

회로 및 광학계에서 쌍안정성 및 혼돈상태에 관한 연구

- L - R - Diode 회로를 중심으로 -

김철민*, 김진태**, 이철세*, 조창호*

ABSTRACT

Chaotic Behaviors of L - R - Diode Circuit With Square Pulses Input

Chil-Min Kim, Jin-Tai Kim, Chul-Se Lee, Chang-Ho Cho .

A L - R - Diode circuit with square pulses input reveals period doubling and chaotic behaviors as same as the circuit with sine wave input . The phenomena near the resonant frequency are exactly consistent with our theoretical model with an approximation of varactor characteristic of the diode and without consideration of any reverse recovery time . The current map shows that the phenomena are caused by the varactor characteristic of the diode and the delay of the output pulses are not by the recovery time but are by the coupling of the induced current in the inductor and the input power

서 론

Varactor Diode가 비선형 성질을 지닌 축전기로 쓰이는 L - R - C회로에 외부에서 주기적인 전압을 걸어 주면 diode 양단에서 주기배가 (period Doubling)이나 혼란 (Chaos) 상태가 일어난다는 것을 Linsay 에 의하여 최초로 발견된 이후 이 회로 체계에서 이 현상은 매우 많이 연구되었다. ^{1,2)} 이 회로에서 일어나는 혼란상태는 Feigenbaum 이 예상한 Scenario 를 따라가는 Pitchfork Bifurcation 현상을 보이는데 ³⁾ 이 현상이 Varactor Diode 나 P - N 접합 Diode 의 축전량의 비형성에서 생긴다고 보았고 ^{1,2,4-11)} 또 다른 몇몇은 이러한 현상이 Diode 의 전류 역회복시간 (reverse recovery time) 때문에 생긴다고 보았는데 ¹²⁻¹⁴⁾ 이 모든 이론적 결과는 Feigenbaum 의

* 배재대학 물리학과 조교수

** 서강대학교 물리학과 대학원

Scenario 를 따라가는 것으로 나타났다. 축전량의 비선형성을 주장하는 측에서는 diode 에 선형적인 축전기를 병렬로 달았을 때 혼란상태가 생기지 않기 때문에 축전량의 비선형에 기인한다고 본 반면 전류 역 회복시간을 주장하는 측에서는 순수한 L-R-C 회로에서 축전기의 전류 역회복시간만 바뀌도록 하여도 이러한 현상이 생긴므로 diode 의 전류 역회복시간에 이 현상이 기인된다고 밝혀다. 하지만 이 실험에서는 전류 역회복시간 보다는 오히려 축전기의 비선형성 때문에 이러한 결과가 생김을 계산을 통하여 알아 보았으며 그 결과 전류에서 생기는 map 의 형태가 Feigenbaum 의 Scenario 를 따라 감을 알 수 있었고 또한 출력 맥동의 시간 지역은 역 회복시간 때문이 아니라 inductor 에 걸리는 전류와 입력과의 동조 때문이라는 것을 알아 보았다.

이 론 및 결 과

실험은 Tektronix FG 503 에서 나오는 수직파를 L-R-Diode 회로에 넣어 주었는데 L 은 55mH 이며 직류 전압에 대해 50 Ω 의 저항을 가졌으며 저항은 150 Ω 을 써서 양단에서 전류를 읽었으며 diode 는 일반적인 P-N 접합 정류 diode 로서 1N 5403 을 썼다. 입력은 10V 에 대해서 나타나는 전류 파형과 출력 전압 파형을 저항 diode 양단에서 읽었는데 이때 입력 전압은 동조 주파수 근처 (6 μ sec 의 맥동 너비를 가짐) 에서 넣어 주었는데 그림 1) 처럼 나타났다. 여기에서 2 배의

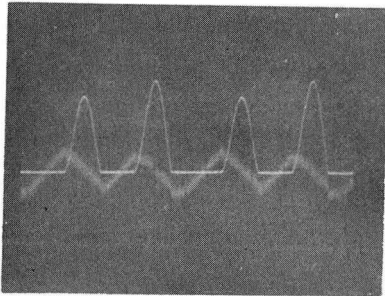


그림 (1) 회로에 수직파가 걸릴 때

diode 양단간에 걸리는 전압의 파형과 전류의 파형이다. 위 그림은 전압을 나타내며 아랫 그림은 전류를 나타내는데 Period-Doubling 2T 를 보여주고 있다.

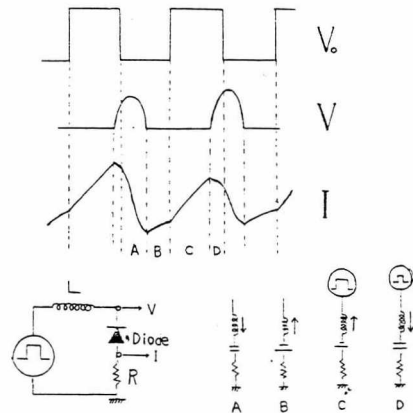


그림 (2) 출력파형과 입력에 따른 4 상태의 변화

위 그림은 입력에 따른 전압과 전류의 파형을 각 상태별로 나누는 것이며 아랫 그림은 전체 회로가 각 파형상태에 따라 어떤 회로상태를 나타내는 지를 보여준다.

주기 배가는 출력 전압의 최대치, 출력 맥동의 입력 맥동에 대한 시간 지연, 각 불연속 점에서 전류의 크기 등에서 2 배의 주기 배가가 일어남을 보여 주고 있다. 여기서 iterative map 을 구하기 위해서 출력파형을 4 단계로 그림 2) 처럼 나누었다. 그림 (C)는 회로에 전압이 걸릴 때 diode 에 충전이 일어나고 inductor 에서는 유도 전류가 생김을 보여 주며(D)는 회로에 전압이 걸리지 않을 때 inductor 에 걸렸던 유도 전류와 diode 에 충전되었던 전하가 어떤 변화를 나타내는지 보여 주고 있다. (A)는 diode 에서 충전된 전하가 다 빠져나온 다음 inductor 에서의 유도 전류가 diode 에 순방향으로 전압이 걸릴 때를 보여 주며 (D)는 이러한 유도 전류가 있을 때 외부 전압이 걸리어 전체 전류와 diode 양단간의 전압이 어떠한 변화를 일으키는 지를 보여주고 있다. diode 에 순방향으로 전압이 걸리면 0.6V 까지는 축전기의 구실을 하게 되며 역방향으로 걸릴 때에는 전압에 따라 충전량이 달라지게 된다. 그리하여 $C(V) = \frac{C_0}{(1 + \frac{V}{\phi})^\gamma}$ 으로 주어지는데 여기서 ϕ 는 0.6V이며 C_0 과 γ 는 diode 의 종류에 따라서 정해지게 된다. 그리고 $V \rightarrow -0.6V$ 가 되면 $C(V) \rightarrow \infty$ 가 되고 $V=0$ 일때 $C(V) = C_0$ 이 된다.

(A)에서는 회로에 생긴 유도 전류와 저항과 순방향의 diode만 있게 되는데 이때 $V \rightarrow -0.6V$ 이면 $C \rightarrow \infty$ 이므로 diode 는 무시하고 저항과 inductor 의 값만 풀면 되는데 $L\dot{I} + RI = \phi$ 이므로 이때 초기 조건을 I_m^0 라고 하면 $I = (I_m^0 - \frac{\phi}{R})e^{-\frac{\phi}{L}t} + \frac{\phi}{R}$ 여기서 외부 전압이 걸릴 때 까지의 시간을 τ_m^0 라 하고 이때의 전류를 I_m^1 이라하면

$$I_m^0 = (I_m^1 - \frac{\phi}{R})e^{-\frac{R}{L}\tau_m^0} + \frac{\phi}{R} \dots\dots\dots (1)$$

의식을 만족하게 된다.

이 때부터 전류는 외부 전압의 영향과 inductor 에 걸린 유도 전류에 의하여 전류의 식이 성립하게 되는데 $L\dot{I} + RI = \phi + V_0$ 에서 $I = (I_m^1 - \frac{V_0 + \phi}{R})e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0 + \phi}{R}$ 가 된다. 이때 이렇게 전류가 흐르는 시간이 중요한 역할을 하게 되는데 이것은 역방향으로 전압이 걸릴 때 diode 에 생기는 전하의 보존으로부터

$$\frac{L}{R} (I_m^0 - \frac{V_0 + \phi}{R}) + \frac{V_0 + \phi}{R} t - \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t} (I_m^1 - \frac{V_0 + \phi}{R}) + \frac{\phi}{R} \tau_m^0 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

되는 시간 t 가 바로 전류가 이렇게 흐르는 시간이 된다. 그러면 이 때 시간 t를 τ_m^1 으로 두고 τ_m^1 시간 뒤의 전류를 I_m^2 라 하면 다음 식이 성립된다.

$$I_m^2 = (I_m^1 - \frac{V_0 + \phi}{R}) e^{-\frac{R}{L}\tau_m^1} + \frac{V_0 + \phi}{R} \dots\dots\dots (3)$$

이때 부터 전압은 역 방향으로 diode 에 걸리게 되고 그러면 diode 는 전압에 따라 축전기량이 바뀌는 축전기 처럼 역할을 하게 되어 이제는 L-R-C회로도 둘 수 있다. 그러면

$I = A_m e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_m t + \phi_m^0)$ 이 되는 데 m번째 ω_m 은 전압이 최대로 diode 에 걸릴 때 생기는 축전기 용량을 이용하여 다음과 같은 근 사식으로 두었다.

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{LC_M}} \dots\dots\dots (4)$$

여기서 C_M 은 축전기 용량으로서 $C_M = \frac{C_0}{(1 + \frac{V_M^m}{\phi})\gamma}$ 으로 두었다. 여기서 m 번째 주기에서 V_M^m 은 최대로 걸릴 때의 전압을 의미하게 된다. 그리고 ϕ_m 은 m 번째의 위상차를 이용한다. 이 식을 (3)식과의 경계조건을 이용 다음 식을 구할 수 있다.

$$\left(\begin{array}{l} A_m \cos \varphi_m^0 = I_m^2 \\ V_0 + A(\frac{R}{2} \cos \varphi_m^0 + L\omega_m \sin \varphi_m^0) = 0 \end{array} \right) \dots\dots\dots (5)$$

여기서 A_m 과 φ_m^0 의 값을 구할 수 있게 된다. 이러한 조건에서 흐르기 시작한 전류는 맥동의 주기를 τ 라 할 때 $\tau - \tau_m^1$ 의 시간 까지 계속 되는데 이 때의 전류를 I_m^3 라 두면

$$I_m^3 = A_m \bar{e} \frac{R}{2L} (\tau - \tau_m^1) \cos (\omega_m (\tau - \tau_m^1) + \varphi_m^0) \dots\dots\dots (6)$$

가 된다. 여기서 A_m 과 φ_m^0 는 (5)식에서 구한 값을 그대로 대입시킨다. 이 때 부터 외부 전원은 없어지고 회로는 그림(2) - (D)의 조건이 되어 L-R-C 회로 처럼 작용하게 된다. 그러면 이때 전류는 $I = B_m \bar{e} \frac{R}{2L} t \cos (\omega_m t + \varphi_m^1)$ 이 되고 여기서 B_m 과 φ_m^1 은 마찬가지로 경계 조건을 이용하여 풀면 다음 식이 만족된다.

$$\left(\begin{array}{l} I_m^3 = B_m \cos \varphi_m^1 \\ V_0 + A \bar{e} \frac{R}{2L} (\tau - \tau_m^1) [L\omega_m \sin \{ \omega_m (\tau - \tau_m^1) + \varphi_m^0 \} - \frac{R}{2} \cos \{ \omega_m (\tau - \tau_m^1) + \varphi_m^0 \}] \\ = L\omega_m B_m \sin \varphi_m^1 - \frac{R}{2} B_m \cos \varphi_m^1 \end{array} \right) \dots\dots\dots (7)$$

여기서 최대 전압이 되는 점은 전류의 미분이 0이 되는 시간 이므로 이 시간에서 $V_c = V_0 - LI - IR$ 을 만족하는 식이나 $V_c = -LI - RI$ 를 만족하는 식 둘 사이에서 전류 미분이 0 되는 만족하는 V_c 의 값을 구하면 이 것이 최대 전압이 되는 시간인데 $V_c = -LI - RI$ 를 만족하는 식에서 구한 V_m 은 다음과 같이 된다.

$$V_m = \left[\exp \left(\frac{R}{2L\omega_m} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_m \right) \right) \right] \cdot \omega_m \dots\dots\dots (8)$$

그러면 ω_m 은 다음과 같은 쓸 수 있게 된다.

$$\omega_m = \left[\frac{\left(1 + B_m \exp \left(\frac{R}{2L\omega_m} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_m^1 \right) \right) \right) \gamma}{LC_0} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (9)$$

그리고 (7)식을 만족하는 전류는 diode 에 충전된 전하가 다 빠져 나가면 다시 (1)식을 만족하는 전류로 바뀌고 다시 이것이 (2)식을 만족하는 시간을 τ_m^0 라 두었으므로 다음 맥동이 시작 될 때 까지 (7)식을 만족하는 전류는 $\tau - \tau_{m+1}^0$ 시간이 되어야 한다. 여기서 이때 걸린시간은 전하가 다 빠져 나가는 시간이므로 $V_c = -L\dot{I} - RI = 0$ 되는 시간은 다음과 같이 주어진다.

$$B \exp \left(-\frac{R}{2L} t \right) [L\omega_m \sin (\omega_m t + \varphi_m^1) - \frac{R}{2} \cos (\omega_m t + \varphi_m^1)] = 0 \dots\dots\dots (10)$$

이 식을 만족시키는 시간 t 가 바로 $\tau - \tau_{m+1}^0$ 시간이 된다. 그러면 이 때의 전류를 I_m^4 라 두면 다음과 같이 된다.

$$I_m^4 = B_m e^{-\frac{R}{2L}(\tau - \tau_{m+1}^0)} \cos \{ \omega_m (\tau - \tau_{m+1}^0) + \varphi_m^1 \} \dots \dots \dots (11)$$

여기서 I_m^4 는 바로 I_{m+1}^0 가 되고 다시 I_{m+1}^1 은 (1)식 처럼되어 $I_{m+1}^1 = I_{m+1}^0 e^{-\frac{R}{L} \tau_{m+1}^0}$ 가 되고 이런식은 다음의 식으로 연결되고 하여 계속적인 식이 성립되게 된다. 그러면 I_m^0 가 I_{m+1}^0 에 어떤 식으로 대응 되고 I_m^1 이 I_{m+1}^1 에 어떤 식으로 대응되는지 등을 알 수 있게 된다. 이 식을 처음 시작할 때는 τ_m^0 도 임의의 적당한 값으로 주게 되고 I_m^0 도 임의의 적당한 값을 주게 되면 계속적인 순환식을 만족하게 된다. 그리하여 다음과 같은 순환식을 구할 수 있게 된다. $I_m^0 \rightarrow I_{m+1}^0$, $I_m^1 \rightarrow I_{m+1}^1$, $I_m^2 \rightarrow I_{m+1}^2$, $I_m^3 \rightarrow I_{m+1}^3$, $A_m \rightarrow A_{m+1}$, $B_m \rightarrow B_{m+1}$, $\varphi_m^0 \rightarrow \varphi_{m+1}^0$, $\varphi_m^1 \rightarrow \varphi_{m+1}^1$, $\tau_m^0 \rightarrow \tau_{m+1}^0$, $\tau_m^1 \rightarrow \tau_{m+1}^1$, $\omega_m \rightarrow \omega_{m+1}$ 및 $V_m \rightarrow V_{m+1}$ 의 관계식을 주게 된다. 이러한 순환식이 외부의 전압 V_0 이 변할 때 Feigenbaum의 Scenario를 따라가는 map으로 변할 수 있게 된다.

이런 꼴의 map은 E. R. Hunt 등이 전류 역 회복시간만 고려해서 푼 순환식과 동일한 꼴을 가지므로 Feigenbaum의 Scenario를 따라 감을 알 수 있게 된다. 그리하여 2배의 주기 배가의 꼴을 가지는 그림 1)과 같은 전류 곡선으로 구할 수 있었다.

결 론

전류 역회복시간의 고려없이 diode의 비선형적 축전용량의 변화만 고려하여 순환식을 만들었다. 그 결과 E. R. Hunt와 비슷한 전류와 전압이 서로 연결된 순환식을 얻었다. 그리고 이 순환식은 Feigenbaum의 Scenario를 따라가는 2배의 주기배가를 만들었다. 그 결과 순환식이 L-R-diode 회로에 수직과가 걸린 회로의 근사식이라 할지라도 이 회로의 특성을 잘 나타내어 주며 이 회로에서 나타나는 불안정성을 잘 설명해 준다. 특히 $I_m^0 \rightarrow I_{m+1}^0$, $I_m^1 \rightarrow I_{m+1}^1$, $I_m^2 \rightarrow I_{m+1}^2$, $I_m^3 \rightarrow I_{m+1}^3$, $V_m \rightarrow V_{m+1}$ 등은 Feigenbaum의 Scenario를 따라가는 Pitchfork Bifurcation현상을 잘 나타내며 sine wave가 외부에서 걸린 경우나 그 외의 불안정성, Intermittency나 Hopf Bifurcation에 의한 불안정성에 대한 설명도 잘 나타낼 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

1. P. S. Linsay, Phys. Rev. Lett, 47, 1349(1981).
2. J. Testa, J. Perez., and C. Jefferies, Phys. Rev. Lett, 48, 714(1982).

3. M. J. Feigenbaum, J. Shat, Phys. 19, 25(1978).
4. J. Testa, J. Perez, and C. Jefferies, Phys. Rev. Lett, 49, 1055(1982).
5. C. Jefferies and J. Perez, Phys. Rev. A, 26, 2117(1982).
6. C. Jefferies and J. Perez, Phys. Rev. A, 27, 601(1983).
7. D. Broson, D. Dewey and P.S. Lindsay, Phys. Rev. A, 28, 1201(1983).
8. C. Jefferies, K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A, 31, 1077(1985).
9. R. V. Buskirk and C. Jefferies, Phys. Rev. A, 31, 3332(1985).
10. J. Mevissen, R. Seal, and L. Waters, Phys. Rev. A, 32, 2990(1985).
11. W. Fairbairn, Phys. Bull, 37, 300(1986).
12. E. R. Hunt, Phys. Rev. Lett, 49, 1054(1982).
13. R. W. Rollins and E. R. Hunt, Phys. Rev. Lett, 49, 1295 (1982).
14. E. R. Hunt and R. W. Rollins, Phys. Rev. A, 1000(1984).

초 록

L-R-Diode 회로에 수직파를 걸어 주어도 sine 파를 걸어 주었을 때처럼 주기 배가(Period Doubling)와 혼란상태(Chaos)가 생겼다. 공명주파수 근처에서 생긴 이러한 현상은 Diode의 역회복시간(reverse recovery time)을 고려하지 않고 varactor 특성만 근사적으로 고려한 이론적 모델과 잘 들어 맞았다. 전류 map은 이러한 현상이 Diode의 varactor 특성 때문이라는 것을 잘 나타내 보이며 또 맥동의 지연은 역회복시간때문이 아니라 inductor에 걸리는 전류와 입력파의 동조때문이라는 것을 나타내 보인다.