} \Big(1-\frac{F(v_*)}{F(v)}\Big)^{n-k-j}\Big] / H(v_*) \quad \cdots\cdots (13)$$

만큼 낮은 값이다. k가 커짐에 따라 식 (13)은 작아진다. 즉, 평형입찰전략은 첫 경매에서 입찰가를 낮게 하고 낙찰되지 않으면 점차 높게 하는 것이다.

다음은 입찰자수와 품목수에 따른 평형입찰전략의 변화를 알아보자. 참가비가 있을 때 입찰자수가 품목수에 비하여 많아지면, 즉 $n \to \infty$이면 식 (11)을 만족하는 ν_*는 $\bar{\nu}$에 가까운 입찰자이다. 이 경우에 $\nu_* \to \bar{\nu}$, $\nu \to \bar{\nu}$가 되어 식 (13)의 첫 항은 零에 접근하고, 둘째항은 $F(\nu_*) / F(\nu) \to 1$, $H(\nu_*) \to 1$이 되어 c에 접근한다. 그러므로 입찰자수가 많아지면 응찰자의 평형입찰전략은 $\nu \to c$가 된다. 품목수가 입찰자수에 접근하면, 즉 $\ell \to n$이면 식 (13)에서 첫째항과 둘째항의 [ ]는 1에 접근하고 $H(\nu_*) \to 1$가 된다. 그러므로 식 (13)은 $\nu - \nu_* + c$에 접근하게 되어, 평형입찰전략은 평가액에서 식 (13)을 빼면 ν_*는 c에 접근하게 된다. 그런데 $\ell \to n$이면 식 (11)에서 $H(\nu_*) \to 1$이 되어 $\nu_* \to m + c$가

된다. 따라서 품목수가 입찰자수에 접근하면 평형입찰전략은 m, 즉 최저경매가에 접근하게 된다.

다음은 최저경매가와 참가비의 변화에 따른 평형입찰전략의 변화를 보자. 참가비가 없는 경우, 식 (11)로 부터 $\nu_* = m$이 된다. 따라서 이 경우에 최저경매가가 평가액의 범위내에서 증가하게 되면, 식 (12)로 부터 매 경매의 평형입찰전략은 높아져 평가액에 접근한다. 또한 참가비가 있고 최저경매가가 없는 경우, 식 (11)로 부터 $c = \nu_* H(\nu_*)$가 되어, 평가액이 ν인 입찰자는 $c \leq \nu H(\nu)$이면 응찰하고 그렇지 않으면 응찰하지 않는 것이 평형입찰전략이다. 이 경우에 참가비가 많을수록, 즉 $c \to \nu H(\nu)$이면 평형입찰전략은 낮아져 零에 접근한다 최저경매가와 참가비가 있는 경우의 평형입찰전략은 최저경매가가 있으면 높아지고, 참가비가 있으면 낮아지므로 최저경매가와 참가비의 크기에 따라 이들이 없을 때보다 높거나 낮을 수 있다. 또한 최저경매가와 참가비가 높아져 응찰하는 최저의 평가액 ν_*가 ν에 접근하면 식 (11)과 (12)로 부터 $U_k(\nu) \to \nu - c/H(\nu)$, $k = 1, 2, \cdots, \ell$가 된다.

앞에서 언급한 평형입찰전략과 최저경매가, 참가비, 입찰자수, 품목수의 관계를 정리하면 다음 〈표 1〉과 같다.

〈표 1〉 축차경매의 평형입찰전략과 최저경매가, 참가비, 입찰자수, 품목수의 관계

(최저경매가, 참가비)

	(o, o)	(m, o)	(o, c)	(m, c)
응찰조건	$v \geqq m$	$v \geq m$	$vH(v) \geq c$	$v \geq v_*$
평형전략 $u_k(v)$	k가 클수록 $u_k(v)$ 증가	m이 클수록 $u_k(v)$ 증가	c가 클수록 $u_k(v)$ 감소	m, c에 의해 $u_k(v)$에 의해 또는 감소
$n \to \infty$	$u_k(v) \to v$	$u_k(v) \to v$	$u_k(v) \to c$	$u_k(v) \to v - c$
$\ell \to n$	$u_k(v) \to v$	$u_k(v) \to m$	$u_k(v) \to o$	$u_k(v) \to m$
$v_* \to v$	$u_k(v) \to v$	$u_k(v) \to v$	$u_k(v) \to v - \frac{c}{H(v)}$	$u_k(v) \to v - \frac{c}{H(v)}$

4. 최적경매설계

모든 입찰자가 축차경매에서 평형입찰 전략을 사용할 때, 경매자의 기대수입과 기대이익을 구하고 매 경매의 경매자기대수입을 비교 분석하며, 최저경매가와 참가비로써 이들을 최대로 하는 최적경매를 설계하고자 한다.

4.1 경매자기대수입과 기대이익

평형입찰전략하에서 경매자기대수입과 기대이익을 구하고 매 경매의 경매자기대수입을 비교 분석하기로 한다. 경매자기대수입은 모든 입찰자로부터 받은 기대수입을 의미하고, 경매자기대이익은 모든 입찰자로부터 받은 기대수입에서 경매된 품목에 대한 경매자의 기대평가액을 뺀 기대금액을 의미한다.

경매자기대수입과 기대이익을 구하기 위하여 먼저 함수를 정의하여 도자. 앞에서 언급했듯이 (n−1)명의 상대입찰자의 평가액을 가장 낮은 것부터 순서대로 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1}$로 두자. 이 때 x_{n-l}의 확률밀도함수 h(x)와 누적밀도함수 H(x)는

$$h(x) = \frac{(n-1)!}{(n-l-1)!\,(l-1)!} F^{n-l-1}(x)\{1-F(x)\}^{l-1} \cdot f(x),\quad \underline{v} \le x \le \overline{v} \quad \cdots\cdots (14)$$

와

$$H(x) = \sum_{j=n-l}^{n-1} \binom{n-1}{j} F^{j}(x)\{1-F(x)\}^{n-1-j},\quad \underline{v} \le x \ge \overline{v} \quad \cdots\cdots (15)$$

가 된다. (9)

다루고 있는 축차경매는 최적경매설계에 관한 金汝根과 朴淳達의 연구[2]에서 다루었던 경매모형의 범주에 속한다. 따라서 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 경매자의 기대수입과 기대이익은 다음 定理와 같이 된다.

定理2. 축차경매에서 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 경매자기대수입은

$$n\int_{v_*}^{\overline{v}} \{vf(v) + F(v) - 1\}\, H(v)\, dv \quad \cdots\cdots (16)$$

이고 경매자기기대이익은

$$nv_{\circ}\int_{\underline{v}}^{v_*} f(v)H(v)dv + n\int_{v_*}^{\overline{v}} \{vf(v) + F(v) - 1\}H(v)dv - \ell v_{\circ} \quad \cdots (17)$$

이다.

證明. 연구[2] 참조.

다음은 매 경매의 경매자기대수입에 대하여 알아보자. 먼저 평가액의 순서통계량 (order statistics)의 확률밀도함수와 누적밀도함수를 구하기로 한다. 각 입찰자의 평가액 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$을 가장 작은 순서로 나열하여 $\nu_{(1)} \le \nu_{(2)} \cdots \le \nu_{(n)}$으로 둔다. 평가액 ν_i, $i = 1, 2, \cdots, n$는 서로 독립이고 확률밀도함수 $f(\nu)$를 따르므로 $\nu_{(i)}$의 확률밀도함수 $g_i(\nu)$와 누적밀도함수 $G_i(\nu)$는

$$g_i(v) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F^{i-1}(v)\left[1-F(v)\right]^{n-i} f(v), \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

$$G_i(n) = \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} F^j(v)\left[1-F(v)\right]^{n-j}, \quad \cdots\cdots\cdots (19)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

가 된다.[9)]

평형입찰전략하에서 최저경매가와 참가비가 있는 경우와 없는 경우의 매 경매의 경매자기대수입의 변화는 다음 整理와 같다.

定理3. 축차경매의 평형입찰전략아래서 매 경매의 경매자기대수입은 최저경매가와 참가비가 있는 경우에는 경매가 진행됨에 따라 감소하나 최저경매가와 참가비가 없는 경우에는 매 경매에서 $(\ell+1)$번째 최고평가액의 기대값으로 일정하다.

證明. 모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 k번째, $k = 1, 2, \cdots, \ell$ 경매의 경매자기대수입은 가정3.으로부터 k번째 최고평가액, $u_{(n-k+1)}$을 가진 입찰자의 기대낙찰가가 된다. 그리고 가정4.로부터 평가액이 v_*이상인 입찰만이 응찰하므로 k번째 경매의 경매자기대수입, R_k는

$$R_k = \int_{v_*}^{\bar{v}} u_k(v) g_{n-k+1}(v)dv, \quad k = 1, 2, \cdots, \ell \quad \cdots\cdots\cdots (20)$$

가 된다.

식(20)에 평형입찰전략, 식(12)를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$R_k = \int_{v_*}^{\bar{v}} v g_{n-k+1}(v)dv - \int_{v_*}^{\bar{v}} \int_{v_*}^{v} g_{n-k+1}(v)dzdv$$
$$+ \int_{v_*}^{\bar{v}} \left[\int_{v_*}^{v} \sum_{j=0}^{n-l-1} \binom{n-k}{j} F^j(z)\left[F(v)-F(z)\right]^{n-k-j} dz\right]$$
$$\frac{g_{n-k+1}(v)}{F^{n-k}(v)} dv - \int_{v_*}^{\bar{v}} \sum_{j=n-l}^{n-k} \binom{n-k}{j} \frac{cF^j(v_*)}{H(v_*)} \left[F(v)-F(v_*)\right]^{n-k-j}$$
$$\frac{g_{n-k+1}(v)}{F^{n-k}(v)} dv \quad \cdots\cdots\cdots (21)$$

식(21)은 다음식의 관계를 이용하여 전개한 것이다.

$$\sum_{j=n-l}^{n-k} \binom{n-k}{j} F^j(z)\left[F(v)-F(z)\right]^{n-k-j}$$

$$= F^{n-k}(v) - \sum_{j=0}^{n-l-1} \binom{n-k}{j} F^{j}(z)\left[F(v) - F(z)\right]^{n-k-j} \quad \cdots\cdots (22)$$

식 (21) 의 첫째항과 둘째항을 정리하면 ,

$$v_{*}\int_{v_{*}}^{\overline{v}} g_{n-k+1}(v)dv$$

$$= v_{*}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}F^{j}(v_{*})(1-F(v_{*}))^{n-j} \quad \cdots\cdots (23)$$

로 된다. 식 (23) 은 식 (19) 로 부터 쉽게 유도 된다. 식 (18) 로부터 $g_{n-k+1}(v)$ 를 대입하고 이중적분의 성질을 이용하여 식 (21) 의 세째항을 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=0}^{n-l-1}\int_{v_{*}}^{\overline{v}}\int_{z}^{\overline{v}} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} \quad \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$\left[F(v)-F(z)\right]^{n-k-j}\left[1-F(v)\right]^{k-1} f(v)\,dv\,F^{j}(z)dz \quad \cdots\cdots (24)$$

식 (24) 의 안쪽적분은 부분적분을 반복하면

$$\binom{n}{j}\left[1-F(z)\right]^{n-j} \quad \cdots\cdots (25)$$

가 되어 식(24) 는 다음과 같이 된다.

$$\int_{v_{*}}^{\overline{v}}\left[\sum_{j=0}^{n-l-1}\binom{n}{j}\{1-F(z)\}^{n-j}F^{j}(z)\right]dz \quad \cdots\cdots (26)$$

식 (19) 로부터 식 (26) 의 [ ]는 $\{1-G_{n-l}(z)\}$ 가 되어 식 (26) 은

$$\int_{v_{*}}^{\overline{v}}\left[1-G_{n-l}(z)\right]dz \quad \cdots\cdots (27)$$

로 된다. 다음은 식 (21) 의 네째항을 정리한다. 식 (18) 로 부터 $g_{n-l+1}(v)$ 를 대입하고 부분적분을 이용하면

$$-\frac{c}{H(v_{*})}\sum_{j=n-l}^{n-k}\binom{n}{j}F^{j}(v_{*})(1-F(v_{*}))^{n-j} \quad \cdots\cdots (28)$$

가 된다. 그러므로 식 (21) 은 식 (23) , (27) , (28) 로부터

$$R_{k} = v_{*}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}F^{j}(v_{*})(1-F(v_{*}))^{n-j} + \int_{v_{*}}^{\overline{v}}(1-G_{n-l}(z))\,dz$$

$$-\frac{c}{H(v_{*})}\sum_{j=n-l}^{n-k}\binom{n}{j}F^{j}(v_{*})(1-F(v_{*}))^{n-j} \quad \cdots\cdots (29)$$

로 된다. 그런데 식 (11) 로부터 $c/H(v_*) = (v_* - m)$ 이 성립하여 식 (29) 의 우변 첫째항과 세째항은

$$v_* \sum_{j=0}^{n-l-1} \binom{n}{j} F^j(v_*)(1-F(v_*))^{n-j}$$
$$+ m \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} F^j(v_*)(1-F(v_*))^{n-j} \quad \cdots\cdots (30)$$

로 된다. 따라서 식 (21) 은 다음과 같이 된다.

$$R_k = v_*\left[1-G_{n-l}(v_*)\right] + \int_{v_*}^{\bar{v}}\left[1-G_{n-l}(z)\right]dz$$
$$+ m \sum_{j=n-l}^{n-k} \binom{n}{j} F^j(v_*)(1-F(v_*))^{n-j}, \quad k=1,2,\cdots,\ell \quad \cdots\cdots (31)$$

식(31)의 우변에서 첫째항과 둘째항은 k와 무관하고 세째항만 k가 커짐에 따라 R_k는 작아진다. 따라서 최저경매가와 참가비가 있는 경우에, 경매가 진행됨에 따라 매 경매의 경매자기대수입은 감소한다.

다음은 최저경매가와 참가비가 없는 경우의 매 경매의 경매자기대수입을 구하여 보자. 최저경매가와 참가비가 없으면, 즉 on = 0, c = 0이면, $\nu = \underline{\nu}$가 되고 $F(\underline{\nu}) = 0$, $G_{n-1}(\underline{\nu}) = 0$이므로 식(31)로부터

$$R_k = v + \int_{\underline{v}}^{\bar{v}}\{1-G_{n-l}(v)\}dv, \quad k=1,2,\cdots,\ell \quad \cdots\cdots (32)$$

가 된다. 그런데 $(\ell+1)$번째 최고평가액의 기대값은

$$\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} v g_{n-l}(v)dv = -\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} v\partial\left[1-G_{n-l}(v)\right]$$
$$= \underline{v} + \int_{\underline{v}}^{\bar{v}}\left[1-G_{n-l}(v)\right]dv \quad \cdots\cdots (33)$$

로 표현된다. 식(32)와 식(33)으로부터 최저경매와 참가비가 없는 경우 매 경매의 경매자기대수입은 $(\ell+1)$번째 최고평가액의 기대값으로 일정하다.

n명의 입찰자중에서 정확히 k명의 평가액이 ν 보다 클 확률은

$$\binom{n}{n-k} F^{n-k}(v_*)\{1-F(v_*)\}^k, \quad k=1,2,\cdots,\ell-1 \quad \cdots\cdots (34)$$

이다. 식(31)로부터 최저경매가와 참가비가 있는 경우에 k번째 경매의 경매자기대수입은 $(k+1)$번째 경매의 경매자기대수입보다 최저경매가에 식(34)를 곱한 것만큼 많다.

이것은 $(k+1)$번째 경매에서 평가액이 ν 이상인 입찰자가 남아 있을 확률이 k번째 경매보다 식(34)만큼 작기 때문에 $(k+1)$번째 경매에서 경매자기대수입의 감소량은 최저경매가에 식(34)를 곱한 것으로 된다.

최저경매가와 참가비가 없는 경우, 매경매의 경쟁자기대수입은 $(\ell+1)$번째 최고평가액의 기대값으로 일정하므로 다음 從定理가 성립된다.

從定理4. 최저경매가와 참가비가 없는 출차경매의 경매자기대수입은 $(\ell+1)$번째 최고평가액의 기대값에 경매 횟수, 즉 품목수 ℓ을 곱한 것이다.

4.2 최적경매설계

경매자는 자신에게 가장 유리한 경쟁방법을 입찰자에게 제시하려고 할 것이다. 이 때 경매자는 수입을 가장 높이려는 경우와 이익을 가장 높이려는 경우가 있을 수 있다. 이 절에서는 경매자의 수입이나 이익을 가장 높일 수 있는 최적경매를 최저경매가와 참가비로써 설계하고 분석하고자 한다.

定理2.로부터 경매자의 기대수입과 기대이익은 ν_*에 영향을 받는다. 이 ν_*는 식(11)의 최저경매가와 참가비에 의해 결정된다. 따라서 경매자 기대수입이나 기대이익을 최대로 하는 최저경매가와 참가비를 결정하기 위해서는 식(16)과 (17)을 최대로 하는 ν_*를 각각 결정하면 된다.

모든 입찰자가 평형입찰전략을 사용할 때 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 ν_*는 다음 定理와 같다.

定理5. 평형입찰전략아래서 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 ν_*를 각각 α, β로 두자. 그러면 α, β는

$$\alpha = \{1 - F(\alpha)\}/f(\alpha) \quad \cdots\cdots (35)$$

$$\beta = v_0 + \{1 - F(\beta)\}/f(\beta) \quad \cdots\cdots (36)$$

을 만족하는 값이다.

證明. 연구[2] 참조.

α, β가 구해지면 식 (11)로부터 경매자의 기대수입과 기대이익을 각각 초대로 하는 최저경매가와 참가비를 구할 수 있다. 이 최저경매가와 참가비는 유일하지 않고 여러 (m, c)雙이 존재한다. 예로써 참가비가 없으면 경매자기대이익을 최대로 하는 최저경매가는 $m = \beta$가 되고, 최저경매가가 없으면 최적의 참가비는 $c = \beta H(\ \ )$가 된다.

定理5.로부터 α, β는 입찰자수와 품목수에 상관없이 결정된다. 경매자기대수입이나 기대이익을 최대로 하는 최적경매를 설계할 때 최저경매가만을 도입하면 입찰자수와 품목수에 무관하고, 단지 평가액분포에 의해 결정됨을 알 수 있다. 그러나 참가비를 도입하면 $H(\alpha)$나 $H(\beta)$가 입찰자수 품목수, 평가액분포에 따라 결정되므로, 최적의 참가비는 이들에 의해 결정된다. 경매자는 최저경매가와 참가비 또는 최저경매가나 참가비중에서 어느 하나를 도입하는 최적의 경매설계를 하면 기대이익이 같으므로 입찰자수가 불명확할 때는 최저경매가만을 사용하는 것이 좋을 것이다.

경매자의 기대이익을 최대로 하는 β는 경매자기대수입을 최대로 하는 α보다 항상 높다. 경매자기대이익을 최대로 하는 경매설계에 있어서 최저평가액만을 도입하면, 이 최저경매가는 항상 경매자의 평가액, ν_0보다

높다는 것을 알 수 있다.

5. 예 제

경매자는 동일한 경매품목 3개를 한 품목씩 연속적으로 경매하려고 하며 응찰을 희망하는 입찰자는 4명이라고 하자. 그리고 한 입찰자는 한 품목이상 낙찰받을 수 없다고 하자.

평가액분포는 와이블분포이고 누적밀도함수를

$$F(v)=1-e^{-V^3}, \quad v \geqq 0 \qquad \cdots\cdots (37)$$

로 두고, 최저경매가와 참가비는 각각 0.6과 0.02로 두자. 그러면 응찰하는 최저의 평가액 ν 는 식(11)로부터 0.637이 되고, 입찰자의 평형입찰전략 $(U_1(\nu),\ U_2(\nu),\ U_3(\nu))$는 定理1.로부터 평가액이 0.8이면 (0.617, 0.619, 0.637)이고, 1.5이면 (0.661, 0.718, 0.876)이며, 1.8이면 (0.715, 0.799, 1.013)가 된다.

경매자는 경매품목의 평가액을 모두 0.6으로 평가하며 모든 입찰자의 평가액분포를 식(37)로 추정할 때 최적경매를 설계하여 보자. 定理2.와 定理5.로부터 ν_*가 0.693일 때 경매자기대수입이 1.906으로 최대가 되고 기대이익은 0.344가 된다. 또한 ν_*가 0.961일 때 기대이익이 0.591로 최대가 되며 이때 기대수입은 1.561이 된다. 최저경매가만으로 경매설계를 한다면 최저경매가를 0.961로 하면 0.693으로 할 때 보다 입찰자로부터 받는 기대수입은 0.345만큼 감소하나 기대이익 0.247만큼 증가한다.

6. 결 론

한 입찰자가 단지 한 품목만을 낙찰받을 수 있으며 최저경매가와 참가비가 있는 축차경매의 입찰전략과 경매설계에 관하여 다루었다.

평형입찰전략에 있어서는 응찰하여 낙찰되지 않으면 다음 입찰가는 전 입찰가보다 더 높게 되었다. 즉, 경매가 진행됨에 따라 각 입찰자의 평형입찰전략이 높아졌다. 또한 평형입찰전략은 최저경매가 높아지면 높아지고 참가비가 많아지면 낮아졌으며, 참가비가 없는 경우 최저경매가가 평가액의 범위내에서 증가하면 매 경매의 평형입찰전략은 높아져 평가액에 접근하였다. 그리고 최저경매가가 없는 경우 참가비가 많을수록 평형입찰전략은 낮아져 零에 접근하였다.

경매자의 기대수입과 기대이익을 구하였고, 또한 매 경매의 경매자 기대수입을 구하였다. 매 경매의 경매자 기대수입은 최저경매가와 참가비가 없으면 $(\ell+1)$번째 최고평가액의 기대값으로 매 경매에서 일정하였으나 최저경매가와 참가비가 있으면 경매가 진행됨에 따라 감소하였다.

최적경매설계에 있어서는 적절한 최저경매가와 참가비를 선택함으로써 경매자의 기대수입과 기대이익을 높일 수 있었다. 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 최저경매가와 참가비는 유일하게 존재하지 않는다. 경매자의 기대수입과 기대이익을 최대로 하는 참가비는 입찰자수와 품목수에 영향을 받으나 최저경매가는 이것들에 영향을 받지 않았다. 그리고 참가비가 없을 때 경매자 기대이익을 최대로 하는 최저경매가는 항상 경매자의 경매품목에 대한 평가액보다 높았다.

이러한 연구결과들은 입찰자가 경매에 관

련된 상대입찰자의 정보를 정확히 알 수 없고 평가액을 추정하여 입찰전략을 결정하려고 할 때나, 경매자가 적정한 최저경매가나 참가비를 선택하여 수입이나 이익을 올리려고 할 때 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

參考文獻

1. 김여근, 박순달, "다품목단일입찰 동시경매의 평형입찰전략과 기대이익", 한국경영과학회지, 제11권 제2호, pp. 27-36, 1986.10.
2. 김여근, 박순달, "다품목 단일입찰경매의 최적경매설계와 전체낙찰자 기대이익", 대한산업공학회지, 제13권 제1호, pp.31-38, 1986.6.
3. Attanasi, E.D, "Some Interpretations of Sequential Bid Pricing Strategies". Management Science, Vol.20, pp.1424-1427, 1974.
4. Engelbrecht-Wiggans, R., "Auctions and Bidding Models : A Survey". Management Science, Vol. 26, pp.119-142, 1980.
5. Engelbrecht-Wiggans, R. and R.J. Weber, "A Sequential Auction Involving Asymmetrically-Informed Bidders". International Journal of Game Theory, Vol.12, pp.123-127, 1983
6. Friedman, L., "A Competitive Bidding Strategy". Operations Research, Vol.4, pp.104-112, 1956.
7. Griesmer, J.H. and M.Schubik. "Toward a Study of Bidding Processes, II". Naval Reserch Logistice Quarterly. Vol.10, pp. 151-173, 1963.
8. Ausch, D.B., "Multi-Object Auctions : Sequential VS. Simultaneous Sales.", Management Science, Vol. 32, No2, pp.1599-1610, 1986.
9. Kendall, M.G. and A.Stuart, "The Advanced Theory of Statistics.", Hafner Publishing Company, New York, pp.325-326, 1969.
10. Kortanek, K.O., J.v.Soden, and D. Sodaro, "Profit Analysis and Sequential Bid Pricing Models.", Management Science, Vol.20, pp. 397-417, 1973.
11. Myerson, R.B., "Optimal Auction Design.", Mathematics of Operations Research, Vol.6, pp.58-73, 1981. vv.
12. Oren, S.S. and M.H.Rothkoph, "Optimal Bidding in Sequential Auction", Operations Research, Vol, pp.1080-1090, 1975.
13. Ortega-Reichert, A., "Models for Competitive Bidding under Uncertainty", Ph.D.dissertation, Dep. of Industrial Engineering Stanford University, Stanford, Calif., 1968.
14. Riley, j. and W.Samuelson, "Optimal Auctions", American Economic Review, Vol.71, pp.381-392, 1981.

15. Rothkoph, M.H., "An Addendum to 'A Model of Rational Competitive Bidding'", Management Sceince, Vol.17, pp.774−777, 1971.

16. Stark, R.M. and M.H.Rothkoph, "Competitive Bidding : A Competitive Bibligrapy", Operations Research, Vol.27, pp.364−390, 1979.

17. Vickrey, W., "Counterspeculation, Auction, and Competitive Sealed Tenders", Journal of Finance, Vol. 16, pp.8−37, 1961.

부 록

定理 1. 의 證明 평가액이 v_*보다 낮으면 기대이익이 陰이 되어 응찰하지 않는 것이 평형입찰전략이다. 평가액이 v_*보다 클 때, 기대이익 E를 최대로 하는 매 경매의 입찰전략을 b_k^*, $k = 1, 2, \cdots, \ell$로 두자. b_k^*가 E를 최대로 하기 위한 필요조건은,

$$\frac{\partial E}{\partial b_k}\Big|_{b_j = b_j^*,\ j=1,2,\cdots,\ell} = 0,\ k = 1,2,\cdots,\ell \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.1)$$

이다.

$\frac{\partial E}{\partial b_k} = 0$, $k=1,2,\cdots,\ell$은 P_k, P_{k+1}, $\cdots$, P_ℓ이 b_k의 함수이므로 b_{k+1}, b_{k+2}, $\cdots$ b_ℓ에 의해 b_k가 결정된다. 따라서 $\frac{\partial E}{\partial b_\ell} = 0$은 P_ℓ만의 함수이므로 b_ℓ^*부터 역으로 수학적 귀납법에 의하여 구한다. 수식의 편의를 위하여 $S_k = (v - b_k) P_k$로 두면,

$$E = \sum_{k=1}^{\ell} S_k - c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.2)$$

와 같이 표현된다. S_1, S_2, $\cdots$, $S_{\ell-1}$은 b_ℓ의 함수가 아니므로 $\frac{\partial S_i}{\partial b_\ell} = 0$, $i = 1,2,\cdots,\ell-1$, $\cdots$, $\frac{\partial C}{\partial b_\ell} = 0$이 되어

$$\frac{\partial E}{\partial b_\ell} = \frac{\partial S_\ell}{\partial b_\ell} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.3)$$

가 성립한다.

식 (5)와 (7)로 부터

$$\frac{\partial S_\ell}{\partial b_\ell}\Big|_{b_j = b_j^*,\ j=1,2,\cdots,\ell}$$

$$= -F^{n-\ell}(\phi_\ell(b_\ell^*))A_\ell^* + (v - b_\ell^*)(n-\ell)F^{n-\ell-1}$$

$$(\phi_\ell(b_\ell^*))f(\phi_\ell(b_\ell^*)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.4)$$

가 된다. 여기서 A_ℓ^*는 식(5)의 A_ℓ에서 $\phi_j(b_j) = \phi_j(b_j^*)$, $j = 1,2,\cdots,\ell-1$이다. $A_\ell^* > 0$이므로

$$-F^{n-\ell}(\phi_\ell(b_\ell^*)) + (v - b_\ell^*)(n-\ell)$$

$$F^{n-\ell-1}(\phi_\ell(b_\ell^*))f(\phi_\ell(b_\ell^*))\phi_\ell{}'(b_\ell^*) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.5)$$

가 된다. 식(A.5)로 부터 b_l^*가 결정된다. 모든 입찰자가 하나의 같은 전략함수를 사용한다는 가정으로 부터 (가정 3. 참조), $b_l^* = U_l(v)$가 된다. ϕ_k는 U_k의 역함수이므로

$$\phi_k(U_{k(v)}) = v, \quad k = 1, 2, \cdots, \ell \qquad \cdots\cdots (A.6)$$

과

$$\phi_k'(U_k(v)) = 1/U'_{k(v)}, \quad k = 1, 2, \cdots, \ell \qquad \cdots\cdots (A.7)$$

의 관계가 성립한다. 식(A.5)에 b_l^* 대신 $U_{l(v)}$를 대입하고, 식(A.6)과 (A.7)의 관계를 이용하여 정리하면

$$-U_l'(v)F^{n-l}(v) + (v - U_l(v)(n - \ell)\, F^{n-l-1}(v)f(v) = 0 \qquad \cdots\cdots (A.8)$$

가 되어

$$\frac{\partial\{U_l(v)F^{n-l}(v)\}}{\partial v} = \frac{v\partial F^{n-l}(v)}{\partial v} \qquad \cdots\cdots (A.9)$$

로 변환된다. 양변을 적분하여 미분방 정식을 풀면

$$U_l(v)F^{n-l}(v) = U_l(v_*)F^{n-l}(v_*) + \int_{v_*}^{v} z\partial F^{n-l}(z), \quad v_* < v \leq v \qquad \cdots\cdots (A.10)$$

가 된다.

최저경매가는 매 경매에서 응찰할 수 있는 최저의 입찰가이므로 식(11)로 부터

$$U_k(v_*) = v_* - \frac{c}{H(v_*)}, \quad k = 1, 2, \cdots, \ell \qquad \cdots\cdots (A.11)$$

가 된다. 식(A.10)에 식(A.11)을 대입하고, 식(A.11)의 우변 둘째항을 부분적분을 이용하여 풀면

$$U_l(v) = v - \left[\int_{v_*}^{v} F^{n-l}(z)dz + \frac{cF^{n-l}(v_*)}{H(v_*)}\right] / F^{n-l}(v)$$

$$v_* < v \leq \bar{v} \qquad \cdots\cdots (A.12)$$

를 얻는다. 그러므로 $k = \ell$일 때 성립한다.

다음은 k번째 경매의 평형전략을 구한다. ℓ번째 경매부터 (k+1) 번째 경매까지 정리1이 성립하였다 하자.

$\frac{\partial E}{\partial b_k}$ 를 구한다. 그런데 $S_1, S_2, \cdots, S_{k-1}$은 b_k의 함수가 아니므로 $\frac{\partial S_i}{\partial b_k} = 0$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$, $\frac{\partial_c}{\partial b_k} = 0$가 되어

$$\frac{\partial E}{\partial b_k} = \sum_{i=k}^{l} \frac{\partial S_i}{\partial b_k} \qquad \cdots\cdots (A.13)$$

가 성립한다. 식(5)와 (7)로 부터

$$\frac{\partial S_k}{\partial b_k} = \Big[-F^{n-k}(\phi_k(b_k)) + (v - b_k)(n-k)F^{n-k-1} (\phi_k(b_k))f(\phi_k(b_k))\phi'_k(b_k)\Big]A_k \qquad \cdots\cdots (A.14)$$

로 된다. 다음은 $\frac{\partial S_{k+1}}{\partial b_k}$ 을 구하면

$$\frac{\partial S_{k+1}}{\partial b_k} = (v - b_{k+1})\frac{\partial P_{k+1}}{\partial b_k} \qquad \cdots\cdots (A.15)$$

가 되어, 식(5)로 부터

$$\frac{\partial P_{k+1}}{\partial b_k} = -(n-k)F^{n-k-1}(\phi_{k+1}(b_{k+1}))f(\phi_k(b_k))\phi_k'(b_k)A_k \qquad \cdots\cdots (A.16)$$

가 된다. 다음은

$$\frac{\partial S_{k+2}}{\partial b_k} = (v - b_{k+2})\frac{\partial P_{k+2}}{\partial b_k}$$

을 구한다. 식 (5)로 부터

$$\frac{\partial P_{k+2}}{\partial b_k} = -(n-k)(n-k-1)F^{n-k-2}(\phi_{k+2}(b_{k+2}))\Big[F(\phi_k(b_k)) - F(\phi_{k+1}(b_{k+1}))\Big]f(\phi_k(b_k))\phi_k'(b_k)A_k \qquad \cdots\cdots (A.17)$$

가 된다. 같은 방법으로

$\frac{\partial S_i}{\partial b_k}$, $i = k+3, \cdots, \ell$을 구한다.

그런데 지금까지 구한 b_i^* , $i=k+1,\cdots,\ell$은 식(A.6)으로 부터

$$\phi_i(b_i^*)=v,\ i=k+1,\cdots,\ell$$

가 성립하므로 식(A.17)로 부터

$$\frac{\partial P_{k+2}}{\partial b_k}\Big|\ b_j=b_j^*,\quad j=1,2,\cdots,\ell \ = 0$$

가 된다. 같은 방법으로

$$\frac{\partial P_i}{\partial b_k}\Big|\ b_j=b_j^*,\quad j=1,2,\cdots,\ell \ =0,\ i=k+2,\cdots,\ell \quad \cdots\cdots\cdots (A.18)$$

가 되어 b_k^*가 평형전략이 되기 위한 필요조건은

$$\frac{\partial E}{\partial b_k}\Big|\ b_j=b_j^*,\ j=1,2,\cdots,\ell \ = \frac{\partial[S_k+S_{k+1}]}{\partial b_k}\Big|$$

$$b_j=b_j^*,\quad j=1,2,\cdots,\ell \ =0 \quad \cdots\cdots\cdots (A.19)$$

로 된다. 식(A.14), (A.15), (A.16)으로 부터 $A_k^*>0$이므로

$$-F^{n-k}(\phi_k(b_k^*))+(v-b_k^*)(n-k)F^{n-k-1}(\phi_k(b_k^*))f(\phi_k(b_k^*))\phi_k'(b_k^*)$$
$$-(v-b_{k+1}^*)(n-k)F^{n-k-1}(\phi_{k+1}(b_{k+1}))f(\phi_k(b_k^*))\phi_k'(b_k^*)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots (A.20)$$

가 된다. 가정3.에 의해 $b_k^*=U_k(v)$가 된다. 식(A.6)과 식(A.7)의 관계를 이용하여 식(A.20)을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$-U_k'(v)F^{n-k}(v)+(v-U_k(v)(n-k)F^{n-k-1}(v)f(v)$$
$$-(v-U_{k+1}(v))(n-k)F^{n-k-1}(v)f(v)=0 \quad \cdots\cdots\cdots (A.21)$$

식 (12)의 $U_{k+1}(v)$를 식(A.21)에 대입하면

$$-U_k'(v)F^{n-k}(v)+(v-U_k(v))(n-k)F^{n-k-1}(v)f(v)$$
$$-\sum_{j=n-1}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{j}\left[\int_{v*}^{v}F^j(z)\left[F(v)-F(z)\right]^{n-k-1-j}dz\right.$$

$$+\frac{cF^{j}(v_*)}{H(v_*)}\left[F(v)-F(v_*)\right]^{n-k-1-i}\Big](n-k)f(v)=0$$

이 되어 다음과 같이 변환한다.

$$\frac{\partial\{U_k(v)F^{n-k}(v)\}}{\partial v}=v\frac{\partial F^{n-k}(v)}{\partial v}$$

$$-\sum_{j=n-l}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{j}\Big[\int_{v*}^{v}F^{j}(z)\left[F(v)-F(z)\right]^{n-k-1-i}dz$$

$$+\frac{cF^{j}(v_*)}{H(v_*)}\left[F(v)-F(v_*)\right]^{n-k-1-j}\Big](n-k)f(v) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(A.22)$$

식 (A.22)에서 v를 매개변수 x로 두고 x에 대해 v_*로부터 v까지 양변을 적분하면

$$U_k(v)F^{n-k}(v)=U_k(v_*)F^{n-k}(v_*)+\int_{v*}^{v}x\,dF^{n-k}(x)$$

$$-\sum_{j=m-l}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{j}\int_{v*}^{v}\Big[\int_{v}^{x}F^{j}(z)(F(x)-F(z))^{n-k-1-j}dz$$

$$+\frac{cF^{j}(v_*)}{H(v_*)}(F(x)-F(v_*))^{n-k-1-j}\Big](n-k)f(x)\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(A.23)$$

가 된다. 식 (A.23)의 우변 둘째항에서

$$\int_{v*}^{v}\int_{v*}^{x}F^{j}(z)(F(x)-F(z))^{n-k-1-j}dz(n-k)f(x)dx$$

$$=\frac{(n-k)}{(n-k-j)}\int_{v*}^{v}\int_{z}^{v}\frac{\partial(F(x)-F(z))^{n-k-j}}{\partial x}d_xF^{j}(z)\,dz$$

$$=\frac{(n-k)}{(n-k-j)}\int_{v*}^{v}(F(v)-F(z))^{n-k-j}F^{j}(z)\,dz$$

가 되고 식 (A.11)의 $U_k(v_*)$를 대입하여 식 (A.23)을 정리하면 식 (12)를 얻는다. 그러므로 k번째 경매에서 성립한다.

b_i^*가 $U_i(v)$일 때 기대이익을 최대로 함은 연구 [1]의 정리 1. 에서 증명되었다.