韓國 軍事運營分析 學會誌
第 14 卷 第 1 號, 1988. 6.

다목적 선형계획 문제의 특성에 관한 소고

박 순 달*
소 영 섭*

Abstract

In Multiple Objective Linear Programming (MOLP), it is well known that efficient solution and weight are correspondent to each other.

The purpose of this paper is to study relationships between efficient face and the region of weight in MOLP. It is shown that the regions of weights corresponding *to two efficient extreme points are also neighbor* if two efficient extreme points are neighbor each other, and that the set of the efficient solutions corresponding to the common part of weight regions is efficient face. Using the above, we present a method to find the efficient solutions corresponding to a given weight and vice versa.

1. 서 론

의사결정의 과학적 접근 방법으로 경영과학이 도입된 이후, 산업 분야 및 공공분야에서 다양한 제 문제들을 해결하기 위하여 많은 기법들이 연구, 개발, 적용되어왔다. 이러한 기법들은 대부분 하나의 목적함수를 정식화하고 주어진 제약조건하에서 그 목적함수를 최적화하는 것이었다. 그러나 근래에 들어 문제를 분석하고 해결하려는 과정에서 다수의 목적함수를 동시에 고려해야할 필요성이 증대되었다. 이와같이 목적함수가 여러개 고려되는 문제를 해결하기 위한 기법으로 다목적 계획법이 개발되었으며 이중 선형계획 분야를 다목적 선형계획법(MOLP)라 부른다. 다목적 선형계획법은 동일한 선형 제약식에 다수의 선형 목적함수가 있어 이를 동시에 최적화하는 문제로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Max } Z(X) = [Z_1(X), Z_2(X), \cdots, Z_k(X)] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{s.t. } A \cdot X \leq b, \ X \geq 0$$

* 서울대학교

이러한 다목적 선형계획법의 해는 일반적으로 유일한 최적해가 존재하지 않으며 어느 한 목적함수를 최적화한 것이 가장 좋은 해라고 볼 수 없기 때문에 다목적 선형계획법의 해는 그것보다 더 나은 해가 존재하지 않는다는 의미를 갖게 되며 이를 유효해라 부른다. 따라서 유효해는 다음과 같이 정의된다.

정의 1 : 다목적 선형계획법에서 다음의 조건을 만족하는 해 X^0를 유효해라 한다.

1) X^0, $X^* \leq S$ (단 $S = \{X \mid A \cdot X \leq b, X \geq 0\}$)

2) $Z_i(X^*) \geq Z_i(X^0)$ $\forall i$ 이며, $Z_k(X^*) > Z_k(X^0)$인 k가 존재하지 않음.

그동안 다목적 선형계획 문제의 유효해를 구하는 많은 기법들이 Philip[11], Evans[6] Isermann[9], Ecker and Kouada[4] 등에 의해 발표되었으며 Ecker and Kouada[5], Gal[7], Zeleny[12] 등이 유효면을 구하는 방법을 발표하였다.

본 논문에서는 다목적 선형계획법의 특성을 정리하고 유효정점 및 유효면과 각 목적함수의 중요도를 나타내는 가중치와의 관계를 규명하고자 한다.

다목적 선형계획법의 유효해는 다음의 몇 가지 정리들이 성립한다.

정리1. 가능해 $X^0(X^0 \in S)$가 유효해일 필요 충분조건은

$$\begin{aligned} &\text{Max } e \cdot Y \quad (e > 0) \\ &\text{s.t. } A \cdot X \leq b \\ &\quad -C \cdot X + Y = -C \cdot X^0 \\ &\quad X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

에서 $e \cdot Y^* = 0$인 최적해를 갖는 것이다. [1]

이는 유효해의 정의에 의해 증명된다. 만일 $e \cdot Y^* > 0$ 인 최적해가 존재한다면 $C \cdot X > C \cdot X^0$ 인 X가 존재하게 되어 정의에 의해 유효해가 되지 못한다.

정리2. 가능해 $X^0 \in S$가 유효해일 필요 충분조건은

$$\begin{aligned} &\text{Min } (U \cdot b - W \cdot C \cdot X^0) \\ &\text{s.t. } U \cdot A - W \cdot C \geq 0 \quad U \geq 0, \\ &\quad W \geqq e > 0 \end{aligned}$$

에서 $U \cdot b - W \cdot C \cdot X^0 = 0$인 최적해 U, W가 존재한다.[1]

이는 명백하다. 왜냐하면 정리 2는 정리1의 쌍대문제이기 때문이다. 정리 1과 정리 2는 하나의 가능 정점해가 유효해인지를 확인할 때 사용되어 진다.

정리3. 가능해 $X^0 \in S$가 유효해일 필요 충분조건은 $W(>0) \in R^k$가 존재하여 모든 가능해 X에 대하여 $W \cdot C \cdot X^0 \geq W \cdot C \cdot X$가 성립하는 것이다.

증명) 정리 1과 정리 2의 결과를 이용하면 된다.[1](p 438)

이상은 가능해 X^0가 유효해가 되기 위한 필요 충분조건에 대한 정리들이었다.

한편 Cohon[3]은 Kuhn-Tucker 조건을 이용하여 유효해가 되기 위한 조건을 제시하였다. 임의의 가능해 X^*가 유효해가 되기 위해서는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$A \cdot X^* \leq b, \quad X^* \geq 0 \qquad (2.1)$$

$$U_i(A_i . X^* - b_i) = 0$$
$$i = 1, \cdots, m \qquad (2.2) \qquad (2)$$

$$\Sigma W_k C^k_j - \Sigma U_i . A_{ij} \geq 0$$

$$j = 1, \cdots, n \qquad (2.3)$$

$$U_i \geq 0, \; W_k > 0 \qquad (2.4)$$

여기서 (2.1)은 가능해의 조건을, (2.2)는 상보여유 정리를 만족하며, (2.3)은 선형계획법의 최적 조건에 대응하는 다목적 선형계획법의 유효조건이 되고, (2.4)는 Kuhn-Tucker 조건이 필요 충분조건이 되기 위한 것이다. [1], [3]

2. 유효해와 가중치와의 관계

앞장에서는 다목적 선형계획 문제의 유효해에 대한 기본 정리를 알아보았다. 여기서는 유효정점과 유효면 그리고 이에 대응하는 가중치와의 관계를 살펴보자.

이때 가중치라 함은 각 목적함수의 상대적 중요도를 의미한다. 초기 다목적 선형계획 문제의 해법은 주로 유효 정점해를 구하는 것이었다. 즉, 선형 계획법을 이용하여 제약조건 $A \cdot X \leq b$, $X \geq 0$을 만족하는 볼록 다면체(Convex Polyhedral Set)의 정점들을 구하여 이 점이 유효해 인지를 판정하여 해를 구하는 방법을 사용하였다. 그후 Zeleny [12]는 유효해가 꼭 정점에 위치하지 않을 수도 있다는데 착안하여 볼록 다면체의 면(face)의 개념을 이용하여 유효면을 구하는 방법을 제시하였다. 즉 식(1)의 제약 조건을 만족하는 볼록 다면체를 $S = \{X \in R^n \mid A' X \leq b'$, 단 A'는 비음 조건을 포함한 $(m+n) \cdot n$ 행렬$\}$이라 하고, $F(I) = \{X \in S \mid A'_i X = b'_i$, i I, 단 I는 $I \subseteq M = \{1, \cdots, m, m+1, \cdots, m+n\}$인 행 index 집합$\}$이라 할 때, $F(I) \neq \phi$ 이면 이 $F(I)$는 볼록 다면체 S의 면(face)이 된다. 이때 집합 I의 원소 갯수를 r이라 하면, $r > n$이면 $F(I) = \phi$이 되고, $r = n$이고 $F(I) \neq \phi$ 이면 $F(I)$는 정점이 되며, $r < n$이고 $F(I) \neq \phi$ 이면 $F(I)$는 $(n-r)$차원의 면이 된다. 이때 $F'(I) \neq \phi$이고 면 $F'(I)$의 임의의 내점을 X^0라 할때 X^0가 유효해지면 면 $F'(I)$를 유효면이라 하였으며 전체 유효해의 집합 N은 $N = U_I F'(I)$로 구하였다. 본 논문에서는 이 Zeleny의 개념을 사용하여 유효정점과 유효면을 다음과 같이 정의한다.

정의2 : 제약 조건을 만족하는 볼록 다면체의 정점이 유효해 조건을 만족하면 이를 유효 정점이라고 하며, 볼록 다면체의 한 면에서 그 면의 내점이 유효해 조건을 만족하면 이를 유효면이라 한다.

한편 Ecker and Kouada[5]는 Isermann [9]의 개념을 이용하여 유효면을 구하는 방법을 제시하였다. 즉 볼록 다면체에서 하나의 면(face)은 볼록 다면체를 이루는 몇개의 정점들의 볼록 결합으로 이루어지므로 한 면을 이루는 모든 정점들이 유효정점이 되면 이 면을 유효면이라 하고 하나의 정점에서 시작하여 다른 이웃정점들을 찾아가며 유효해 여부를 판정하고 유효면을 구하는 방법을 제시하였다. 그러나 볼록 다면체에서 면의 내점을 X^0, 그 면을 이루는 정점들을 X_{Bi} $(i = 1, \cdots, \ell)$이라 할 때 $X^0 = \Sigma \lambda_i X_{Bi}$, $\lambda_i > 0$, $\Sigma \lambda_i = 1$로 표시되기 때문에 내점의 유효해 조건이나 면을 이루는 모든 정점의 유효해 조건이나 동일하다.

이제 앞에서 정의한 다목적 선형계획법의 유효해와 가중치와의 관계를 살펴보자.

먼저 유효 정점과 가중치(W)와의 관계를 보

면 정리 3에 의해 유효 정점에 대응하는 가중치가 반드시 존재한다. 한편 식 (2)의 Kuhn−Tucker 조건을 고려하면 유효정점에 대응하는 가중치는 하나의 점으로 유일하게 대응되지 않는 경우도 있음을 알 수 있다. 즉 다목적 선형 계획법에서 임의의 가능 정점을 X_B라 할 때, 이 X_B가 유효 정점이면 X_B에 대해 식 (2)가 성립되어야 한다. 그런데 식 (2.3)은 임의의 W에 대해 성립해야 하므로 $\{W \in R^k \mid \Sigma W_k C^k_j - \Sigma U_i A_{ij} \leq 0 \ \forall j\}$를 만족하는 W가 존재한다.

그리고 $W^0 \in \{\Sigma W_k C^k_j - \Sigma U_i A_{ij} \leq 0 \forall j\}$이고 이에 대응하는 유효정점이 X_B이면 정리 3에 의해 $\{\text{Max } W^0 CX \mid AX \leq b,\ X \geq 0\}$의 선형계획 문제는 X_B에서 최적해를 갖는다. 그러므로 선형계획법의 최적 조건에 의하여 $\{\Sigma W^0_k C^k_j - \Sigma U_i A_{ij} = 0,\ j \in X_B$의 기저변수$\}$의 식이 성립한다. 이상에서 유효정점 X_B가 주어지면 이에 대응하는 가중치 W는 아래의 식 (3)을 만족해야 하며, 이는 식에서 알 수 있듯이 유일한

$$\Sigma W_k C^k_j - \Sigma U_i A_{ij} \begin{cases} = 0, & j \in X_B\text{의 기저 변수} \\ \leq 0 & j \in X_B\text{의 비기저변수} \end{cases} \quad (3)$$

점이 아닌 범위가 될 수도 있다. 따라서 이를 다음과 같이 정의한다.

정의3 : 유효정점 X_B에 대하여 식 (3)을 만족하는 W의 집합을 유효정점 X_B에 대응하는 가중치 영역이라고 한다.

한편 유효정점들과 대응하는 가중치 영역들과는 다음의 정리가 성립한다.

정리4. 유효정점이 서로 이웃이면 이에 대응하는 가중치 영역도 서로 이웃이다.

증명) 유효정점을 X_{B1}, X_{B2}라 하고 이에 대응하는 가중치 영역을 W^1, W^2라 하면 정리 3에 의하여 X_{B1}은 $\{\text{Max } WCX \mid AX \leq b,\ X \geq 0,\ W \in W^1\}$의 선형계획 문제의 최적해가 되고 X_{B2}는 $\{\text{Max } WCX \mid AX \leq b,\ X \geq 0,\ W \in W^2\}$의 선형계획 문제의 최적해가 된다. 그런데 위 두개의 식은 W를 목적함수 계수에 대한 다매개 변수로 놓고 $\{\text{Max } WCX \mid AX \leq b,\ X \geq 0\}$의 다매개 변수 분석 과정에서 나타나는 식과 동일하다. 목적함수의 다매개 변수 분석에서 두 정점 X_{B1}, X_{B2}가 서로 이웃이면 이에 대응하는 다매개 변수의 영역 W^1, W^2도 서로 이웃이 된다. 따라서 유효정점이 서로 이웃이면 이에 대응하는 가중치의 영역도 서로 이웃이다. ■

그리고 앞의 정의 3에 의하면 유효 정점에 대응하는 가중치의 영역은 몇 개의 제약조건으로 이루어지는데, 이렇게 몇 개의 제약조건으로 이루어지는 영역들 중에 두개의 영역이 서로 이웃한다는 것은 두 개의 영역에 양쪽의 조건을 모두 만족하는 공통 영역이 존재하며 이 공통영역을 중심으로 두 개의 영역을 서로 반대 공간에 위치하게 된다.[1] 따라서 가중치의 영역도 서로 이웃이면 공통영역이 존재하게 되는데 이 공통영역에 대하여 다음의 정리가 성립한다.

정리5. 이웃한 가중치 영역 W^1, W^2가 있을때 이 두 영역의 공통 영역에 대응하는 유효해는 W^1, W^2에 대응하는 유효정점 X_{B1}, X_{B2}의 볼록결합(convex combination)으로 이루어지는 모든 점이 된다.

증명) $W^0 \in W^1 \cap W^2$라 하면 정리 3에 의해 $W^0CX_{B1} \geq W^0CX$, $W^0CX_{B2} \geq W^0CX$가 성립한다. 이때 $X^* = \lambda X_{B1} + (1-\lambda) X_{B2}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ 이라면

$$W^0CX^* = W^0C\lambda X_{B1} + W^0C(1-\lambda)X_{B2}$$
$$\geq W^0C\lambda X + W^0C(1-\lambda)X = W^0CX$$

따라서 X^*는 정리 3에 의해 유효해가 되며 이때 대응하는 가중치의 영역은 W^1, W^2의 공통영역인 W^0가 된다.

정리 5에 의해 3개의 가중치 영역 W^1, W^2, W^3 가 있어서 $W' = W^1 \cap W^2 \cap W^3$, $W' \neq \phi$ 이면 W'에 대응하는 유효해는 W^1, W^2, W^3에 대응하는 유효정점들의 볼록조합으로 이루어지는 면이 된다. 이를 일반화 하면 다음과 같이 된다.

보조정리1. 유효정점 $X_{B1}, \cdots, X_{B\ell}$에 대응하는 가중치 영역을 $W^1, \cdots, W^\ell$이라하고, $W' = W^1 \cap W^2 \cap \cdots \cap W^\ell$이라 할때 $W' \neq \phi$이면 W'에 대응하는 유효해는 X_{B1}, X_{B2}, $\cdots$, $X_{B\ell}$의 볼록조합으로 이루는 면이 된다.

증명) 정리 5와 같은 방법으로 $W'CX_{B1} \geq W'CX, \cdots, W'CX_{B\ell} \geq W'CX$ 가 된다.

여기서 $X^* = \Sigma\lambda_k X_{Bk}$, $\Sigma\lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0$ 이라고 하자

$$W'CX^* = W'C\Sigma\lambda_k X_{Bk} = \Sigma\lambda_k W'CX_{Bk}$$
$$\geq \Sigma\lambda_k W'CX = W'CX$$

∴ X^*는 유효해가 되며 이에 대응하는 가중치 영역은 W'가 된다.■

정리6. 다목적 선형계획 문제에서 식 (1)의 가능조건을 만족하는 볼록다면체의 한 면을 F라 하자. 이 면 F의 모든 점이 유효해가 (F가 유효면이) 될 필요 충분조건은 F를 이루는 모든 정점이 $W = W^0$에서 선형 계획 문제인
$\{\text{Max } WCX \mid AX \leq b,\ X \geq 0\}$의 최적해가 된다.

증명) F의 모든 정점을 X_{Bp} $(p = 1, \cdots, \ell)$이라 하자
그러면 F의 점을 $X^0 = \Sigma\lambda_p X_{Bp}$, $\Sigma\lambda_p = 1$ $\lambda_p \geq 0$로 표현된다.
→) F의 점을 X^0라 하고 X^0가 유효해라면 정리 1에 의해 X^0에 대응하는 W^0가 존재한다. 따라서 X^0는 식 (2)의 Kuhn-Tucker 조건을 만족한다.

$$AX^0 \leq b,\ X^0 \geq 0 \cdots\cdots (4.1)$$
$$U_i(A_i.X^0 - b_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, m \cdots\cdots (4.2) \qquad (4)$$
$$\Sigma W^0{}_k C^k{}_j - \Sigma U_i A_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \cdots, n \cdots\cdots (4.3)$$

식 (4.2)에 $X^0 = \Sigma\lambda_p X_{Bp}$ 를 대입하면

$$U_i(A_i.(\Sigma\lambda_p X_{Bp}) - b_i) = 0$$
$$U_i(\Sigma\lambda_p A_i.X_{Bp} - \Sigma\lambda_p b_i) = 0$$
$$\therefore\ \Sigma\lambda_p U_i(A_i.X_{Bp} - b_i) = 0$$

위 식은 $(0 \leq \lambda_p \leq 1,\ \forall p)$에 대해 항상 성립해야 하므로

$$U_i(A_i.X_{Bp} - b_i) = 0,\ \forall p \cdots\cdots (4.2')$$

가 된다.
∴ 각각의 p에 대하여 다음이 성립한다.

$$AX_{Bp} \leq b,\ X_{Bp} \geq 0 \cdots\cdots (4.1)$$

$U_i(A_i.X_{Bp} - b_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, m$ ··························(4.2′)

$\Sigma W^0_k C^k_j - \Sigma U_i A_{ij} \leqq 0 \quad j = 1, \cdots, n$ ··························(4.3)

이상은 선형계획 문제인 {Max $W^0CX \mid AX \leqq B,\ X \geqq 0$}의 최적 조건이다.

$\therefore X_{Bp}(p = 1, \cdots, l)$은 모두 최적해 이다.

←) 모든 정점이 $W = W^0$ 에서 선형계획 문제 {Max $WCX \mid AX \leqq b,\ X \geqq 0$}의 최적이라면 가정에 의해 $W^0CX_{Bp} \geqq W^0CX\ \forall p$가 된다.

또한 점을 X^0라 하면 $X^0 = \Sigma\lambda_p X_{Bp}$ 가 된다.

$$
\begin{aligned}
\text{여기서 } W^0CX^0 &= W^0C(\Sigma\lambda_p X_{Bp}) \\
&= \Sigma\lambda_p W^0CX_{Bp} \\
&\geqq \Sigma\lambda_p W^0CX = W^0CX
\end{aligned}
$$

$\therefore W^0CX^0 \geqq W^0CX$

$\therefore X^0$는 유효해 이다. ■

보조정리2. 정리 6에서 유효면 F를 이루는 유효정점을 $X_{B1},\ X_{B2}, \cdots, X_{Bl}$이라하고, 이들에 대응하는 가중치 영역을 $W^1,\ W^2, \cdots, W^l$ 이라 할 때

W^0는 $W^0 = W^1 \cap W^2 \cap \cdots \cap W^l$ 이 된다.

이는 정리 5, 정리 6에 의해 자명하다.

이상의 결과를 종합하면 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

정리 3에 의해 임의의 가중치가 주어지면 이에 대응하는 유효해를 구할 수 있고 정의 4에 의해 유효정점 해가 주어지면 이에 대응하는 가중치 영역을 구할 수 있다. 또한 정리 4, 5, 6에 의해 가중치 영역이 서로 이웃하여 공통영역을 가지면 이 공통영역에 대응하는 유효해는 각 가중치 영역에 대응하는 유효정점들의 볼록결합으로 이루는 유효면이 되고, 역으로 유효면이 존재하면 이 유효면에 대응하는 가중치 영역 W'는 이 유효면을 이루는 유효정점 $X_{B1}, \cdots, X_{Bl}$에 대응하는 가중치 영역을 $W^1, \cdots, W^l$이라 할때 $W' = W^1 \cap \cdots \cap W^l$이 됨을 알았다.

앞의 사실을 이용하여 가중치가 주어졌을 때 이에 대응하는 유효해를 구하는 방법과 유효해가 주어졌을 때 이에 대응하는 가중치 영역을 구하는 방법을 알아보자.

〈가중치가 주어지는 경우〉

단계 1 : 주어진 가중치 W^0에 대하여 {Max $W^0CX \mid AX \leqq b,\ X \geqq 0$}의 선형계획 문제를 푼다.

단계 2 : 단계 1의 최적상태에서 대안해가 있으면 단계 3으로 가고, 대안해가 존재하지 않으면 현재의 최적해가 대응하는 유효정점해가 된다.

단계 3 : 모든 대안해를 구한다. W^0에 대응하는 유효해는 구한 모든 대안해의 볼록 결합으로 이루어지는 유효면이 된다.

〈유효해가 주어지는 경우〉

유효해가 정점해이면 정의 3에 의해 식 (3)을 만족하는 W의 영역을 구하면 되고, 유효면으로 주어지면 그 면을 이루는 모든 정점들에 대하여 동일한 방법으로 W_i를 구하고 각 W_i의 공통영역을 구하면 된다. 유효정점에 대응하는 W에 영역을 구하는 방법은 다음과 같다.

단계 1 : {$\Sigma W_k C^k_j = \Sigma U_i A_{ij}\ \ j \in$ 기저변수}를 이용하여 U_i를 W의 항으로 표시한다.

단계 2 : 단계 1에서 구한 U_i를 {$\Sigma W^0_k C^k_j -$

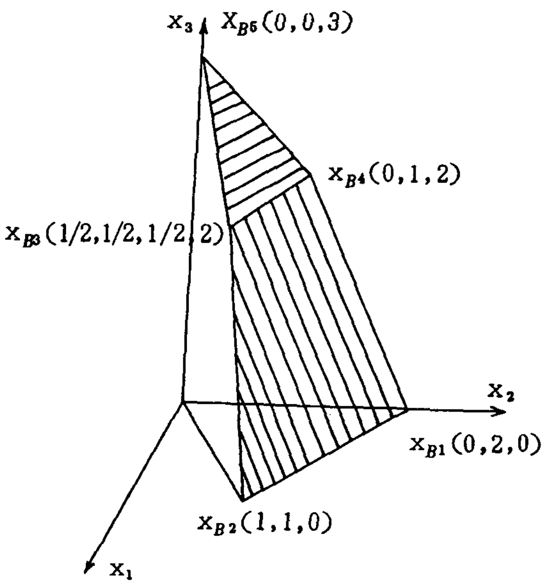
$\Sigma U_i A_{ij} \leqq 0$ $j \in$ 비기저변수}에 대입하여 W 만의 제약 조건식을 구한다.

3. 예 제

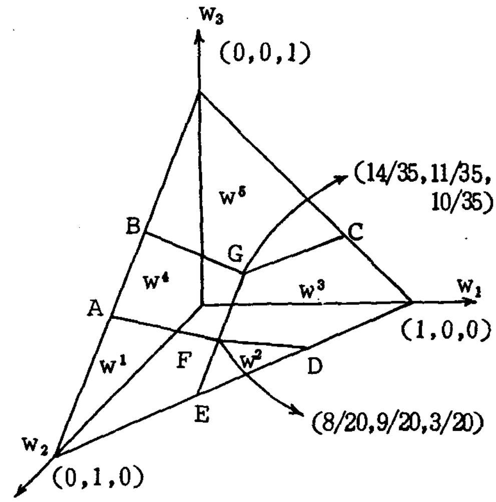
다음과 같은 다목적 선형계획법 문제를 생각해 보자.

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z_1(X) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\
& Z_2(X) = x_1 + 3x_2 - x_3 \\
& Z_3(X) = -x_1 + x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leqq 3 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leqq 4 \\
& x_1 - x_2 \leqq 0 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0
\end{aligned}
$$

이를 풀어서 유효해를 구하고 이에 대응하는 가중치를 구하면 다음과 같다. 편의상 가중치 영역은 $W_1 + W_2 + W_3 = 1$을 넣어 표시하였다.



[그림 1] 유효해



[그림 2] 가중치 영역

[그림 1]의 유효정점 X_{B1}에 대응하는 가중치 영역을 구하면

$3W_1 - 2W_2 - 2W_3 \leqq 0$, $3W_1 - 5W_2 - 7W_3 \leqq 0$, $-W_1 - 3W_2 - W_3 \leqq 0$.

$W_1 + W_2 + W_3 = 1$이 되어 [그림2]의 W^1이 되고

[그림 1]의 유효정점 X_B^-에 대응하는 가중치 영역을 구하면

$3W_1 + 8W_2 + 16W_3 \leqq 0$, $-5W_1 - 4W_2 \leqq 0$, $-3W_1 + 2W_2 + 2W_3 \leqq 0$,

$W_1 + W_2 + W_3 = 1$이 되어 [그림 2]의 W^2가 된다.

같은 방법으로 구하면 X_{B3}는 W^3, X_{B4}는 W^4, X_{B5}는 W^5에 대응됨을 알 수 있다. 여기서 [그림 2]에서 W^1, W^2의 공통영역인 $\overline{EF}$에 대응하는 유효해는 정리 5에 의해 [그림 1]의 $\overline{X_{B1}\ X_{B2}}$가 되고 [그림 1]의 $\overline{X_{B3}\ X_{B4}}$에 대응하는 가중치 영역은 [그림 2]의 FG가 된다. 또한 X_{B1}, X_{B2}, X_{B3}, X_{B4}에

대응하는 가중치 영역은 정리 6과 보조정리 2에 의해 W^1, W^2, W^3, W^4의 공통 영역인 점 F가 되고 점 G에 대응하는 유효해는 G가 W^3, W^4, W^5의 공통영역이므로 X_{B3}, X_{B4}, X_{B5}가 볼록 조합으로 이루는 ΔX_{B3}, X_{B4}, X_{B5}의 유효면이 된다.

4. 결 론

이상의 결과로 다목적 선형계획 문제의 유효해의 특성과 이 유효해와 목적함수의 가중치와의 관계를 알게 되었으며 이를 이용하여 가중치가 주어지면 이에 대응하는 유효해(유효정점, 유효면)를 구할 수 있으며 역으로 유효해가 주어지면 이에 대응하는 가중치의 영역을 구할 수 있게 되었다. 하지만 본 연구는 제약식으로 이루어지는 볼록다면체가 닫혀진(closed) 경우만을 고려하였다. 앞으로 볼록다면체가 열려진(open) 경우에 대한 연구도 있어야 되리라 생각한다.

참 고 문 헌

1. 박 순달, 선형 계획법(전정), 대영사, 서울, 1986
2. Balinski, M.L., "An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets", J.Soc.Indust.Appl. Math, Vol 9 No.1, 72−88, 1961
3. Cohon, J.R., Multiojective Programming and Planning, Academic Press, N.Y., 1978
4. Ecker, J.G. and Kouada, I.A., "Finding Efficient Points for Linear Multiple Objective Programming", Math. Programming, Vol 8, 375−377, 1975
5. Ecker, J.G. and Hegner, N.S. and Kouada, I.A., "Generating All Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Programs", J. of Opt. Theory and Appl., Vol 30 No. 3, 353−381, 1980
6. Evans, G.W., "An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs", Management Science, Vol 30 No.11, 1268−1282, 1984
7. Gal, T., "A General Method for Determinig the Set of All Efficient Solutions to a Linear Vector Maximum Problems", European J.of O.R., V. 1, 307−322, 1977
8. Gal, T., Postoptimal Analysis, Parametric Programming and Related Topics, McGraw−Hill, N.Y., 1979
9. Isermann H., "The Enumeration of the Set of all Efficient Solutions for Linear Multiobjective Programs", Opnl. Research Quar., Vol 28, 711−725, 1977
10. Mattiss, T.H., "An Algorithm for Determinig Irrelevant Constraints and All Vertices in System of Linear Inequalities", O.R., Vol 21, 247−260, 1973
11. Philip, J., "Algorithms for the Vector Maximization Problem", Math.

Prog., Vol 2, 207–229, 1972
12. Yu, P.L. and Zeleny, M., "The Set of all Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method", J.of Math. Anal. and Appl., Vol 49, 430–468, 1975